2

ENSINO SECUNDARIO

PROGRAMA

de

MATEMATICA

(10º - 12º)

PARA APLICAÇAO EM REGIME DE EXPERIENCIA PEDAGOGICA

MATEMÁTICA - ENSINO SECUNDÁRIO

ÍNDICE

Folha

1. INTRODUÇÃO

1. INTRODUÇÃO

1.1. O presente programa de Matemática destina-se a um ciclo de 3 anos - - 10º, 11º e 12º · com 4+4+4 horas semanais o que significa uma redução de duas horas (uma no 10º e outra no 11º) em relação ao anterior currículo. Por outro lado, este ciclo segue-se à escolaridade obrigatória, agora estendida por nove anos, na qual a Matemática visa um maior desenvolvimento de capacidades mas não poderá atingir facilmente uma grande extensão de conhecimentos.

1.2. Tendo como base estes factores e os processos que a didáctica actual da Matemática aconselha, considerou-se fundamental, na elaboração do programa:

- dar continuação, sem brusca mudança de nível, aos estudos feitos no 3º Ciclo;
- ajustar o desenvolvimento dos temas ao nível etário dos alunos;
- estimular o aluno a participar activamente na aprendizagem;
- estabelecer ligações com a vida real e a tecnologia moderna;
- melhorar a formação humana e cultural do aluno.
- desenvolver o pensamento científico - observar, intuir, conjecturar, experimentar, provar, avaliar.

1.3. Os grandes temas adoptados no desenvolvimento do programa foram:

- Números e Cálculo Algébrico.
- Geometria Analítica e Trigonometria.
- Funções e Análise Infinitesimal.
- Estatística e Probabilidades.

1.4. Quanto à organização destes temas ao longo do ciclo houve a preocupação de:

- Garantir uma eficaz articulação dos três anos, retomando e ampliando sucessivamente os temas de modo a dar unidade ao ciclo. Por outro lado fraccionar o estudo dos temas de modo a reabordá-los em diferentes momentos, permite uma maturação dos conhecimentos até nova ampliação e uma visão interligada de diversos conteúdos da Matemática.

- Desformalizar e abordar de modo mais intuitivo o estudo de vários conceitos de Lógica e de Análise Infinitesimal.
- Aumentar o peso relativo da Geometria, pelo importante papel formativo que se lhe reconhece.
- Aproximar o estudo da Geometria do plano e do espaço, para evitar a tradicional partição e facilitar a compreensão da Geometria Euclideana como um todo.

1.5. As alterações mais importantes em relação aos programas anteriores, para além de uma nova atitude didáctica, são as seguintes:

- Abordagem intuitiva do estudo de IR, no 10º ano, precedendo o estudo das funções.
- O estudo da Lógica, além de ter sido reduzido, é feito apenas quando se considera útil para um dado tema.
- Abordagem da resolução de sistemas com mais de duas equações.
- Precedendo o estudo da Geometria Analítica faz-se uma breve introdução de Geometria Euclideana, numa perspectiva hipotético-dedutiva.
- Os conceitos básicos de Análise Infinitesimal são introduzidos intuitivamente e só posteriormente aperfeiçoados, evitando sempre uma excessiva formalização; dá-se relevo à interpretação e esboço de gráficos cartesianos (recorrendo, quando oportuno, à calculadora).
- Tendo em conta que o 12º ano vai constituir agora um fecho de ciclo e ano terminal de estudos para muitos alunos, pretende-se alargar o estudo da Análise Infinitesimal ao cálculo de áreas e à noção de integral definido; nas aplicações usar-se-ão apenas primitivas imediatas.

- Além da redução no desenvolvimento de vários temas são suprimidos outros, como algumas fórmulas trigonométricas, a inversão das funções trigonométricas, os teoremas de Rolle, de Lagrange e de Cauchy e suas aplicações e grande parte das estruturas algébricas.
- No 12º ano criam-se unidades didácticas de opção que permitem à escola fazer a escolha da mais adequada a cada turma.

- São introduzidas referências de natureza histórica a propósito de certas matérias para as enquadrar na História e na Cultura do Homem e para facilitar a compreensão de factos que ocorrem no mundo moderno.

2. FINALIDADES

MATEMÁTICA

2. Finalidades da disciplina de Matemática no ensino secundário

Tendo presente que

. é importante a função da Matemática, quer como instrumento de interpretação do real, quer como factor de desenvolvimento de uma estrutura dinâmica de pensamento;

. o centro do processo ensino/aprendizagem é o aluno como pessoa; e que a Matemática se aprende construindo, vivendo experiências que liguem o concreto ao abstracto;

. a Matemática, para além do seu eminente carácter formativo, propicia saberes e técnicas indispensáveis à continuação dos estudos;

consideram-se finalidades da disciplina de Matemática no Ensino Secundário:

- Aprofundar os elementos de uma cultura científica, técnica e humanística que constituam suporte cognitivo e metodológico tanto para o prosseguimento de estudos como para a inserção na vida activa.

- Promover a realização pessoal mediante o desenvolvimento de atitudes de autonomia e cooperação.

- Desenvolver a capacidade de usar a Matemática como instrumento de interpretação e intervenção no real.

- Desenvolver as capacidades de resolução de problemas e de comunicação, assim como a memória, o rigor, o espírito crítico e a criatividade.

3. OBJECTIVOS GERAIS

3 - OBJECTIVOS GERAIS
MATEMÁTICA - SECUNDÁRIO

VALORES/ATITUDES

- Desenvolver a autonomia e a solidariedade
  - Exprimir e fundamentar as suas opiniões
  - Respeitar as opiniões dos outros e aceitar as diferenças
  - Responsabilizar-se pelas suas iniciativas e tarefas, tanto individuais como colectivas
  - Manifestar hábitos de trabalho e persistência
  - Procurar a informação de que necessita
  - Revelar espírito crítico e de rigor, e confiança nos seus raciocínios
  - Abordar situações novas com interesse, espírito de iniciativa e persistência
  - Avaliar situações e tomar decisões
  - Colaborar na resolução de problemas das comunidades em que se insere
  - Interessar-se por notícias e publicações relativas à Matemática e a descobertas científicas e tecnológicas
  - Reconhecer o contributo da Matemática para a compreensão e resolução de problemas do Homem através do tempo.

CAPACIDADES/APTIDÕES

- Desenvolver a capacidade de utilizar a Matemática na interpretação e intervenção no real
  - Analisar situações da vida real identificando modelos matemáticos que permitam a sua interpretação e resolução
  - Seleccionar estratégias de resolução de problemas.
  - Formular hipóteses e prever resultados
  - Interpretar e criticar resultados no contexto do problema
  - Resolver problemas nos domínios da Matemática, da Física, da Economia, das Ciências Humanas,...
- Desenvolver o raciocínio e o pensamento científico
  - Descobrir relações entre diversos temas da Matemática
  - Formular generalizações a partir de experiências
  - Validar conjecturas
  - Fazer raciocínios demonstrativos usando métodos adequados
  - Compreender a ligação entre o avanço científico e o progresso da humanidade
- Desenvolver a capacidade de comunicação
  - Interpretar textos de Matemática
  - Apresentar o mesmo conceito em diversas formas ou linguagens
  - Expor um raciocínio com clareza
  - Argumentar com lógica e bom senso
  - Usar o poder de síntese da linguagem Matemática
  - Apresentar o seu trabalho de forma clara e organizada.

CONHECIMENTOS

- Ampliar o conceito de número e desenvolver o cálculo
  - Aperfeiçoar o cálculo em IR e operar com números complexos.
  - Operar com expressões racionais, irracionais e exponenciais, logarítmicas e trigonométricas.
  - Resolver equações, inequações e sistemas.
  - Aplicar conhecimentos de lógica indispensáveis à clarificação de conceitos.
  - Operar com a calculadora sabendo tirar partido das suas potencialidades.
- Utilizar o método analítico no estudo da Geometria
  - Identificar conjuntos de pontos, do plano ou do espaço, definidos por condições dadas e vice versa.
  - Utilizar vectores e sua representação analítica em referencial o.n., no estudo do plano e do espaço.
  - Estudar analiticamente rectas e cónicas no plano
  - Resolver problemas de incidência, paralelismo e perpendicularidade no plano e no espaço.
- Iniciar o estudo da Análise infinitesimal
  - Interpretar o gráfico de uma função.
  - Esboçar o gráfico de uma função a partir do respectivo estudo analítico.
  - Determinar características de sucessões definidas de diferentes formas.
  - Aplicar o método de indução matemática na demonstração de propriedades.
  - Resolver problemas de máximos e de mínimos
  - Determinar primitivas imediatas e áreas sob curvas em casos simples
- Ampliar os conhecimentos de Estatística e Probabilidades.
  - Interpretar e comparar distribuições estatísticas atendendo às medidas de localização e dispersão.
  - Resolver problemas de contagem.
  - Calcular probabilidades, sendo os acontecimentos elementares equiprováveis ou não.
  - Resolver problemas simples relativos às distribuições binominal e normal
- Conhecer aspectos da História da Matemática
  - Conhecer personalidades e factos marcantes da História da Matemática em relação com momentos históricos de relevância cultural ou social.

4. INTRODUÇÃO AOS GRANDES TEMAS

4.1. Números e Cálculo Algébrico

4.2. Geometria Analítica e Trigonometria

4.3 Funções e Análise Infinitesimal

4.4 Estatística e Probabilidades

4. INTRODUÇÃO AOS GRANDES TEMAS

No Ensino Secundário continuam a ser relevantes os objectivos relativos à formação global do aluno; todavia, há que ter em conta também um núcleo de técnicas e capacidades indispensáveis aos jovens que prosseguem estudos.

De acordo com as finalidades e objectivos gerais atrás definidos fez-se uma selecção de conteúdos que se agruparam em quatro grandes temas, cada um dos quais é estudado, em abordagens sucessivamente mais amplas, ao longo dos três anos do ciclo. Este fraccionamento dos temas visa a maturação dos conhecimentos, antes de cada ampliação, e ainda promover a interligação entre os diferentes ramos da Matemática evitando capítulos estanques e proporcionando uma visão global da disciplina.

Os quatro temas são, como já foi referido:

Números e Cálculo Algébrico

Geometria Analítica e Trigonometria

Funções e Análise Infinitesimal

Estatística e Probabilidades

4.1. NÚMEROS E CÁLCULO ALGÉBRICO

- A capacidade de cálculo, numérico e literal, adquirida no 3º ciclo vai agora ser consolidada e aperfeiçoada para facilitar a resolução de novos problemas relacionados com a vida corrente, com a própria Matemática ou com outras disciplinas.

- É de salientar que, neste programa, o cálculo não constitui um obje ctivo em si, destinando-se, acima de tudo, a ser usado para facilitar ou aprofundar o estudo de certas unidades temáticas, nomeadamente o estudo da Estatística, das Probabilidades, da Geometria Analítica, das Funções e ainda o ensino doutras disciplinas, o que lhe confere o carácter de pré-requisito para esses estudos.

- O uso de calculadoras e o recurso a gráficos para além de terem importante função como ferramenta para a resolução de problemas, constituem uma fonte de novos problemas.

- O aluno irá usar uma calculadora científica e programável na resolução de certos problemas o que conduzirá a enquadramentos, a valores aproximados de ·andeza e a cálculos com números escritos na forma decimal ou na notação científica.

- O <u>cálculo numérico</u> e o <u>cálculo literal</u> - equações, inequações e sistemas - constituem uma oportunidade excelente para introduzir alguns conceitos de Lógica que conferem maior rigor e clareza à expressão de certas relações e continuam a ser usados para além da unidade em que são introduzidos.

- No final do Ciclo, as noções de <u>grupo</u> e de <u>corpo</u> permitem uma visão organizada dos grandes conjuntos numéricos.

4.2. GEOMETRIA ANALÍTICA E TRIGONOMETRIA

A Geometria tem um papel importante neste programa porque visa uma larga variedade de objectivos: é motivadora pela riqueza dos seus problemas e pela facilidade de concretizações ligadas à realidade envolvente; é formativa porque desenvolve o conhecimento do espaço, a comunicação pela imagem e o raciocínio dedutivo; fornece, por outro lado, instrumentos de base úteis ao prosseguimento de estudos - referenciais cartesianos, cálculo vectorial, análise de figura, uso de funções trigonométricas.

Ainda outros objectivos gerais podem ser alcançados com os estudos geométricos, como o desenvolvimento do pensamento científico e da capacidade de organização e síntese, a compreensão das interligações entre a Matemática e outras ciências assim como do papel desta ciência na história do progresso da Humanidade.

As actividades geométricas ao longo do programa não se reduzem aos capítulos "Geometria Analítica" e "Trigonometria". Recorre-se a exemplos geométricos no estudo dos reais e das sucessões e quase todas as unidades de Análise Infinitesimal são montadas a partir do estudo de gráficos, desde o 10º ao 12º ano.

Sugere-se que o aluno seja estimulado a recorrer com frequência a esboços, gráficos, diagramas e perspectivas. Também se recuperam muitos conhecimentos de Geometria do 3º ciclo (por exemplo Teorema de Pitágoras, simetrias e translações, critérios de paralelismo e perpendicularidade no espaço, lugares geométricos).

Este aumento de actividades geométricas consegue-se sacrificando, como é óbvio, alguns conteúdos habituais; reduz -se também o tratamento formal de certos conceitos e a exigência de virtuosismo em certas técnicas de cálculo, nomeadamente no estudo das sucessões. Por outro lado consagra-se mais tempo à resolução de situações problemáticas interessantes ao alcance do aluno médio.

A primeira abordagem ao método analítico usará condições muito simples envolvendo poucos conceitos teóricos (simétrico, maior, menor, distância) mas que permitem caracterizar um número razoável de regiões planas: algumas rectas e semi-planos, circunferências, círculos, mediatrizes. A transposição ao espaço tridimensional destas questões elementares de Geometria Analítica faz-se com facilidade e proporciona uma visão integrada da Geometria como um todo, evitando a tradicional dicotomia plano-espaço e facilitando a compreensão de analogias e diferenças. Neste sentido passa-se a condições muito simples em referencial tri-ortogonal incluindo a definição de superfície esférica, esfera e plano mediador.

No entanto sentiu-se necessidade de proceder, antes da passagem à Geometria Analítica no espaço, a uma ampliação de conhecimentos sobre paralelismo e perpendicularidade de rectas e planos, numa perspectiva hipotético-dedutiva, razão porque se abre a 1ª unidade de Geometria com este tema.

O vector livre é utilizado como instrumento de cálculo em referenciais o.n. e as suas propriedades operatórias são estudadas paralelamente no plano e no espaço, mas não se formaliza a estrutura abstracta de espaço vectorial.

O estudo do produto escalar e da perpendicularidade de rectas no só é feito no 11º ano. O produto escalar é um conceito muito rico, com n sas aplicações em Geometria; embora seja preciso conter exageros no trat do programa, não se pode deixar de preparar os alunos para a demonstraçã algumas propriedades recorrendo a esta nova "arma" (por exemplo em traba de grupo a realizar em casa).

Naturalmente à medida que os conhecimentos de Geometria aumentam, os problemas propostos (domínios planos, intersecções, rectas obedecendo a condições dadas, etc...) devem tornar-se mais ricos envolvendo os novos conhecimentos e os dos anos anteriores: é com estas abordagens e ampliações ao longo dos 3 anos que se espera consolidar os conhecimentos de modo que, no final 12º ano, haja aquisições firmes nos vários temas do programa.

O paralelismo e a perpendicularidade no espaço, só são tratados no 12º ano com recurso ao produto escalar no espaço. O produto externo não figura no programa.

O estudo das <u>cónicas</u> deve inserir-se numa perspectiva histórica e cultural e é excelente oportunidade para trabalhos de grupo e <u>interdisciplinares</u>, por exemplo, sobre as órbitas dos astros e satélites artificiais, lançamento de projécteis, espelhos e antenas parabólicas, faróis de automóveis ou ainda sobre a obtenção das cónicas por secção de superfícies cónicas de revolução, sobre construções e processos práticos para o seu traçado, sobre a sua aplicação em Arquitectura etc...

O estudo analítico das cónicas será completado com o auxílio da análise infinitesimal e incluirá a determinação de tangentes e normais e a demonstração da propriedade reflectora da parábola.

<u>Trigonometria</u> é abordada pelas aplicações à geometria. Estudam-se as funções seno, coseno e tangente e as fórmulas e relações essenciais para a resolução de equações simples e para permitir o estudo analítico de certas funções trigonométricas.

4.3. FUNÇÕES E ANÁLISE INFINITESIMAL

O estudo das funções e a análise das suas propriedades e comportamentos são fundamentais para conhecer e interpretar as leis que regulam os mais variados fenômenos do mundo em que vivemos.

A Análise Infinitesimal é preparada no 10º ano pelo aperfeiçoamento do conceito de função de variável real e pelo estudo directo de gráficos de funções envolvendo variáveis concretas (da Geometria, da Física, da Economia,...).

Os gráficos serão dados ou construidos, ponto por ponto, a partir de tabelas e de fórmulas com o auxílio da calculadora e pelo exame da expressão definidora. O comportamento da função, quando a variável independente se aproxima de um certo valor ou toma valores muito grandes, permite dar uma ideia experimental de limite.

No 10º ano generalidades sobre funções de variável natural familiarizam o aluno com a terminologia própria e com diversas formas de definição. Mas é só no 11º ano que surge propriamente o conceito de limite: começa-se por adoptar algumas sucessões de referência com as quais outras se comparam, aborda-se a noção de infinitamente grande, infinitésimo, sucessão convergente ($u_n - a$ é infinitésimo), apenas o essencial para o aluno poder entender a definição à Heine de limite de função real de variável real e a continuidade num ponto. Tendo em conta que as definições formais destes conceitos básicos, totalmente expressas em simbologia lógica, nem sempre conduzem à sua correcta assimilação embora muitos alunos as "decorem", propõe-se que no 11º ano sejam definidas por palavras correntes; por exemplo: u_n é infinitésimo se for sempre possível encontrar uma ordem depois da qual todos os termos são, em módulo, menores que δ, por menor que seja δ (positivo); e que mesmo este tipo de definição seja precedido por exemplos e contra-exemplos estudados com calculadora ou computador para "visualizar" a evolução das imagens.

A tónica no estudo da Análise estará na noção de derivada, obtida como limite da taxa de variação média, na função derivada e suas aplicações a vários níveis.

Ainda no 11º ano conclui-se que a área sob um gráfico de uma função contínua é uma 2ª função cuja derivada é a 1ª; e aplica-se este conhecimento ao cálculo de algumas áreas usando apenas primitivas imediatas. Teve-se em conta que o 12ºano vai constituir um fecho de ciclo e ano terminal de estudos para muitos alunos, pelo que se remata o estudo da Análise com a noção de integral definido que deve fazer parte dos conhecimentos de um aluno com 12 anos de estudo de Matemática.

É importante esclarecer que se investiu numa organização progressiva das tarefas de análise, por categoria de funções: estudam-se no 11º ano polinómios e fracções algébricas e todos os conceitos de limite, derivada, primitiva são estudados só sobre estas funções e naturalmente as situações problemáticas a resolver estarão limitadas a estas funções.

Analogamente, no 12º ano, há 3 momentos em que se amplia a gama de funções a estudar: funções irracionais, funções trigonométricas e funções exponenciais e logarítmicas. Em cada ampliação usam-se as "armas" analíticas já conhecidas a aproveita-se para afinar os conceitos que poderão finalmente ser traduzidos com simbologia lógica.

Nas situações a estudar devem intervir as funções anteriormente conhecidas; mas não está no espírito do programa o estudo de funções com grandes expressões analíticas ou que impliquem virtuosismos ou artifícios rebuscados na derivação e no levantamento de indeterminações.

4.4. ESTATÍSTICA E PROBABILIDADES

O estudo desta área, que vem sendo preparado ao longo do 2º e do 3º ciclos vai agora ser consolidado e ampliado face às seguintes reflexões:

- A interpretação de informação estatística e probabilística é indispensável para compreender a sociedade, nomeadamente para entender e avaliar informações veiculadas pelos mass-média.

- As técnicas de tratamento de informação fazem hoje parte da bagagem exigida por qualquer carreira científico-técnica.

- É uma oportunidade excelente para desenvolver o espírito de iniciativa, métodos de trabalho e para promover actividades interdisciplinares.

- O estudo da Estatística Descritiva não se resume à elaboração de tabelas ou de gráficos nem ao cálculo de medidas de localização e de dispersão; estes são apenas os instrumentos que, devidamente interpretados, apoiam a compreensão de certas propriedades da população a que se referem. Ao retomar o estudo da Estatística pretende-se aperfeiçoar a capacidade de <u>interpretar e comparar distribuições</u> e de <u>tratar e interpretar dados</u> fornecidos em estado bruto.

As actividades de tratamento de dados e comparação de distribuições devem dizer respeito, de preferência, a <u>dados reais e recentes</u> (informações meteorológicas, desportivas, agrícolos,...) ou ligadas às disciplinas de Biologia, Geografia, Economia,...

Inclui-se a abordagem intuitiva da noção de <u>correlação</u> entre duas variáveis apoiada em exemplos diversificados de nuvens de pontos.

A possiblidade de <u>quantificar a incerteza</u> abre uma perspectiva nova sobre as aplicações da Matemática a qual enriquece a cultura dos jovens e a sua preparação para entender o mundo que os rodeia

As probabilidades serão calculadas pela lei de Laplace com o auxílio da análise combinatória: o conceito frequencista de probabilidade permitirá ao aluno ficar com uma ideia da estreita ligação entre as duas áreas - Estatística e Cálculo das Probabilidades. Esta ligação é clarificada pelas distribuições de frequências e distribuições de probabilidade; a curva de Gauss será abordada intuitivamente.

5. SÍNTESE DA DISTRIBUIÇÃO DOS CONTEÚDOS PELOS TRÊS ANOS E PROPOSTA DE ROTEIRO

MATEMÁTICA

ENSINO SECUNDÁRIO

3 - SÍNTESE DA DISTRIBUIÇÃO

GRANDES TEMAS: Estatística e Probabilidades | Números e Cálculo Algébrico | Geometria Analítica e Trigonometria | Funções e Análise Infinitesimal

10º ANO

1. NOÇÕES BÁSICAS DE ESTATÍSTICA
   - -Representação e interpretação de distribuições estatísticas, com utilização de medidas de tendência central e de dispersão. Comparação de distribuições. O símbolo Σ.
   - - Distribuição bidimensional: estudo intuitivo.
2. O CONJUNTO $\mathbb{R}$. NOÇÕES DE LÓGICA
   - -Extensão de $\mathbb{Q}$ a $\mathbb{R}$: a recta real. Operações com radicais. Ordem em $\mathbb{R}$; inequações. Valor absoluto.
   - - Lógica: operações com condições e com conjuntos.
3. GEOMETRIA ANALÍTICA - I - Introdução ao Método Cartesiano
   - -Ampliação de conhecimentos de Geometria no Espaço.
   - -Referenciais cartesianos ortonormados no plano e no espaço; interpretação de condições simples no plano e no espaço.
4. FUNÇÕES - I - Generalidades. Função Quadrática.
   - -Funções definidas por tabelas e por fórmulas; interpretação e elaboração de gráficos por pontos. Características gerais de uma função.
   - -Função quadrática.
   - -Lógica. Primeiras leis de De Morgan. Quantificadores.
5. SUCESSÕES - I-Generalidades. Método de indução
   - -Generalidades; definição por recorrência. Método de indução matemática.
   - -Progressões aritméticas e progressões geométricas.
6. GEOMETRIA ANALÍTICA - II-Vectores. Paralelismo
   - -Vectores em referencial ortonormado, no plano e no espaço.
   - -Equações vectoriais da recta no plano e no espaço.
   - -Equações cartesianas da recta no plano. Paralelismo.
   - -Sistemas de duas equações a duas incógnitas.

11º ANO

1. COMBINATÓRIA
   - -Técnicas de contagem: produto cartesiano; arranjos; permutações; combinações.
   - -A fórmula do binómio de Newton.
2. PROBABILIDADES - I-Noções Básicas
   - -Experiências aleatórias e acontecimentos.
   - -Conceito frequencista de probabilidade.
   - -Cálculo da probabilidade de um acontecimento.
3. FUNÇÕES - II-Funções Racionais. Operações
   - -Operações; composição; inversão.
   - -Polinómios e fracções algébricas. Operações.
   - -Equações e inequações.
   - -Funções polinominais, funções racionais, funções com radicais. Domínio.
4. TRIGONOMETRIA
   - -Aplicação ao cálculo de projecções e de elementos de triângulos e de quadriláteros.
   - -Seno, co-seno e tangente - estudo no círculo trigonométrico.
   - -Analogia dos senos. Equações trigonométricas elementares.
5. GEOMETRIA ANALÍTICA - III-Produto Escalar. Perpendicularidade
   - -Produto escalar de vectores; ângulo de duas rectas; perpendicularidade; distância de ponto a recta.
   - -Conjuntos de pontos definidos por condições.
   - -Aplicação do produto escalar à demonstração de propriedades.
6. SUCESSÕES - II- Limites
   - -Infinitamente grandes e infinitésimos.
   - -Sucessões convergentes. Unicidade do limite.
7. FUNÇÕES - III-Limites. Derivadas
   - -Limites e continuidade de funções.
   - -Derivação de funções racionais. Segunda derivada. Aplicações.
8. FUNÇÕES - IV - Áreas
   - -Noção de integral definido. Primitivas imediatas. Cálculo de áreas.

12º ANO

1. PROBABILIDADES II
   - -Distribuição normal e distribuição binomial: estudo intuitivo.
   - -Cálculo de probabilidades em provas repetidas.
2. FUNÇÕES - V-Complementos sobre Derivadas.
   - -Derivada da função inversa e da função composta; aplicações. Derivadas sucessivas. Derivadas de funções implícitas
   - -Estudo de funções irracionais.
3. GEOMETRIA ANALÍTICA - IV - Cónicas. Rectas e Planos no Espaço
   - -Cónicas
   - -Equações de planos e de rectas no espaço.
   - -Paralelismo e perpendicularidade.
4. SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES
   - -Resolução de sistemas de três equações com três incógnitas método de Gauss; notação matricial.
5. FUNÇÕES - VI-Funções Trigonométricas em $\mathbb{R}$
   - -Fórmulas. Equações e identidades.
   - -Seno, co-seno e tangente como funções de variável real.
   - -Limites, continuidade, derivada, variação.
   - -Primitivas imediatas. Cálculo de áreas.
6. FUNÇÕES - VII - Funções Exponencial e Logarítmica
   - -O número e
   - -Função exponencial de base $a > 1$: estudo analítico e gráfico.
   - -Noção de logaritmo; propriedades.
   - -Função logarítmica: estudo analítico e gráfico.
   - -Levantamento de indeterminações.
   - -Primitivas imediatas: cálculo de áreas.
7. GRUPOS E CORPOS
   - -Definições e exemplos numéricos; os corpos $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$.
   - -Números complexos; operações; o corpo $\mathbb{C}$ como extensão de $\mathbb{R}$.
8. OPÇÕES: A cada turma será leccionada uma das opções:
   - A. O conjunto dos números complexos (complementos).
   - B. Complementos sobre primitivação. Iniciação às equações diferenciais
   - C. Espaços lineares
   - D. Transformações Geométricas
   - E. Tema à escolha da escola.

6. MATERIAIS E RECURSOS

6. MATERIAIS/RECURSOS

A didáctica prevista para a Matemática do Ensino Secundário pressupõe a possibilidade de uso de materiais diversificados:

- Calculadoras científicas programáveis.
- Computador, se possível.
- Retroprojector e material de apoio (acetatos lisos e quadriculados, canetas,...).
- Papel milimétrico.
- Material de desenho para o quadro (compasso, transferidor, régua, esquadro).
- Material paro o estudo de geometria no espaço (sólidos geométricos, placas, arames,...).
- Quadro quadriculado.
- Livros para consulta (ver bibliografia indicada)
- Outros materiais escritos (folhas com dados estatísticos, fichas de trabalho, fichas de avaliação,...).

7. CONSIDERAÇÕES SOBRE AVALIAÇÃO

7. <u>CONSIDERAÇÕES SOBRE AVALIAÇÃO</u>

- A avaliação é entendida como uma acção orientadora e estimuladora da própria aprendizagem, na medida em que o aluno e professor vão tomando conhecimento dos processos alcançados, e permite averiguar os níveis de desenvolvimento do aluno relativamente aos objectivos gerais e específicos do programa.

observação e o registo sistemático dos comportamentos de cada aluno quanto à compreensão de conceitos, destrezas adquiridas, criatividade na resolução de situações, nível de participação nos trabalhos de grupo, trabalhos individuais, testes, atitudes manifestadas, dão origem a uma abundante colecção de dados sobre cada aluno. A análise de todos os dados recolhidos além de ajudar o professor a acompanhar o processo de aprendizagem, permite-lhe também formular um juízo de valor sobre o rendimento escolar e uma apreciação global sobre o desenvolvimento do aluno.

A reflexão conjunta do professor e do aluno sobre os processos e dificuldades verificadas é um ponto de partida para o professor esboçar o reajustamento das estratégias de ensino e para o aluno tomar consciência da sua progressão e ensaiar novos caminhos para a sua aprendizagem.

8. BIBLIOGRAFIA GERAL

BIBLIOGRAFIA

(1) GUZMAN, COLERA, SALVADOR, Matemáticas 1, 2 e 3, - Anaya, 1987

(2) IREM de Strasbourg, Mathématique 2ᵉ - Editions Casteilla, 1986

(3) GAUTHIER e outros, Mathématiques 2ᵉ,1ᵉT - Hachette, 1987

(4) TERRACHER, Collection, Mathématiques 1ᵉ - S et E, Analyse
Hachete Cl., 1987.

(5) IREM de Strasbourg, Mathématiques 1ᵉT- Editions Casteilla

(6) SEBASTIÃO e SILVA, SILVA PAULO, Compêndio de Álgebra, 6º ano

(7) SEBASTIÃO e SILVA, Compêndido de Matemática, 1º vol. Ed. GEP, 1975

(8) SWOKOWSKI, Earl, Cálculo com Geometria Analítica, 1º vol.
Ed. Mc. Graw-Hill, 1983

(9) NUNEM e FOULIS, Cálculo, Vol. 1, Ed. Guanabara Dois, Rio de Janeiro, 1982

(10) KLEPPNER, RAMSEY, Ensino rápido do Cálculo Diferencial e Integral,
Clássica Editora.

(11) CAMPOS FERREIRA, Introdução à Análise Matemática - Ed. da F. Gulbenkian

(12) SCHNEIDER, STEEG, YOUNG, Linear Álgebra, A Concret Introduction -
MacMILLAN

(13) LENTIN, RIVAUD, Elements d'Algèbra Moderne - Ed. Vuibert

(14) GALVÃO DE MELO, Introdução aos métodos estatísticos, Vols. 1 e 2,
Cadernos do I.O.P., 1971/73

(15) BENTO MORTEIRA, GEORGE BLACK, Estatística Descritiva, Mc. Graw-Hill
1983

(16) SEYMOUR LIPSCHUTZ, Probabilidades (teoria e problemas) - Mc. Graw-Hill

(17) BARRA e OUTROS, Mathématiques Terminales CE, 1ᵉ e 2ᵉ - NATHAN, 1987

(18) SEBASTIÃO e SILVA, Transformações Geométricas, Ed. da Assoc. de Est.
da F.C.L.

(A) DEDRON, ITARD, Mathématiques et Mathematiciens - Magnard, Paris

(B) TOBIAS DANTZING, Número, a linguagem da Ciência, Ed. Aster

(C) DIRK J. STRUIK, História Concisa das Matemáticas, Ed. Gradiva

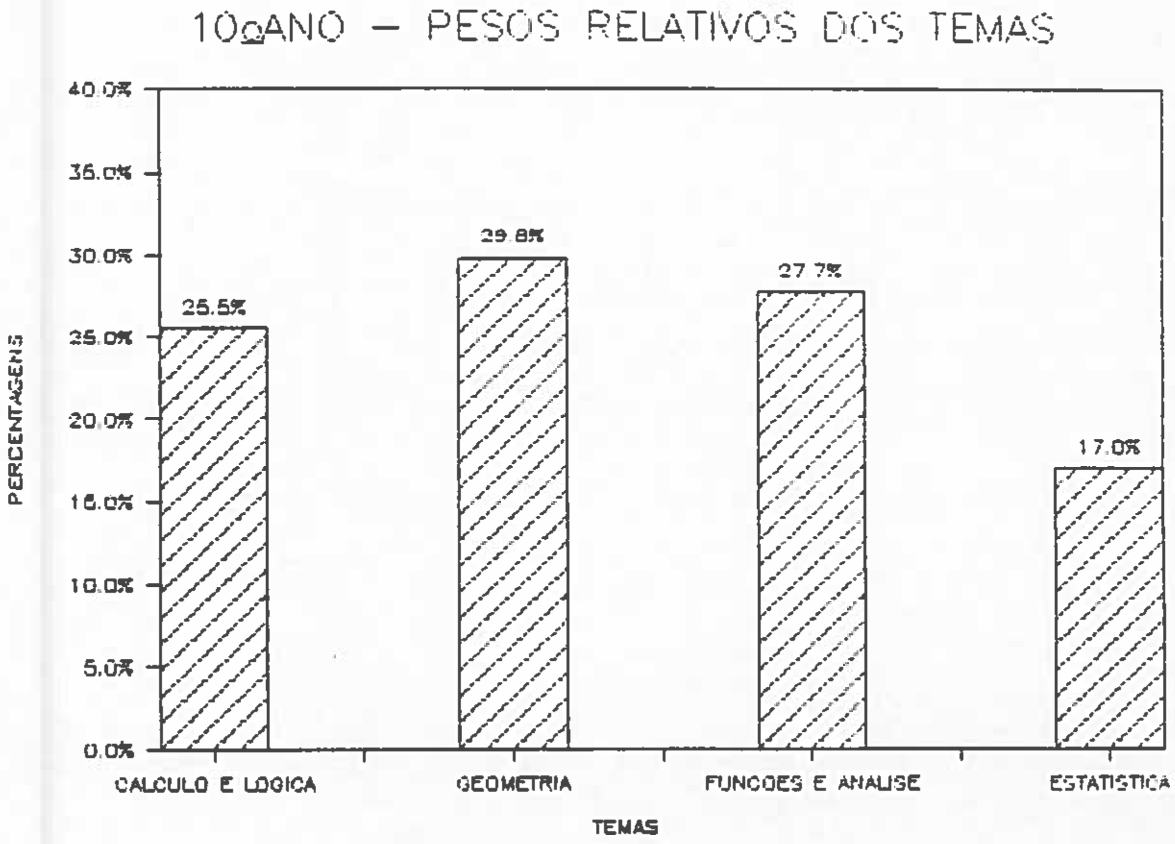
9. PROPOSTA DE PROGRAMA PARA O 10º ANO COM INDICAÇÕES METODOLÓGICAS E BIBLIOGRÁFICAS

9.1. *Pesos relativos dos temas*

9.2. *Discriminação de subtemas, objectivos e indicações metodológicas*

9.3. *Indicações bibliográficas*

9.1.



Percentages calculadas a partir do número de aulas previstas para cada unidade didáctica.

1. NOÇÕES BÁSICAS DE ESTATÍSTICA

A organização e representação de dados é retomada nesta unidade para aperfeiçoar a int[illegible]ição e comparação de distribuições estatísticas (ou de informações estatísticas diversas)

A propósito da nova forma de calcular o desvio padrão introduz-se o símbolo $\sum$ e algumas das suas propriedades.

Faz-se ainda uma abordagem intuitiva da correlação entre variáveis estatísticas.

Tal como no 3º ciclo, este tema continua a proporcionar uma excelente oportunidade para actividades interdisciplinares e para trabalhos de grupo.

Subtemas	Objectivos	Indicações Metodológicas
<u>Introdução</u> .Objecto da Estatística e breve nota histórica sobre a evolução desta Ciência; utilidade na vida moderna. .Estatística Descritiva e Estatística Indutiva. .Tipos de caracteres estatísticos. As noções de população e de amostra; Recenseamento e sondagem.	- Indicar situações da vida quotidiana ou das Ciências onde a Estatística presta relevantes serviços.	- A importância da Estatística deve ser exemplificada em situações diversas, tais como: .O estudo da distribuição dos diferentes grupos sanguíneos numa população é indispensável para a definição de reservas de sangue em hospitais e clínicas. .Para um fabricante de vestuário é fundamental conhecer estatísticas sobre as medidas da clientela à qual se destina a produção. Exemplos deste tipo servem também para explicar ao aluno as duas vertentes da Estatística: <u>Descritiva</u> que trata os dados correspondentes a factos ocorridos e <u>Indutiva</u> que extrai desses dados previsões e as respectivas probabilidades.
<u>Organização e interpretação de dados</u> .Tabelas de frequência. .Gráficos de uma distribuição.	- Construir tabelas de efectivos, de frequências relativas e de frequências acumuladas a partir de dados fornecidos. - Construir e interpretar gráficos de barras, poligonais, circulares e histogramas.	- Ao abordar os cuidados a ter na escolha de uma amostra é importante esclarecer o aluno que as técnicas de selecção de amostras representativas da população completa são objecto de estudos específicos que excedem o âmbito deste programa. - A revisão e ampliação de conhecimentos deve desenvolver-se em torno de actividades de organização e tratamento de dados, fornecidos em estado bruto ou já tabelados. - Os dados podem ser colhidos em livros, revistas, ou pedidos em instituições autárquicas, serviços públicos, etc.
<u>Medidas de tendência central</u> .Moda, média aritmética, mediana e quartis. .O símbolo $\sum$: propriedades homogénea e aditiva.	- Usar o símbolo $\sum$ nos cálculos e na demonstração de algumas propriedades.	- Os alunos da turma podem ser tomados como população para o estudo de diversas variáveis. Estas distribuições muito simples são úteis para exemplificar os cálculos a efectuar. São úteis no início, mas devem ser seguidas imediatamente do estudo de outras distribuições com maior significado social e cultural.

1. NOÇÕES BÁSICAS DE ESTATÍSTICAS (continuação)

		Indicações Metodológicas
- Medidas de dispersão .Diagramas "extremos e quartis"	- Concluir características de uma distribuição pela análise de um diagrama "extremos e quartis"	- Sugere-se o uso do símbolo $\sum$ na demonstração de proposições como: .A média do produto de uma constante por uma variável é igual ao produto da constante pela média da variável. .A média da soma de duas variáveis é igual à soma das médias das variáveis.
.Amplitude; variância e desvio padrão; fórmula para o cálculo abreviado.	- Interpretar uma distribuição recorrendo à análise conjunta das medidas de tendência central e de dispersão. - Calcular numa dada distribuição, o número e percentagem de indivíduos existentes no intervalo $]\bar{x}-\delta, \bar{x}+\delta[$ e em $]\bar{x}-2\delta, \bar{x}+2\delta[$.	- É importante comparar distribuições, para tirar conclusões acerca do papel dos diversos tipos de medida; a realização de dois gráficos no mesmo referencial pode facilitar certas análises. - No cálculo do desvio padrão aconselha-se a fórmula abreviada $\sigma=\sqrt{\frac{\sum f_k x_k^2}{N}-\bar{x}^2}$ que se deverá deduzir de $\sigma=\sqrt{\frac{\sum f_k (x_k-\bar{x})^2}{\sum f_k}}$ como exercício. - Ainda que os cálculos sejam feitos geralmente com a máquina, o aluno tem de conhecer e compreender as fórmulas que está a usar, para um melhor domínio dos conceitos. Nomeadamente no caso do desvio padrão deve saber usar uma disposição prática dos cálculos que clarifique a sequência das operações.
- Referência a distribuições bidimensionais (abordagem gráfica e intuitiva). .Diagrama de dispersão; dependência estatística; ideia intuitiva de correlação e de recta regressão.	- Identificar através do gráfico, em casos muito simples, correlação positiva, correlação negativa ou ausência de correlação.	- No caso do professor ter acesso a um computador da Escola, poderá exemplificar as potencialidades deste no tratamento de dados estatísticos e até promover a participação dos alunos em actividades estatísticas que interessem à Escola.
.Exemplos gráficos de correlação positiva, negativa e nula. Coeficiente de correlação e sua variação em $[-1,1]$.		

Nº de aulas previstas: 16

ANO

2. O CONJUNTO $\mathbb{R}$ - Noções de Lógica

- O aperfeiçoamento do estudo de $\mathbb{R}$, que será feito de forma intuitiva, constitui base indispensável para o estudo da Geometria Analítica, das Funções e da Análise Infinitesimal.
- A propósito deste tema estim[illegible] e a procura de informação, a consulta de obras de referência e a elaboração de sínteses.
- Ampliam-se e organizam-se con[illegible]mentos sobre condições e conjuntos à medida que se revelam úteis para clarificar o estudo a fazer.

Subtemas	Objectivos	Indicações Metodológicas
<u>Números irracionais</u>		
.Demonstração de que $\sqrt{2}$ não é racional; referência histórica à descoberta dos números irracionais; dízimas correspondentes.	- Investigar, individualmente ou em grupo, temas da História da Matemática referentes a números irracionais como $\sqrt{2}$, π, número de ouro,...	- A medida da diagonal de um quadrado de lado 1 pode servir de motivação ao estudo da irracionalidade de $\sqrt{2}$ e à referência histórica aos números irracionais. Outros irracionais como π e ϕ (número de ouro) que podem ser definidos geometricamente, constituem excelentes temas para fomentar a consulta de livros e a investigação individual ou em grupo.
.Extensão de $\mathbb{Q}$ a $\mathbb{R}$: conservação das regras de cálculo (informação); a recta real; os subconjuntos $\mathbb{R}^+$, $\mathbb{R}_0^+$, $\mathbb{R}^-$, $\mathbb{R}_0^-$.	- Operar com valores aproximados de números reais, usando a calculadora e a notação científica, quando oportuno.	- É importante rever a ordenação e a marcação de números reais num eixo, em especial $\pm\sqrt{2}$, $\pm\sqrt{3}$,.. e a distinção entre racionais e irracionais a partir da informação sobre as dízimas. - O aluno poderá ser estimulado a inventar dízimas cuja lei de formação garanta que traduzem números irracionais.
.Número de raízes. Radicais quadráticos e radicais cúbicos. Os símbolos $\sqrt{\ }$, $-\sqrt{\ }$, $\sqrt[3]{\ }$. Operações.	- Operar com radicais quadráticos (cúbicos) e racionalizar denominadores.	- A determinação do raio de uma bola conhecido o volume (por exemplo, por imersão em água), da aresta de um cubo que tenha um volume dado, são problemas que mostram a necessidade de usar números irracionais como medidas de grandezas. - A calculadora, apoio indispensável nesta unidade, pode, também, ser usada em actividades exploratórias como obtenção por aproximações sucessivas do valor de $\sqrt[3]{10}$, de $\sqrt[3]{2}$, de $\sqrt[5]{100}$,... antes da introdução das potências de expoente fraccionário.
.Potências de expoente fraccionário. Informação da conservação das regras do cálculo.	- Operar com potências de expoente fraccionário (base positiva).	- É conveniente mostrar aos alunos a não validade das regras operatórias com radicais de radicando negativo - A simplificação de expressões com radicais inclui, obviamente, a passagem de factores para dentro e para fora de radicais.
<u>Ordenação em $\mathbb{R}$</u>		
.Ordenação de números reais. Intervalos. .Operações com condições e operações com conjuntos: comutatividade e associatividade.	- Interpretar na recta real e em termos de intervalos, condições como: $0,5 < x \leq 2\sqrt{2}$, $\|x\| \geq 1 \vee x < -3$; $x \geq -2 \vee x > -1$; $x > 5 \wedge x \leq 0$; $x^2 < 0 \wedge x = \sqrt{3}$.	- As noções de lógica devem ser introduzidas e usadas quando consideradas oportunas para clarificar e organizar o pensamento e simplificar a expressão escrita. A tradução de condições em intervalos deve ser vista como um caso particular da correspondência entre a lógica de condições e a lógica de conjuntos.

Subtemas	Objectivos	Indicações Metodológicas
.Propriedades das relações $<, \leq, >, \geq$: transitividade e monotonias totais e parciais.	- Resolver inequações do tipo $\frac{1}{x} \gtrless \frac{1}{k}$ $x, k \in \mathbb{R}^+$.	- O aluno deve efectuar a conjunção e a disjunção de condições em universos numéricos, usando, nomeadamente, condições universais e condições impossíveis; analogamente, deverá efectuar intersecção e reunião de conjuntos, em especial com o universo e com o conjunto vazio; deve ser preparado para usar as propriedades das operações com condições e com conjuntos e para resolver sistemas de inequações recorrendo, também, às propriedades da ordem.
.Majorantes e minorantes de conjuntos: máximos e mínimos.	- Pesquizar, por análise directa, máximos e mínimos de conjuntos dos valores de uma expressão num intervalo dado.	- Para além da determinação de majorantes e de minorantes de conjuntos definidos por condições considera-se de interesse actividades como: .Procurar, usando a calculadora, o mínimo e o máximo dos valores de uma expressão, como por exemplo: $\|x-2\|-0{,}5$, para $-\sqrt{5} \leq x < 3$; $x+\frac{1}{x}$, com $x \in \mathbb{R}^+$. .Explorar a fórmula $(x+y)^2-(x-y)^2=4xy$ quando $x.y$ (ou $x+y$) é constante. Esta actividade envolve monotonia das operações e pode ser aplicada à resolução de problemas em que se pretende uma soma mínima ou um produto máximo.
- Valor absoluto ou módulo . Definição: $\|x\| = \begin{cases} x, & se\ x \geq 0 \\ -x, & se\ x < 0 \end{cases}$. Módulo do produto, do quadrado, do simétrico, do quociente, da soma (verificação com exemplos numéricos).		- O aluno deve verificar que esta definição de módulo de um número pode ser interpretada num eixo, como sendo a distância à origem.
.Reconhecimento das propriedades: $\|x\| < \delta \iff -\delta < x < \delta$ e $\|x\| > \delta \iff x < -\delta \vee x > \delta$, $\forall_{\delta \in \mathbb{R}^+}$ .As equivalências: $x^2 = a^2 \iff \|x\| = \|a\|$ $x^2 \gtrless a^2 \iff \|x\| \gtrless \|a\|$. .Implicação formal e inclusão: transitividade. Lei da conversão.	- Resolver equações e inequações simples em que se apliquem as propriedades da ordem e do valor absoluto.	- As propriedades relativas a $\|x\|<\delta$ e $\|x\|>\delta$, embora válidas para qualquer δ, só interessam, neste programa, para $\delta > 0$, tendo em vista o estudo de vizinhanças e posteriores aplicações à Análise Infinitesimal. Assim, as inequações a resolver, com fundamento nestas propriedades, deverão conter apenas um módulo e a variável não deve figurar fora do sinal de módulo.
.Noção de teorema: hipótese, tese e demonstração. .Silogismos: modus ponens, modus tollens. Silogismos transitivos e disjuntivos.	- Demonstrar as propriedades da distância identificando a hipótese e a tese.	- É importante que o aluno verifique e saiba que não há equivalência entre condições como $x^2=a^2$ e $x=a$, $x^2<a^2$ e $x<a$, $x^2>a^2$ e $x>a$ e que indique os casos em que há implicação. - O valor absoluto permite definir uma distância d sobre $\mathbb{R}$: $d(x,y)=\|x-y\|$: As demonstrações das propriedades características devem ser pedidas aos alunos e dão oportunidade para usar alguns silogismos.
- Distância entre dois pontos .Definição. Propriedades. .Vizinhança δ de um ponto a, $V_\delta(a) = \{ x \in \mathbb{R}: \|x-a\| < \delta \}$	- Exprimir uma vizinhança em termos de distância, de módulo, de intervalo e de valores aproximados de a a menos de δ.	

Nº de aulas previstas: 24

3. GEOMETRIA ANALÍTICA - 1. Introdução ao método cartesiano

Propõe-se uma primeira abordagem ao método cartesiano; o estudo de $\mathbb{R}$ e da recta real permite agora uma clarificação da correspondência entre o plano e $\mathbb{R}^2$ e entre o espaço e $\mathbb{R}^3$.

Visando consolidar a compreensão do espaço começa-se por rever e ampliar conhecimentos de Geometria, relativos ao espaço tridimensional, indispensáveis ao estudo da Geometria Analítica.

...btemas	Objectivos	Indicações Metodológicas
<u>...mpliação de conhecimentos de Geometria no espaço</u>: .Referência a noções primitivas e noções derivadas, axiomas e teoremas.	- Indentificar a posição de rectas e planos no espaço. - Usar os critérios de parelelismo e de perpendicularidade de rectas e planos na justificação de propriedades e na resolução de problemas.	- Esta introdução relativa à Geometria no Espaço, a qual não deverá ser demorada, amplia conhecimentos do 9º ano e permite uma visão mais clara do espaço, indispensável ao estudo da Geometria Analítica, ao mesmo tempo que proporciona ao aluno algumas ideias sobre a construção hipotético-dedutiva duma ciência. No entanto, a compreensão dos axiomas e a demonstração dos teoremas propostos deve apoiar-se no uso de modelos que facilitem a visualização de várias situações. É importante que o aluno compreenda, à luz destes conhecimentos, factos da vida corrente (uso do fio do prumo, do nível de bolha de ar, diversos tipos de esquadros,... a estabilidade de um banco de 3 pés,...)
Os axiomas: -Dois pontos definem uma recta: -Três pontos não colineares definem um plano; -Recta com dois pontos num plano está contida no plano. -A intersecção de dois planos concorrentes é uma recta. -O axioma de Euclides.		- Por "critérios" entende-se "condições suficientes" para garantir paralelismo ou perpendicularidade. - As demonstrações pedidas recorrem ao método de redução ao absurdo, e sugere-se que, pelo menos uma delas, seja proposta como trabalho de grupo.
Modos de definir um plano Critérios de paralelismo de recta e plano e de planos (com demonstração)		- A título de actividade deverá fazer-se a análise da posição de arestas e de faces dum paralelépipedo rectângulo. - A marcação de pontos num referencial cartesiano no plano é já conhecida: pretende-se, agora, aperfeiçoar a capacidade de usar o referencial cartesiano na determinação de pontos e de conjuntos obedecendo a condições que, sendo elementares, são todavia pré-requisitos para o estudo da recta e doutros conjuntos, a fazer nas diversas abordagens previstas nos três anos deste curso.

3. GEOMETRIA ANALÍTICA - I (continuação)

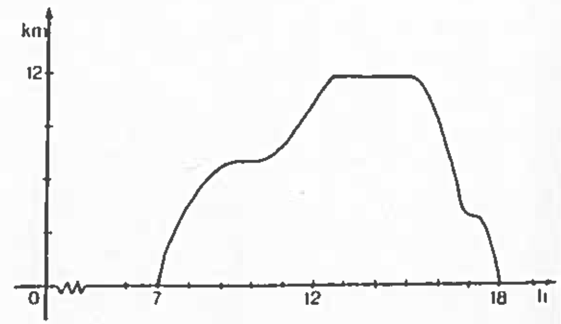
Subtemas	Objectivos	Indicações Metodológicas
. Critérios de perpendicularidade de recta a plano e de planos.	- Usar raciocínios por redução ao absurdo e, em especial, na demonstração dos teoremas: "Planos paralelos são cortados por outro segundo rectas paralelas". "Dois planos perpendiculares a uma recta são paralelos entre si".	- Sugere-se a reali[illegible]de um trabalho de grupo relativo a Descartes, se possível em colaboração com a disci[illegible] de Filosofia. - Sugere-se que, de início, as condições sejam expressas por palavras. Exemplos: . Qual o conjunto dos pontos do plano de abcissa igual a 3; de ordenada maior que - 2; com abcissa simétrica da ordenada?
. Referência à Geometria Euclideana como construção hipotético-dedutiva. Alusão à arbitrariedade na escolha das noções primitivas e dos axiomas; referência à existência de Geometrias não euclideanas.	- Calcular, no plano e no espaço: • as coordenadas do simétrico de um ponto em relação a um eixo coordenado. • as coordenadas do ponto médio de um segmento dado. • a distância entre dois pontos dados pelas coordenadas.	- Seguir-se-ia a interpretação de condições simples expressas nas variáveis x e y. Exemplos: $x=5$, $y \geq 1$, $y=-x$ - É, agora, oportuno interpretar geometricamente a conjução e a disjunção de condições como as anteriores, por exemplo, $x>3 \wedge y \geq 1$, $\|x\| \geq 2$, ...
— O método cartesiano para estudar Geometria no plano e no espaço: · Referência a Descartes; · Referenciais cartesianos ortogonais e monométricos do plano; correspondência entre o plano e $\mathbb{R}^2$; conjuntos de pontos e condições. . Distância entre dois pontos: circunferência, círculo e medeatriz.	- Identificar conjuntos de pontos do plano (do espaço) definidos por condições simples. - Identificar condições que definem c[illegible]ntos de pontos do plano, em casos simples (nomeadamente rectas paralelas aos eixos, circunferência, círculo, mediatriz e rectas tangentes a uma circunferência paralelas aos eixos). - Determinar o centro e o raio de uma circunferência de equação dada (coeficientes numéricos).	- No estudo da circunferência o aluno deverá ser capaz de transformar uma equação, como $x^2-6x+y^2=3$ em $(x-3)^2+y^2=12$, para identificar, então, o centro e o raio. - Uma vez que o estudo da recta será feito em unidades subsequentes, a obtenção da equação da mediatriz tem como objectivos aplicar a noção de distância e associar a equação à recta. - A apresentação dos referenciais ortogonais no espaço far-se-á com recurso a modelos e a desenhos em perspectiva, recorrendo de preferência ao 1º - octante. - Para obter a correspondência Espaço $\Longleftrightarrow$ $\mathbb{R}^3$ pode ser mais fácil começar por escolher três coordenadas e obter a partir delas o ponto correspondente (como vértice de um paralelípipedo) - É importante aproveitar as analogias mas também salientar as diferenças no tratamento analítico do plano e do espaço. Por exemplo propor a interpretação de condições como $x=4$ sucessivamente na recta, no plano e no espaço.
- Referenciais cartesianos ortogonais e monométricos do espaço; correspondência entre o espaço e $\mathbb{R}^3$; conjuntos de pontos e condições. - Distância entre dois pontos; superfície esférica, esfera e plano mediador.	- Identificar condições que definem conjuntos de pontos do espaço, em casos muito simples (planos paralelos aos planos coordenados, superfície esférica, esfera, plano mediador).	

Nº de aulas previstas: 16

4. FUNÇÕES - 1. Generalidades. Função quadrática

Esta unidade, além de retomar e ampliar conhecimentos do 3º ciclo sobre funções, estuda o comportamento de funções reais com base em gráficos cartesianos (referenciais ortogonais), privilegiando o estudo de funções que relacionem variáveis da vida corrente, da Geometria e de outras disciplinas.

Faz-se o estudo do sinal da função quadrática e resolvem-se inequações do 2º grau.

Subtemas	Objectivos	Indicações Metodológicas
- Noções gerais		
- <u>Gráfico cartesiano de uma função; interpretação e esboço.</u> - Análise de fórmulas simples de Geometria e doutras disciplinas para identificação de funções de uma variável.	- Construir o gráfico de uma função dada por uma tabela. - Esboçar o gráfico de uma função dada por uma fórmula da Geometria ou doutras disciplinas, com recurso à calculadora.	- A construção de gráficos por pontos fornece uma 1ª visão que será aperfeiçoada ao longo dos três anos. As variáveis a relacionar devem ter significado concreto e ser representadas pelas letras mais sugestivas para essas grandezas. - Exemplo de um gráfico que se pode mandar construir ponto por ponto: Uma população bacteriana aumenta 50% de hora a hora. Em certo instante ($t=0$) há 900 bactérias por ml ($n=900$). Representar a função de t, desde $t=-3$ até $t=5$ (h)
- Noções gerais relativas a funções de uma variável. Definição analítica de função crescente (decrescente) de máximo (mínimo) e de função injectiva.	- Interpretar gráficos dados ou construídos quanto a domínio, contradomínio, zeros, sinal, monotonias, extremos, taxa de variação média num dado intervalo, injectividade e, ainda, aspectos relacionados com o fenómeno descrito pela função. - Determinar com o auxílio do gráfico e da calculadora o comportamento da função na vizinhança de pontos especiais do domínio e para valores muito grandes ou muito pequenos da variável independente. - Resolver problemas envolvendo a expressão de uma variável em função doutra, ou recorrendo a um gráfico.	- A interpretação de gráficos dados ou fornecidos por um computador começará pela identificação das variáveis e do significado das divisões dos eixos e incluirá a pesquiza de domínio, contradomínio, zeros, sinal, monotonias, extremos, taxa de variação média num dado intervalo, mas estes conceitos serão apresentados de forma progressiva e melhorados de exemplo para exemplo. Só próximo do final da unidade será oportuna a sua definição analítica. - Um exemplo de um gráfico dado, para interpretação: Um grupo de amigos parte às 7h. para uma excursão ao pico de um monte a 12 km.  A interpretação do gráfico correspondente a esta situação incidirá sobre as variáveis, o significado das divisões dos eixos, paragens, tempos de subida e de descida, velocidades médias em várias etapas,...

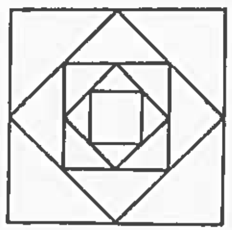
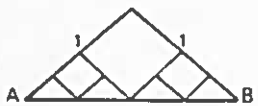
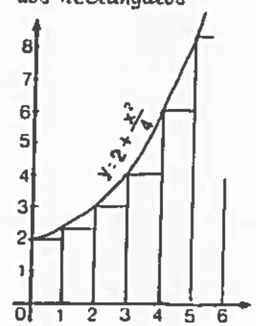
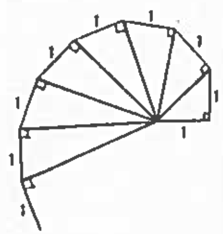
4. FUNÇÕES - I (continuação)

Subtemas	Objectivos	Indicações Metodológicas
		- Os gráficos a estudar a partir de fórmulas devem ser constituídos, de preferência, por partes de recta, de parábolas, de hipérboles, de parábola cúbica. Exemplos: $v=2{,}5t$ (velocidade; recta), $e=5t^2$ (espaço; parábola), $V=\frac{2y}{P}$ (volume de gás; hipérbole), $V=\frac{4}{3}\pi R^3$ (volume, parábola cúbica), $T=2\sqrt{\ell}$ (período de oscilação; parábola).
- <u>Funções quadráticas</u> . Estudo dos casos: $x \to ax^2$; $x \to ax^2+c$, $x \to a(x+h)^2$; $x \to ax^2+bx+c$. Gráficos, zeros e sinal. . Inequações do 2º grau.	- Resolver inequações do 2º grau e com um ou dois módulos redutíveis a inequações do 2º grau ou à conjunção/disjunção de duas inequações do 2º grau.	- Os problemas a resolver poderão ser associados à construção e interpretação de um gráfico. Exemplos: . Dispõe-se de 40 m de rede para vedar um terreno rectangular à beira de um rio (só três lados). Exprimir a área vedada em função de um dos lados, representar e interpretar o gráfico da função (domínio, contradomínio, zeros, monotonia, não injectividade, dimensões do rectângulo de área máxima).
- Primeiras leis de De Morgan; quantificadores.	- Usar as 1ªs leis de De Morgan e os quantificadores, quando necessário. - Representar funções definidas por troços e envolvendo polinómios de grau não superior a dois.	. A tensão nos terminais de um motor é de 180 V. Determinar a intensidade I (Ampères) da corrente que atravessa o motor, em função da resistência R (ohm) do motor, sabendo que se aplica a lei $V=RI$. Representação gráfica, usando calculadora ou computador, e verificação do comportamento de I. - Sugere-se a ideia de dar ao aluno uma noção experimental de limite, com o auxílio da calculadora. - No estudo de $x \to ax^2$ aceita-se que o gráfico é uma parábola e que nos restantes casos a imagem se obtém desta por uma isometria, razão porque continua a ser parábola. O uso do computador poderá ilustrar bem a forma da parábola e as suas translações. - Exemplos de dificuldade a não exceder na resolução de inequações: $\|x-1\|\cdot\|2x+3\| < 2$; $x^2\|x^2-1\| \geq 3x^2$ $\|2x-1\| > \|3+x\|$ ou $\|x^2-3\| \leq \|1-x^2\|$ → (quadrando os dois membros) - Tratar, à luz das 1ªs leis de De Morgan, a negação das condições $a < x < b$ e $x = \pm a$ - Dificuldade a não exceder nas funções definidas por troços: $x \to \|x-a\|$ $x \to \|x-3\|+1$ $f(x)=\begin{cases} 4, & \text{se } x>0 \\ x^2-5x, & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$

Nº de aulas previstas: 16

5. SUCESSÕES - 1. Método de indução

- Alguns dos conceitos estudados em FUNÇÕES I são agora aplicados ao caso particular do domínio $\mathbb{N}$, introduzindo-se, a propósito, a terminologia específica para sucessões. Exemplos simples, mas diversificados, com definição numérica ou geométrica, deverão ser estudados.
- As propriedades das progressões e de outras sucessões definidas por recorrência justificam a aprendizagem do método de indução matemática.

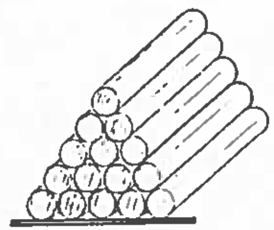
Subtemas	Objectivos	Indicações Metodológica
- <u>Funções de domínio $\mathbb{N}$: generalidades, gráficos.</u> • Sucessões monótonas e sucessões limitadas. • Sucessões definidas por recorrência. • O método de indução matemática. • Progressões aritméticas e progressões geométricas.	- Calcular termos e ordens de termos obedecendo a condições dadas e encontrar um termo geral simples. - Construir e interpretar gráficos de sucessões. - Identificar sucessões monótonas, sucessões majoradas e sucessões minoradas. - Aplicar o método de indução matemática ao estudo de sucessões, nomeadamente, às definidas por recorrência. - Determinar a razão, o termo geral e a soma de n termos consecutivos de uma progressão. - Identificar em situações problemáticas concretas, sucessões que permitam resolvê-las.	- As sucessões aparecem como casos particulares de funções, quando o domínio é $\mathbb{N}$. Também neste caso a representação gráfica pode apoiar a aprendizagem da terminologia específica, o estudo da monotonia e a pesquiza de majorantes ou de minorantes. Além de sucessões de definição aritmética (números pares, ímpares, primos, inversos, quadrados, triangulares,...) devem ser estudadas sucessões simples definidas geometricamente, por exemplo: Sucessão das áreas dos quadrados  Sucessão dos perímetros das linhas poligonais com extremos em A e B  Sucessão das áreas dos rectângulos  Sucessão das hipotenusas ...  - Em casos fáceis poderá pedir-se a descoberta de um termo geral a partir dos primeiros termos.

Subtemas	Objectivos	Indicações Metodológicas

- A calculadora, para além de auxiliar na construção dos gráficos permite "visualizar" a evolução dos termos para valores grandes de n; por exemplo, permite prever a estabilização da soma de n termos de uma progressão geométrica de razão $\frac{1}{2}$ e $u_1=10$, quando n aumenta. O recurso a um computador poderá explicitar as características de uma sucessão de forma ainda mais sugestiva.
- As progressões devem ser construidas a partir do 1º termo (recorrência) antes da dedução do termo geral e devem aplicar-se na resolução de situações problemáticas concretas.

Exemplos:

1. Quantos troncos se podem empilhar como a figura indica colocando 25 na base?



2. Um elemento radioactivo perde 3% da sua massa em cada 100 anos, por desintegração.
   A quanto se reduzirão 2 Kg. desse elemento ao fim de 500 anos?

- O método de indução matemática será especialmente usado para provar monotonia, majoração e minoração de uma sucessão e propriedades das progressões.

Exemplos. Provar que:

a) 2 é minorante da sucessão $\begin{cases} u_1=5 \\ u_{n+1}=\sqrt{2+u_n} \end{cases}$

b) A sucessão $\begin{cases} u_1=3 \\ u_{n+1}=2-\dfrac{1}{u_n} \end{cases}$ tem os termos maiores que 1 e é monótona.

c) O termo geral de uma progressão geométrica é $u_n=u_1 . r^{n-1}$

d) $\sum_{k=1}^{n} (2k-1)=n^2$

e) $\sum_{j=1}^{n} 3^j = \frac{3}{2}(3^n-1)$

Todavia, poderá exemplificar-se o método noutras situações. Por exemplo:

Provar que: a) $(a.^n b^n) = (a.b)^n$ b) $2^{2n}-1$ é múltiplo de 3.

(Nota: não exceder a dificuldade dos exemplos apresentados)

Nº de aulas previstas: 10

6. GEOMETRIA ANALÍTICA - II. Vectores e Rectas. Paralelismo

- O estudo da recta tem especial interesse na Análise Infinitesimal para a determinação d[illegible]ntes, normais e secantes a uma curva.
Este estudo terá apoio vectorial, que será reduzido ao indispensáve', para permitir che[illegible]ctamente às equações da recta, no plano e no espaço. Pela facilidade com que se estendem ao espaço os conceitos relativos a vectores, propõe-se fazer essa extensão logo após o estudo de vectores no plano.

Subtemas	Objectivos	Indicações Metodológicas
- <u>Vector livre do plano:</u> O conjunto V : adição, multiplicação por um número real; propriedades. . Projecção de um vector sobre um eixo: Componentes e coordenadas num referencial ortonormado; correspondência entre V e R^2. . Norma, versor, soma de um ponto com um vector, diferença de dois pontos. Paralelismo de vectores em referencial o.n. no plano.	- Determinar a expressão nas coordenadas, da norma, do versor, do produto por um número real, da soma de vectores, da soma de um ponto com um vector e da diferença de dois pontos. no plano e no espaço. - Resolver situações que envolvem paralelismo de vectores e colinearidade de 3 pontos expressos nas coordenadas.	- As operações com vectores e respectivas propriedades serão apresentadas sem formalismo e terão apenas o desenvolvimento indispensável ao estudo no referencial o.n. - Convém usar as notações (v_1 , v_2) ou $\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$ com vista a usos posteriores.
- <u>Vector livre do espaço</u> . Extensão da adição e da multiplicação por um número real ao espaço e permanência das propriedades. . Referencial ortonormado no espaço; correspondência entre V e R^3. . Norma, versor, soma de um ponto com um vector, diferença de dois pontos. Paralelismo de vectores em referencial o.n. no espaço. . Equações vectoriais da recta, no plano e no espaço.	- Determinar equações vectoriaisde rectas no plano e no espaço.	- Embora seja aconselhável fazer o estudo da equação da recta a partir da via vectorial o aluno deverá, também ser solicitado a escrever directamente equações cartesianas de rectas dadas. Será agora oportuno que o aluno reconheça que a equação obtida anteriormente para mediatriz de um segmento corresponde à equação de uma recta. Sendo (v_1 , v_2) qualquer vector director da recta, o declive será dado por $\frac{v_2}{v_1}$ $(v_1 \neq 0)$ e relacionado intuitivamente com o ângulo α que a recta faz com OX, pelo que se chama também "coeficiente angular". No 11º ano será definido como $tg\,\alpha$.

Subtemas	Objectivos	Indicações Metodológicas
- Estudo da recta no plano: . Equações vectoriais em referencial o.n., paramétricas e cartesianas. . Paralelismo. . Intersecção.		- As equações cartesianas a estudar são da forma $y=mx+p$, $ax+by+c=0$, $\frac{x-x_0}{p}=\frac{y-y_0}{q}$ e $y-y_0=m(x-x_0)$. - Interpretar a família de fórmulas $y=ax+b$, quando a ou b é constante. - Resolver problemas no plano envolvendo equações de rectas definidas por dois pontos e por um ponto e uma direcção em referencial o.n.
- O método de redução para a resolução de sistemas de duas equações com duas incógnitas; interpretação gráfica.	- Resolver sistemas de duas equações com duas incógnitas pelo método de redução. - Determinar a intersecção de duas rectas e de uma recta com uma circunferência. - Determinar regiões do plano definidas por equações ou inequações simples. - Usar o método cartesiano para resolver problemas simples de geometria plana, mediante escolha de um referencial.	- Se o professor considerar oportuno poderá aproveitar a intersecção de uma recta com uma circunferência para referir a propriedade distributiva da conjunção em relação à disjunção. - Os problemas a resolver por escolha de referencial e uso do método cartesiano são da ordem de dificuldade de: Mostrar que: . Segmento de recta dado pelos pontos médios de dois lados de um triângulo é paralelo ao 3º lado e mede metade deste. . Determinar a medida do 3º lado de um triângulo em que dois lados medem 1 e formam entre si um ângulo de 135º (ou de 45º).

Nº de aulas previstas: 12

9.3. CONSULTAS BIBLIOGRÁFICAS ACONSELHADAS PARA CADA UNIDADE

À frente de cada título estão indicados os números que se referem às obras que constam da Bibliografia Geral, pag. 27

10º ANO

.*Estatística*	(1), (14), (15)
.*O Conjunto* ℝ	(1), (7), (2), (8), (11),(B)
.*Geometria Analítica I e II*	(1), (2), (3),(C),(A)
.*Funções I*	(6), (1), (2), (3)
.*Sucessões I*	(4), (1), (17)

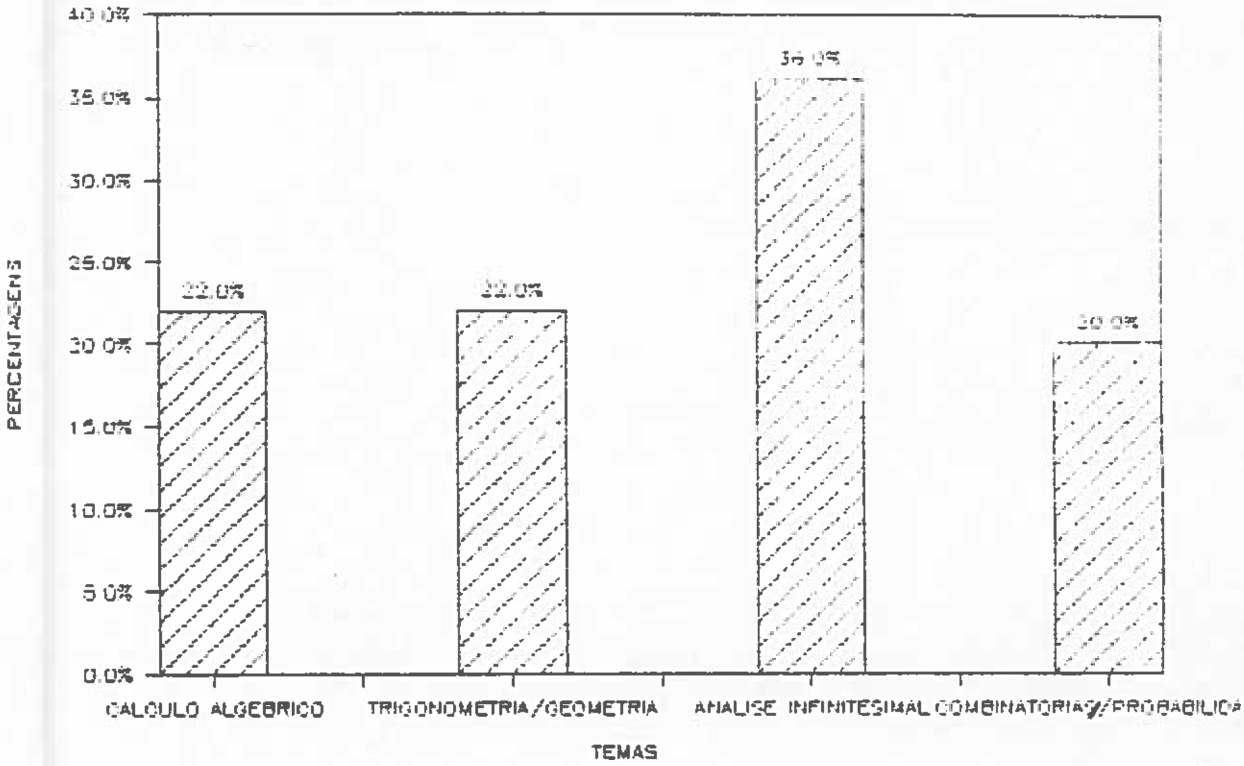
10. PROPOSTA DE PROGRAMA PARA O 11º ANO COM INDICAÇÕES METODOLÓGICAS E BIBLIOGRÁFICAS

10.1. Pesos relativos dos temas

10.2. Descriminação de subtemas, objectivos e indicações metodológicas

10.3. Indicações bibliográficas

11ºANO — PESOS RELATIVOS DOS TEMAS

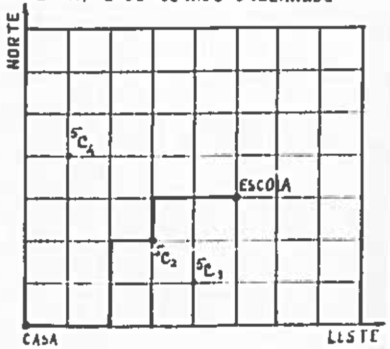


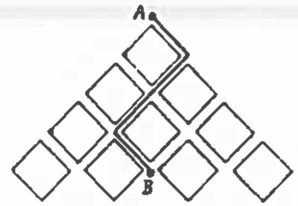
1. Combinatória

Esta unidade visa desenvolver no aluno estratégias de organização d· pensamento qu· ·litem a contagem dos elementos de diversos conjuntos. Nela se desenvolvem técnicas e capacidades de grande utilidade n· estudo das probabilidades.

Pelas actividades que permite desenvolver, ligadas a problemas concretos e a jogos, desperta o interesse, sem exigir pré-requisitos especiais, pelo que pode motivar a totalidade dos alunos.

Subtemas	Objectivos	Indicações Metodológicas
- Técnicas de contagem · Cardinal da reunião de conjuntos · Cardinal do produto cartesiano . Arranjos com e sem repetição. . Permutações. O símbolo $n!$. . Combinações sem repetição.	- Resolver problemas de contagem escolhendo uma estratégia adequada à situação. - Usar diagramas (em árvore ou outros) nos raciocínios.	- Para uma sólida aquisição e compreensão de estratégias de contagem deve começar-se por uma fase de experiências com material de uso corrente ou de jogos, ou usando símbolos e diagramas. De início o aluno deve ser incentivado a contar os elementos um a um, organizadamente, até encontrar uma estratégia simplificadora; também pode começar por resolver um problema análogo com menos elementos: se forem só 3, só 4,... Numa fase posterior o aluno conhecerá critérios para identificar o tipo de problemas (há repetição ou não, interessa a ordem ou não,...) e fórmulas para as contagens elementares; mas, mais do que as "receitas" interessa a aquisição de métodos de pensar através da resolução de problemas.
- O triângulo de Pascal.	- Demonstrar as propriedades: $^nC_p = {}^nC_{n-p}$, $^nC_p + {}^nC_{p+1} = {}^{n+1}C_{p+1}$	- São de efectuar desde já, algumas contagens que se referem a agrupamentos que serão usados no cálculo de probabilidades (número de casos possíveis, número de casos favoráveis,...)
- A fórmula do binómio de Newton	- Simplificar expressões em que figuram factoriais ou potências de binómios. - Usar o desenvolvimento do binómio de Newton na demonstração de propriedades simples.	- A propósito do produto cartesiano lembrar que já conhecem da Geometria Analítica os pares ordenados (x,y), elementos de $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$ (quadrado cartesiano de $\mathbb{R}$) e os ternos ordenados $(x,y,z) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^3$ (cubo cartesiano de $\mathbb{R}$). - O triângulo de Pascal, ou de Tartaglia, pode ser relacionado com actividades interessantes como a contagem de "trajectórias úteis" sobre um quadriculado (Norte, Leste). Exemplo: Para chegar à escola há $^8C_3$ trajectórias úteis (3 troços Norte, num total de 8); as propriedades das combinações podem "ver-se" aqui facilmente.



Subtemas	Objectivos	Indicações Metodológicas
		Analogamente, no aparelho de Galton (direita/esquerda): para passar de A a B, há ${}^4C_2$ trajectos (2 "direita" em 4 total).  Ou ainda com outras actividades preparatórias do cálculo de probabilidades: de quantos modos diferentes se podem obter 2 "caras" lançando 4 vezes uma moeda? e 3 caras? e 4 caras? e 0 caras? o mesmo estudo para 5 lançamentos, etc. - A fórmula do binómio serve para fazer o desenvolvimento de potências e, para tal, deve ser usada. Aproveitando esse desenvolvimento, ou alguns dos seus termos, podem-se estabelecer relações úteis, como por exemplo: . se $x > 0$, então $(1+x)^n \geq 1+nx$; . $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n > 2,3$ para $n \geq 3$; . se $\sqrt[n]{a} > 1$ vem $a > 1$. - Podem propor-se ainda exercícios, como: . Calcular os três primeiros termos do desenvolvimento de $(x+0,2)^5$. . Simplificar: $\sum_{k=0}^{n} {}^nC_k$, $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}$ ou $\sum_{k=0}^{n} {}^nC_k \cdot 2^k$ $(= (1+2)^n)$ - Convem fazer uma referência histórica sobre o desenvolvimento da análise combinatória e sobre o triângulo de Pascal ou de Tartaglia.

2. PROBABILIDADES - I

Para entender muitas das informações que recebemos, nomeadamente nos campos económico, social, político, desportivo, há que conhecer a linguagem das probabilidades.

Esta unidade retoma e [illegible] feiçoa a terminologia (aleatório, acontecimento, equiprovável, possível, impossível...) e o cálculo de probabilidades pela lei de Laplace; faz [illegible] da, a proximação entre o conceito de probabilidade e o de frequência relativa quando o número de experiências é muito elevado.

Subtemas	Objectivos	Indicações Metodológicas
Referência à origem, evolução, conteúdo e importância do Cálculo das Probabilidades.		- Poderá propor-se um trabalho de pesquisa bibliográfica sobre Pascal (séc. XVII), ou sobre Laplace (séc. XIX). - Tem interesse referir a origem da palavra "aleatório" (de alea - dado, sorte, azar).
Experiência aleatória; acontecimento: elementar, não elementar, certo, impossível, contrário, incompatível com outro. Reunião de acontecimentos.	- Calcular probabilidades pela lei de Laplace. - Calcular probabilidades de acontecimentos não equiprováveis conhecendo relações entre essas probabilidades.	- Realizar experiências aleatórias de resultados não equiprováveis nem previsíveis como: lançamentos de punaises  ; de um fósforo numa caixa para ver se corta, ou não, certa diagonal  . Cada aluno pode fazer a experiência 20 vezes e anotar os resultados, o que dará cerca de 600 provas na turma. A frequência relativa de cada acontecimento será tomada como valor aproximado da sua probabilidade nas condições da experiência.
Lei dos grandes números ; conceito frequencista de probabilidade.	- Provar que $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$ e que $P(A_j) = \frac{1}{n}$ se A_j é um dos n acontecimentos elementares equiprováveis.	Qualquer microcomputador pode simular experiências deste tipo (recorrendo a um gerador de números pseudo-aleatórios), com a vantagem de poder obter um número de provas muito elevado e a contagem automática dos resultados.
Reconhecimento de que $0 \leq P(A) \leq 1$ (sendo 1 para o acontecimento certo e 0 para o acontecimento impossível) e de que $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$ se $A \cap B = \emptyset$.	- Realizar experiências, anotar resultados e tirar conclusões.	- O conceito de "acontecimentos independentes" não é do programa, o que não impede que se proponham problemas do tipo: "Em dois lançamentos de um dado perfeito, qual a probabilidade de obter número par no 1º e número ímpar no 2º lançamento?". - Os casos favoráveis e os casos possíveis podem-se contar recorrendo aos conhecimentos de Combinatória. Tal como se disse é vantajoso estimular o uso de esquemas ou diagramas para essas contagens.

3. FUNÇÕES II - Funções Racionais. Operações.

Com o estudo de novas funções polinomiais e depois, mais geralmente, de funções racionais, ampliam-se os conhecimentos do 10º ano relativos a funções.

É apenas sobre este tipo de funções (racionais) que incidirá o estudo de limites, derivadas e primitivas a fazer no 11º ano.

As operações com funções são abordadas nesta unidade; a propósito da inversão aparecem funções com radicais, as quais serão objecto de um estudo muito breve.

Subtema	Objectivos	Indicações Metodológicas
Polinómios. .Divisão inteira. .Resto da divisão por $x-\alpha$.	- Decompor polinómios em factores recorrendo, quando oportuno, à regra de Ruffini.	- Ao estudar o resto da divisão de $p(x)$ por $x-\alpha$, dar relevo à decomposição em factores quando o resto é zero. - Como exercício de aplicação da regra de Ruffini pode propor-se a obtenção das igualdades: $x^3-a^3 = (x-a)(x^2+ax+a^2)$ $\quad x^3+a^3 = (x+a)(x^2-ax+a^2)$
Equações e inequações inteiras de grau superior a 2.	- Resolver equações e inequações inteiras de grau superior a 2.	- Consideram-se equações/inequações de grau superior a 2 apenas nos casos em que é fácil decompô-las noutras do 1º ou do 2º grau (fornecendo, se necessário uma das raízes) ou em que a equação toma a forma $ax^4+bx^2+c = 0$ (equação biquadrada).
Funções polinomiais	- Analisar gráficos de funções polinomiais de grau 3 e 4, quanto a domínio, paridade, zeros, sinal, monotonia, extremos e taxa de variação média em certos intervalos.	- Ao decompor polinómios em factores dar a noção de raiz dupla ou tripla. - Uma actividade interessante poderá ser a programação e o uso da regra de Ruffini, num computador. - Os gráficos a analisar, de funções polinomiais ou fraccionárias, podem ser apresentados em ficha de trabalho e incluir questões como: a) recorrendo ao gráfico, à expressão analítica e à sua calculadora procura valores aproximados dos zeros. b) determine a taxa de variação média da função no intervalo $[-2,3]$.
Fracções algébricas: domínio, equivalência, operações.	- Operar com fracções algébricas.	
Equações e inequações fraccionárias.	- Resolver equações e inequações fraccionárias com termos de grau ≤ 2.	Quanto ao esboço de gráficos de funções racionais ponto por ponto deve ser auxiliado pela determinação do domínio, assímptotas verticais, zeros, sinal e recorrendo à calculadora programável.
Funções racionais: domínio, gráficos.	- Esboçar e analisar gráficos de funções fraccionárias com termos de grau menor ou igual a 2, quanto a monotonia, extremos, domínio, paridade, zeros, taxa de variação média; exemplos de assímptotas verticais.	- Algumas das funções a analisar na aula ou em casa, podem estar ligados à Geometria ou à Física. Exemplo: Um gerador de força electromotriz E e de resistência interna r, está ligado a um reóstato de resistência R, variável: a potência aplicada ao reóstato é dada por $P = \frac{RE^2}{(R+r)^2}$. Esboce e analise o gráfico da função $P(R)$ para $E=60V$ e $r=5\Omega$. Use um referen

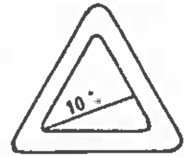
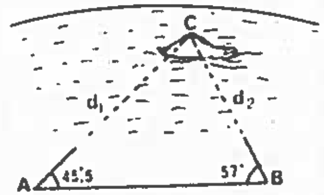
Subtemas	Objectivos	Indicações Metodológicas
- Operações com funções; composição de funções. Restrição de uma função. - Inversão de funções; domínio de uma função com radicais quadráticos/cúbicos.	- Caracterizar a função inversa de uma dada função racional injectiva.	cial dimétrico e calculadora programável; verifique que a máxima potência é de 180 watts. Outras sugestões: - Num esquentador de potência P, a temperatura de saída da água é dada por $t = t_0 + \frac{2,1}{Q}$ (t_0 - temperatura da água à entrada; Q - débito em Kg/s) Estudar a função $t(Q)$ para $t_0 = 10º$. - Exprimir o volume dum cone, de altura igual ao diâmetro da base, em função desse diâmetro e estudar a função obtida (pode tomar $\frac{\pi}{3} = 1$) - É útil retomar algumas das funções estudadas aqui, depois do estudo das derivadas para que o aluno compare e avalie a eficácia do contributo da Análise para o traçado de gráficos. - É importante levar os alunos a reflectir no deslocamento do gráfico de $x \rightarrow f(x)$ quando se passa a $f(x)+k$ ou a $f(x+k)$ (comparar com o estudo da parábola feito no 10º ano). - A equivalência e as operações com fracções algébricas serão tratadas tendo em conta os domínios; usar expressões simples como $x^2 - \frac{1}{x}$, $1 + \frac{1}{x} - \frac{x}{x-1}$, $\frac{x-\sqrt{2}}{x^2-2}$, $\frac{\frac{1}{x}}{x-3}$ Analogamente, a composição de funções dever ser estudada em casos muito simples. - Tanto equações como inequações inteiras ou fraccionárias surgirão, de preferência, ligadas ao estudo dos zeros, do sinal ou de outras características de uma função (imagem maior que 1, por exemplo). Não está no espírito do programa a insistência em exemplos muito técnicos e isolados de qualquer contexto. - Ao tratar do problema da inversão deve-se pedir ao aluno que, dada uma função racional não injectiva, determine uma restrição injectiva e a inversa.

4. TRIGONOMETRIA

Retoma-se e amplia-se o estudo de aplicações práticas da Trigonometria por serem mo[illegible]ras e formativas.

Para o prosseguimento do estudo da Análise e da Geometria Analítica é necessário am[illegible] o conceito de ângulo que passa a ser encarado como "gerado" por uma semi-recta em movimento (sentido positivo ou negativo).

Estudam-se no círculo trigonométrico as funções seno, coseno e tangente, cujos domínios, nesta fase, serão constituídos por amplitudes de ângulos.

Subtemas	Objectivos	Indicações Metodológicas
- Ângulo e arco generalizados; radiano; expressão geral das amplitudes dos ângulos com os mesmos lados, em graus e radianos. - Funções seno, co-seno, tangente: variação (estudo no círculo trigonométrico) - Valores em $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{3}$ radianos - Relações entre as funções de x, e de $\frac{\pi}{2} \pm \alpha$, $\pi \pm \alpha$ e $-\alpha$. - Analogia dos senos. - Expressão geral das amplitudes dos ângulos com o mesmoseno/co-seno/tangente.	- Resolver problemas que envolvam o cálculo de um elemento de um triângulo. - Indicar sinal, zeros, monotonia, paridade, periodicidade duma função trigonométrica - Simplificar expressões trigonométricas (observação no círculo trigonométrico). - Resolver equações trigonométricas elementares.	- A revisão dos conhecimentos de trigonometria do 9º deve fazer-se com base numa actividade de resolução de triângulos aplicada a uma situação prática como: . Interpretação do sinal de trânsito: . Como determinar a altura duma das pirâmides do Egipto. . Determinar a largura de um rio sem sair de uma das margens.  - Devem ser propostos aos alunos exercícios diversos em que se precisa de um elemento de um triângulo rectângulo, como: Achar a área de um trapézio isósceles dados os lados iguais, a base maior e o ângulo da base; determinar o volume de uma pirâmide quadrangular dada a aresta da base e um dos ângulos duma face lateral. - As relações entre as funções de α e de $\pi+\alpha$, $\pi-\alpha$, $-\alpha$, $\frac{\pi}{2}-\alpha$, $\frac{\pi}{2}+\alpha$ devem também ser vistas no círculo trigonométrico. - É importante verificar que se mantêm as relações $sen^2\alpha + cos^2\alpha = 1$ e $tg\,\alpha = \frac{sen\,\alpha}{cos\,\alpha}$ e que $1+tg^2\alpha = \frac{1}{cos^2\alpha}$ e usá-las na determinação duma função trigonométrica a partir de outra. - As expressões a simplificar não devem exceder a dificuldade de $sen\,(5\pi - x)$, $cos(\frac{3\pi}{2}+x)$, $tg\,\frac{\pi}{3} \cdot cos\,(\pi + x)$, ... - A analogia dos senos, embora não resolva todos os triângulos, permite alargar as aplicações práticas, por exemplo, no cálculo de distância a pontos inacessíveis. 

5. GEOMETRIA ANALÍTICA - III - Produto Escalar. Perpendicularidade

O estudo do produto escalar permite abordar novos problemas, nomeadamente os que se referem à perpendicularidade, e ainda estabelecer algumas propriedades geométricas.

Nesta unidade estuda-se apenas a perpendicularidade no plano.

À medida que os conhecimentos crescem os problemas relativos a conjuntos definidos por condições vão-se tornando mais ricos envolvendo os novos conhecimentos e os dos anos anteriores.

Subtemas	Objectivos	Indicações Metodológicas
Produto escalar de dois vectores: definição e propriedades. . Expressão do produto escalar nas coordenadas dos vectores. . Ângulo de duas rectas; inclinação de uma recta; declive.	- Calcular em referencial o.n. o ângulo de dois vectores.	- A noção de produto escalar de dois vectores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, é apresentada usando a definição $\vec{u}.\vec{v} = \Vert\vec{u}\Vert . \Vert\vec{v}\Vert . \cos(\widehat{\vec{u}.\vec{v}})$. O exemplo do trabalho realizado por uma força fornece uma boa concretização. Deverá salientar-se que: . O produto $\vec{u}.\vec{v}$ é um número (escalar); . O produto $\Vert\vec{v}\Vert \cos(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$ designa a projecção de $\vec{v}$ sobre $\vec{u}$; . Para vectores não nulos o anulamento ou o sinal de $\vec{u}.\vec{v}$ dão a sua posição relativa; . Resolvida em ordem a $\cos(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$, a fórmula permite obter o ângulo de $\vec{u}$ com $\vec{v}$.
. Perpendicularidade de vectores e de rectas.	- Resolver problemas envolvendo perpendicularidade de vectores e de rectas recorrendo ao produto escalar	- As propriedades básicas do produto escalar, $\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}$ e $(a.\vec{u}).(b.\vec{v}) = (a.b).(\vec{u}.\vec{v})$ podem facilmente ser verificadas; a propriedade distributiva será apresentada como informação (sem demonstração) Estas propriedades permitem obter uma expressão simplificada $\vec{u}.\vec{v} = u_1v_1 + u_2v_2$ em referencial o.n. . Desta expressão deve deduzir-se que o vector $(-u_2, u_1)$ é perpendicular a (u_1, u_2).
Distância de ponto a recta e de duas rectas paralelas.		- Ao retomar a noção de declive de uma recta convem interpretá-lo como sendo a tangente da inclinação da recta.
Aplicação do produto escalar à demonstração de algumas propriedades da Geometria e da Trigonometria.	- Demonstrar a fórmula do desenvolvimento de cos(a-b).	- Mostrar que a mediatriz de um segmento já estudada no 10º ano, pode obter-se agora vectorialmente. Entre as actividades que se podem propor, envolvendo o produto escalar, podem incluir-se as demonstrações: . a altura relativa à hipotenusa é meio proporcional entre os segmentos que determina nela . qualquer cateto é meio proporcional entre a hipotenusa e a sua projecção sobre ela. . o teorema de Carnot
Conjuntos definidos por uma condição	- Representar num referencial o.n. conjuntos definidos por condições que envolvem rectas, circunferências, parábolas. - Indicar uma condição que defina um dado domínio plano.	- Os conjuntos planos a estudar integrarão progressivamente os novos conhecimentos de Geometria, sendo todavia de evitar exageros.

6. SUCESSÕES-II - Limites

Abordam-se aqui alguns conceitos importantes para a Análise Infinitesimal: infinitamente grande, infinitésimo e sucessão convergente. Pela sua delicadeza estes conceitos deverão ser intuídos, numérica e geometricamente, antes de serem definidos e as definições, sem perda de rigor, serão dadas em linguagem corrente.

Esta unidade deve ser entendida, como uma preparação imediata para o conceito de limite de função real de variável real, razão porque a "prática" relativa a sucessões será reduzida a exemplos essenciais. A álgebra dos limites não é abordada aqui; pretende-se apenas que o aluno identifique infinitésimos e infinitamente grandes, em casos simples, comparando-os com sucessões adoptadas para referência. O conceito de sucessão convergente será dado a partir da noção de infinitésimo.

As definições de infinitamente grande e de infinitésimo serão usadas nas demonstrações previstas no programa, mas não em exercícios a propor ao aluno.

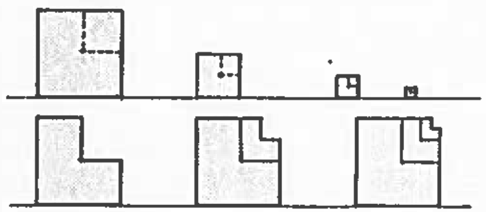
Subtemas	Objectivos	Indicações Metodológicas
- As sucessões de referência: $n, n^2, \sqrt{n}, 2^n$; estudo numérico e gráfico. - Infinitamente grande positivo/negativo//em módulo. - As propriedades: ."Se $u_n \to +\infty$ e $v_n \geq u_n$ a partir de certa ordem, então $v_n \to +\infty$ (com demonstração) ."Se $u_n \to +\infty$, também $(u_n + \alpha) \to +\infty, \alpha \in R$ e $\lambda u_n \to +\infty$, $\lambda \in R^+$", (verificação com exemplos) ."Com $a > 1$, $a^n \to +\infty$" (com demonstração) - As sucessões de referência $\frac{1}{n}$, $\frac{1}{n^2}$, $\frac{1}{\sqrt{n}}$, $\frac{1}{2^n}$: estudo numérico e gráfico	- Identificar infinitamente grandes (positivo, negativo ou em módulo) por comparação com outros infinitamente grandes já identificados.	- Analogamente ao que foi feito no 10º ano para as funções, o estudo das sucessões de referência n, n^2, $\sqrt{n}$, 2^n será feito intuitivamente, com recurso à calculadora e a representações gráficas; o aluno poderá, assim, visualisar o crescimento dos termos e verificar que dado um número A muito grande, qualquer que ele seja, existe uma ordem a partir da qual os termos são <u>todos</u> maiores que A. - Para indicar que uma sucessão (u_n) é um infinitamente grande positivo pode-se escrever $\lim u_n = +\infty$, ou $u_n \to +\infty$; para indicar que (u_n) é um infinitamente grande negativo, escreve-se $\lim u_n = -\infty$, ou $u_n \to -\infty$; e escreve-se $\lim \lvert u_n \rvert = +\infty$ ou $\lvert u_n \rvert \to +\infty$ se for infinitamente grande em módulo. - Exemplos de identificação de infinitamente grandes por comparação com as sucessões de referência, temos: $n^3 \to +\infty$, porque $n^3 = n.n^2 \geq n^2$ e $n^2 \to +\infty$; $(-n^3) \to -\infty$, proque é simétrico de n^3 $\frac{3n^2}{2n-5} \to +\infty$, porque $\frac{3n^2}{2n-5} > \frac{3n^2}{2n} = \frac{3}{2}n$ (λn é infinitamente grande) $0,5(n-2) \to +\infty$, porque $n+(-2) \to +\infty$ e $0,5(n+(-2)) \to +\infty$
- Infinitésimos. - As propriedades: ."Se $v_n \to 0$ e, a partir de certa ordem $\lvert u_n \rvert \leq v_n$, então $u_n \to 0$" ."Se $u_n \to 0$ também $ku_n \to 0$ (verificação com exemplos)	- Reconhecer infinitésimos por comparação com outros infinitésimos já identificados.	- A demonstração de que $a^n \to +\infty$, com $a > 1$ pode-se fazer recorrendo ao binómio de Newton. - Também o estudo dos infinitésimos de referência deverá ser feito, com recurso à calculadora e a representações gráficas que permitam visualisar a variação dos termos e a sua aproximação a zero.

Subtemas	Objectivos
- Sucessões convergentes para <u>a</u> ($u_n - a$ é infinitésimo)	- Mostrar que um dado número é limite de uma sucessão.
- Os teoremas (com demonstração) . Unicidade do limite. . O inverso de um infinitamente grande é um infinitésimo e reciprocamente.	
- Limite a^n, com $0 < a < 1$.	

Indicações Metodológicas

- Para indicar que uma sucessão (u_n) é um infinitésimo escreve-se $\lim u_n = 0$, ou $u_n \to 0$.
- O reconhecimento de infinitésimos deverá também ser feito por comparação.
- Só depois de bem adquiridas as noções de infinitamente grande e de infinitésimo e que surgirão as definições, nas quais se deve usar linguagem corrente.
- Não se pretende que os alunos provem, por recurso à definição que uma sucessão é infinitamente grande ou infinitésimo.
- No entanto, são aconselháveis, exercícios em que se p... a ordem depois da qual se verifica uma condição dada ($u_n < 10^{-3}$ ou $u_n > 10^6$).
- São diversos os exemplos de sucessões oferecidos pela Geometria, sobre os quais pode realizar-se um trabalho de grupo:

1. De um quadrado inicial retira-se um quadrado com metade do lado, como indica a figura; do segundo quadrado retira-se outro; e assim por diante.

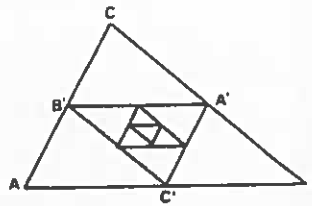


Na sucessão dos quadrados, qual o limite da área?

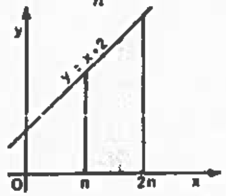
Qual o limite da sucessão das áreas das figuras que sobram?

Qual o limite da soma das áreas dessas figuras?

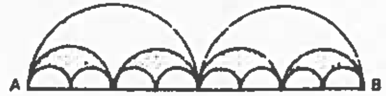
2. Os pontos médios dos lados do triângulo ABC são os vértices de um 2º triângulo A'B'C'. Este triângulo dá origem, pelo mesmo processo a outro triângulo, e assim por diante. Supondo que a área do $\Delta[ABC]$ é 512, defina por recorrência a sucessão das áreas dos triângulos e indique, justificando qual o seu limite.



3. u_n designa a área do domínio plano tracejado na figura junta. Calcular u_n e determinar $\lim u_n$.



4. Qual o limite da soma das linhas de extremos A e B?



Subtemas	Objectivos	Indicações Metodológicas
		- Na representação gráfica de sucessões (u_n) convergentes para <u>a</u> são de considerar as duas perspectivas: . Representar a sucessão (u_n) e a recta $y=a$ e verificar que os pontos de (u_n) se aproximam cada vez mais da recta. . Representar a sucessão $(v_n)=(u_n-a)$ e verificar que $v_n \to 0$. - É de salientar que, sendo $\|a\|>1$, $\|a\|^n \to +\infty$ e, então $\frac{1}{\|a\|^n} = \left\|\frac{1}{a}\right\|^n \to 0$. Por isso, com $0<a<1$, vem $a^n \to 0$. Exemplo $(\frac{1}{2})^n \to 0$, $(-5/8)^n \to 0$. - Ao estudar o inverso de um infinitésimo é indispensável atender ao sinal do infinitésimo e clarificar se se obtem um infinitamente positivo/negativo/em módulo. - Ao trabalhar com sucessões convergentes concluir intuitivamente que sucessão monótona limitada é convergente.

Nº de aulas previstas: 10

7. Funções III - Limites, Derivadas

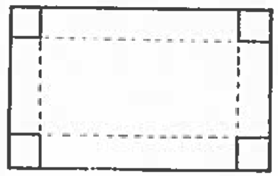
Estudam-se aqui alguns conceitos básicos de Análise Infinitésimal: limite (à Heine), [illegible]tinuidade, derivada num ponto e função derivada.

Estes conceitos serão intuídos a partir de exemplos e as definições serão dadas em [illegible]gem corrente. As aplicações, nesta fase, referem-se a funções polinominais e a funções fraccionárias.

As regras operatórias com limites de funções (só informação e exemplos) também se aplicam a sucessões, o que permite calcular mais alguns limites de sucessões.

A interpretação geométrica do sinal da derivada e da 2ª derivada, a determinação de assímptotas, o cálculo de limite em pontos especiais e a continuidade devem ser apresentados como instrumentos de precisão para o esboço de gráficos e largamente usados no estudo de funções.

Subtemas	Objectivos	Indicações Metodológicas
- Limites de funções reais de variável real. . Definição (Heine). . Limites laterais. . Regras operatórias com limites finitos e infinitos (informação) . Os símbolos de indeterminação $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0.\infty$, $\infty - \infty$	- Calcular limites de funções - Investigar se uma função é contínua num ponto ou num intervalo dado.	- Recordar funções estudadas experimentalmente, como $\frac{1}{(x-1)^2}$ na vizinhança de 1 para clarificar o significado de $\lim_{x\to 1} \frac{1}{(x-1)^2} = +\infty$. Calcular os limites laterais, para distinguir do caso $\frac{1}{x}$ na vizinhança de 0. - A álgebra dos limites não foi incluída na 1ª abordagem de limites de sucessões, mas o estudo agora feito permite calcular limites de sucessões em casos não tratados anteriormente; convém dar alguns exemplos, em especial calcular o limite da soma de n termos consecutivos duma progressão geométrica. Exemplo: Calcular $\sum_{k=1}^{n} 5\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}$
. Demonstração de: $\lim_{\substack{x\to+\infty\\x\to-\infty}} \frac{ax^n+bx^{n-1}\dots}{px^m+qx^{m-1}\dots} = \lim_{\substack{x\to+\infty\\x\to-\infty}} \frac{ax^n}{px^m}$	- Calcular limites de sucessões, nomeadamente da soma de n termos de uma progressão geométrica (aplicar as regras operatórias sobre limites de funções).	
. Continuidade num ponto e num intervalo. . Operações com funções contínuas (informação). . Teorema do valor intermédio de Bolzano.		- Convém salientar a continuidade de toda a função racional (inteira ou fraccionária) e assegurar a noção intuitiva de que função contínua num intervalo corresponde a um gráfico contínuo (sem interrupção). - Devem ser dados exemplos de funções descontínuas como C(x), $g(x) = \begin{cases} \frac{\lvert x\rvert}{x} & se\ x \neq 0 \\ 1 & se\ x = 0 \end{cases}$ $f(x) = \begin{cases} 2x-1, & se\ x > 1 \\ x^2-1, & se\ x \leq 1 \end{cases}$ - No levantamento de indeterminações evitar virtuosismos de cálculo que desviam a atenção do essencial. Têm nível de dificuldade suficiente: $\lim_{x\to+\infty} \frac{3x^2-x+1}{3-5x+2x^2}$, $\lim_{x\to-\infty} \frac{x^3-x^7}{5x^6-10x^7}$, $\lim_{\substack{x\to+\infty\\(-)}} \left(x^2-\frac{x^2}{x-1}\right)$, $\lim_{x\to 3} \frac{x^2+5x+6}{x^2-9}$, $\lim_{x\to 1} (x+1).\frac{2x+1}{x^3-x^2}$

Subtemas	Objectivos	Indicações Metodológicas
- Derivada de uma função num ponto como limite da taxa de variação; interpretação geométrica. - Teorema relativo à derivabilidade e continuidade (com demonstração) - Derivada da soma e do produto (com demonstração). . Derivadas da potência e do quociente (informação)	- Calcular derivadas usando a definição (em casos simples), ou as regras de derivação. - Determinar a tangente ao gráfico de uma função dada num ponto dado.	- A derivada será apresentada como limite das taxas de variação média relativas a intervalos cada vez menores; convém observar a evolução das posições das secantes e dos respectivos declives, respectivamente para a tangente e para a derivada (declive da recta tangente ao gráfico no ponto). - O aluno deve calcular derivadas a partir da definição e em vários pontos, comparando os números obtidos com a variação mais ou menos rápida da função (usar as notações $y' = \frac{dy}{dx}$) - Só depois de compreender bem a noção de derivada o aluno deverá praticar o uso das regras de derivação no qual deve ganhar destreza. - É importante que o aluno saiba que dada a equação $e=f(t)$, de um movimento, a sua derivada $v=f'(t)$ é a equação das velocidades e que $a=f''(t)$ é a equação das acelarações. Assim, dada a lei do movimento o aluno deverá fazer o cálculo de velocidades instantâneas.
. Segunda derivada . Aplicação da 1ª e da 2ª derivadas ao estudo de gráficos, de máximos e mínimos relativos, de concavidades. . Assímptotas verticais e não verticais.	- Fazer o estudo analítico duma função racional e aplicá-lo no traçado de gráficos. - Identificar, em situações problemáticas concretas, funções que permitam resolve-las. - Resolver problemas de "máximos e mínimos"	- O estudo das funções racionais e a sua representação gráfica deve incluir domínio, assímptotas, zeros, continuidade, monotonias, extremos, sinal, concavidade, contradomínio. Funções estudadas anteriormente sem o auxílio da análise infinitesimal devem ser retomadas para que o aluno aprecie a diferença do tratamento analítico, quanto a eficiência e precisão. - Os problemas de optimização devem ser acessíveis e ter algum interesse prático. Exemplo: " De uma folha de cartão rectangular de 1m x 0,8m retira-se um quadrado em cada canto, para construir uma caixa sem tampa". Quando é que a capacidade da caixa é máxima? 

6. FUNÇÕES IV - Áreas

Considera-se que a noção de integral definido deve figurar entre as que convêm adquirir neste ciclo que é terminal de estudos para muitos alunos. Assim, faz-se uma iniciação informal ao conceito de integral definido, a partir de uma reflexão sobre o problema da determinação da área de uma figura irregular.

A conclusão de que ...ea sob o gráfico se pode obter a partir da primitiva da função permite calcular, nesta fase, áreas sob traços de parábolas ou de parábolas cúbicas, por exemplo. Tanto no 11º ano como no 12º ano só se usam primitivas imediatas.

Subtemas

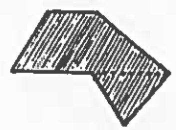
- Área de uma figura irregular; métodos de cálculo exacto e cálculo aproximado.
- "Área sob a curva", como limite de um somatório.
- Integral definido: $\int_a^b f(x)\,dx$
- Demonstração com apoio gráfico de que $\lim\limits_{h\to 0} \frac{A(x+h)-A(x)}{h} = f(x)$, sendo $A(x)$ a área sob a curva entre a e x.
- Noção de primitiva de uma função; Primitivas imediatas: $P(kf)$, $P(f+g)$, $P(-\frac{1}{x^2})$.
- A fórmula de Barrow.
- Referência histórica à evolução do Cálculo Integral e à importância das suas aplicações a diversas ciências.

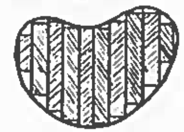
Objectivos

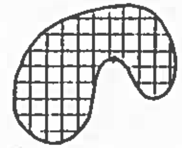
- Calcular primitivas de funções polinomiais e de funções do tipo $x \mapsto \frac{a}{bx^2}$.
- Calcular, em intervalos dados, áreas sob parábolas, parábolas cúbicas ou outro gráfico de função racional cuja primitiva conheça.

Indicações Metodológicas

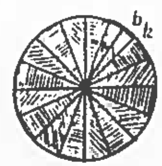
- É conveniente que o aluno calcule efectivamente áreas de figuras irregulares dadas (numa ficha de trabalho, por exemplo), decompondo em figuras cuja área se sabe calcular ou usando processos para obter valores aproximados por defeito e por excesso (pode sobrepor papel milimétrico transparente ou dividir em tiras aproximadamente regulares)



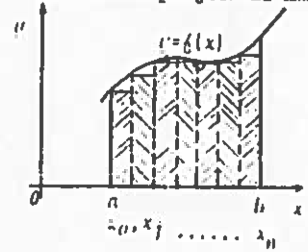




- O aluno deve conhecer a contribuição de Arquimedes (Sec. III a.C) e de Cavalieri (Sec.XVII) para o cálculo de áreas e volumes e as de Newton e de Leibniz (Sec.XVIII) para o desenvolvimento do cálculo diferencial e integral.
- À semelhança do que acontece com a área do círculo que pode ser vista como $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{b_k \cdot r}{2} = \frac{r}{2} \cdot \lim\limits_{n\to+\infty} b_k = \frac{r}{2} \cdot 2\pi r = \pi r^2$



a área sob um gráfico de uma função contínua $f(x)$ será



$A = \lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} f(x_k) \cdot \Delta x_n$, em que $\Delta x_n = \frac{b-a}{n}$

A designa-se por $\int_a^b f(x).\Delta x$

Subtemas	Objectivos	Indicações Metodológicas

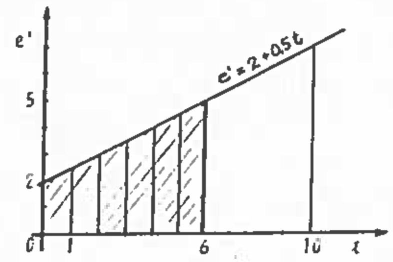
- A conclusão de que a área sob um gráfico se calcula usando uma primitiva da função deve começar com exemplos simples como:

  . Seja $e = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$ e a sua derivada $e' = v_0 + at$

  Suponhamos $v_0 = 2$ e $a = 0,5$ e represente-se a função derivada $e' = 2 + 0,5t$

  Comparem-se as áreas sob o gráfico da derivada e' com os valores da função primitiva $\underline{e}$, para o mesmo valor de t:

  Por exemplo, para $t = 6s$



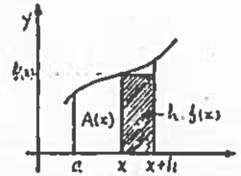
  Área: $A_6 = \frac{2+5}{2} \times 6 = 21$

  Função primitiva: $e = 2 \times 6 + \frac{1}{2} \times 0,5 \times 6^2$

  $e = 12 + \frac{1}{2} \times 18$

  $e = 12 + 9 = 21$

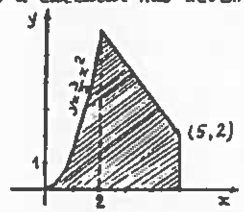
- A demonstração de que $A'(x) = f(x)$ deve ser feita com apoio numa figura do tipo

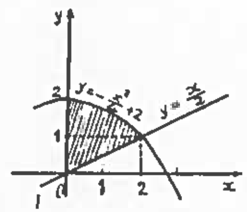


$$A(x+h) - A(x) \simeq h \cdot f(x)$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{A(x+h) - A(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h \cdot f(x)}{h} = f(x)$$

- A partir do conhecimento anterior a regra de Barrow deve ser demonstrada.
- As áreas a calcular não devem exceder em dificuldade os exemplos:





- Sugere-se o cálculo de uma dessas áreas por um processo aproximado e a comparação com o valor obtido por integração.

CONSULTAS BIBLIOGRAFICAS ACONSELHADAS PARA
CADA UNIDADE

À frente de cada título estão indicados os números que se referem às obras que constam da Bibliografia Geral, página 27.

<u>11º ANO</u>

- . Combinatória .... (1), (7), (14), (16), (A), (B)
- . Probabilidades I .... (1), (14), (16)
- . Funções II .... (1), (5), (6)
- . Trigonometria .... (1), (3)
- . Geometria Analítica III .... (1), (2), (3)
- . Sucessões II........................... (1), (4), (8)
- . Funções III .... (1), (4), (8), (9)
- . Funções IV - Áreas .... (1), (10)

1 1. PROPOSTA DE PROGRAMA PARA O 12º ANO COM INDICAÇÕES METODOLÓGICAS E BIBLIOGRÁFICAS.

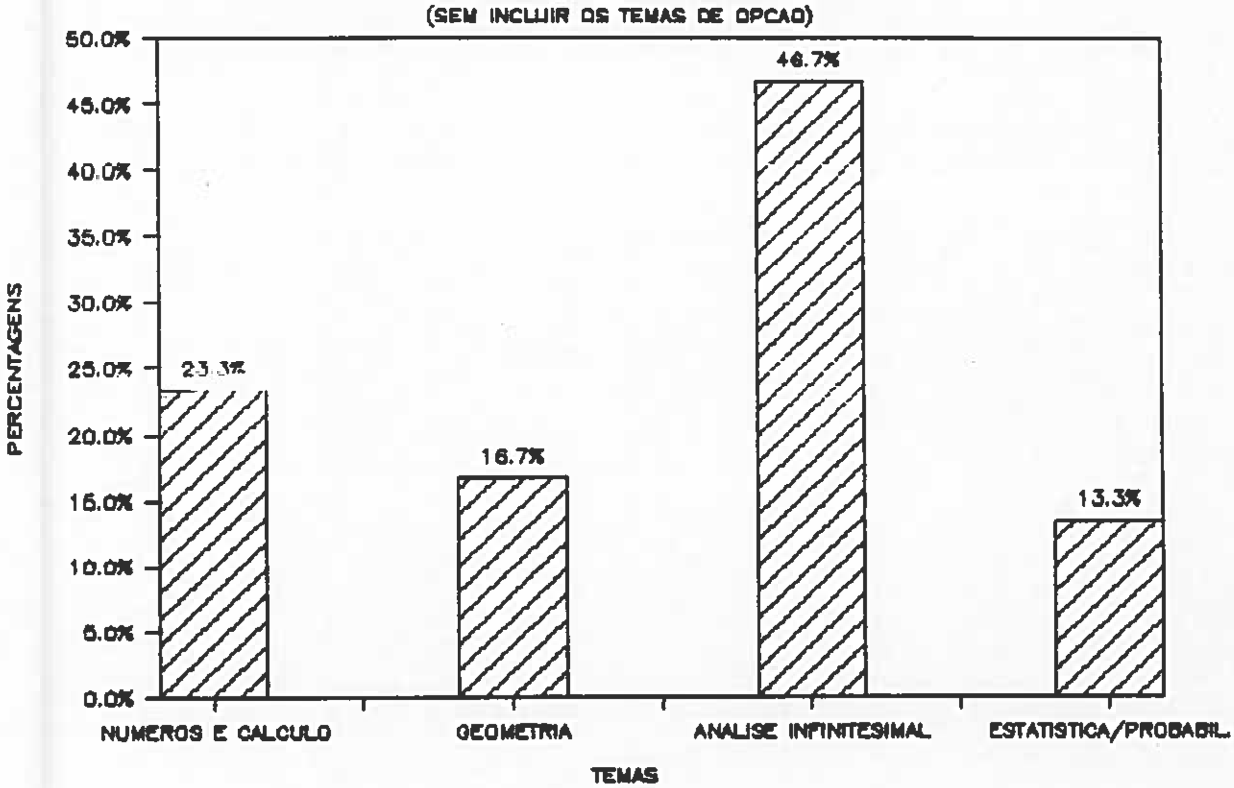
1 1.1. *Pesos relativos dos temas*

1 1.2. *Descriminação de subtemas, objectivos e indicações metodológicas*

1 1.3. *Indicações bibliográficas.*

12º ANO-PESOS RELATIVOS DOS TEMAS

(SEM INCLUIR OS TEMAS DE OPCAO)



1. PROBABILIDADES II

As distribuições de frequências relativas a probabilidades ajudam o aluno a ter uma ideia das interrelações profundas entre a Estatística e as Probabilidades. A curva de Gauss, a que se faz breve referência, surge em distribuições que têm origem em variadíssimos campos: sociologia, educação, medicina, ...

Aperfeiçoa-se um pouco o cálculo de probabilidades, e alarga-se a perspectiva da Matemática em que se quantifica o grau de incerteza por meio de uma teoria exacta, o que é, certamente enriquecedor para a formação global do indivíduo.

Embora esta unidade tenha o objectivo de síntese em relação aos dois ramos do saber, não se prevê desenvolvimentos teóricos significativos destas matérias informando-se tudo o que não seja possível ou vantajoso deduzir nesta fase.

Subtemas	Objectivos	Indicações Metodológicas
- Distribuições de frequências relativas; distribuições de probabilidades (discretas), média e desvio padrão; representação gráfica (histogramas).	- Calcular a média e o desvio padrão duma distribuição de frequências relativas e duma distribuição de probabilidades. (discretas).	- A representação das distribuições de frequências e de probabilidades por gráficos de barras pode constituir um meio para introduzir a curva de Gauss e sugere uma ligação entre a Estatística e o cálculo de probabilidades.
- Distribuição de probabilidades no aparelho de Galton; o mesmo relativamente a n lançamentos de uma moeda ou de um dado.	- Calcular probabilidades respeitantes a situações no aparelho de Galton ou em n provas repetidas.	- A determinação dos trajectos no aparelho de Galton e as probabilidades relativas a cada compartimento serão deduzidas; a utilização de um modelo de Galton, ou de desenhos ou transparências sugestivas poderá constituir importante ajuda.
- Informação de que a probabilidade de em n provas se verificar k vezes o acontecimento de probabilidade p é ${}^{n}C_{k}p^{k}(1-p)^{n-k}$.		- A determinação da probabilidade relativa a cada situação poderá ser feita inicialmente por quociente do número de casos favoráveis pelo número de casos possíveis, visto que o aluno não conhece a noção de "acontecimentos independentes" e não sabe que $p(A \cap B) = p(A).p(B)$. Por exemplo: A probabilidade de obter 3 faces ⁙ em 12 lançamentos é $\frac{{}^{12}C_3 \cdot 1^3 \cdot 5^9}{6^{12}} = {}^{12}C_3 \cdot (\frac{1}{6})^3 \cdot (\frac{5}{6})^9 = {}^{12}C_3 \cdot p^3 \cdot (1-p)^9$ (queremos que apareça a "sena" 3 vezes e que não apareça 9 vezes)
- Referência à curva de Gauss e a caracteres que se distribuem normalmente.	- Resolver problemas simples relativas a distribuições de probabilidades.	- As informações relativas à curva de Gauss não serão objecto de qualquer demonstração.
- Comparação dos gráficos obtidos com a curva de Gauss. Informação sobre a probabilidade relativa aos intervalos $[\bar{x}-\sigma, \bar{x}+\sigma]$ e $[\bar{x}-2\sigma, \bar{x}+2\sigma]$ - Interpretação da probabilidade como área sob a curva de Gauss.		- Os problemas a resolver deverão incluir situações relativas a distribuições binomiais, mas quanto à distribuição normal não se pretende ir além do cálculo das probabilidades relativas a intervalos como $[\bar{x}+\sigma, \bar{x}+2\sigma]$ ou $[\bar{x}-\sigma, \bar{x}+2\sigma]$.

2. FUNÇÕES V - Complementos sobre Derivadas

Continuando a estratégia de retomar e ampliar os temas em momentos diferentes introduz-se agora a derivada da função composta, da inversa e as derivadas de raízes, o que alarga o conjunto de funções que o aluno pode estudar analiticamente.

O cálculo de derivadas de funções na forma implícita tornará muito fácil a determinação de tangentes e normais a cónicas.

Subtemas	Objectivos	Indicações Metodológicas
- Funções irracionais: domínio, continuidade.	- Derivar funções compostas.	- É conveniente afinar as noções de função inversa e de função composta. - Devem ser propostas actividades que levem o aluno a: . obter a derivada de funções como $\sqrt{x}$, $5+\sqrt{x-a}$, $\sqrt[3]{x}$, $\sqrt[3]{x-a}$, usando a definição, o teorema da derivada da função inversa ou simplesmente aplicando a regra de derivação. . usar a regra de derivação da composta em casos como: $y=\sqrt{5t^2-2t}$ e $y=(3x^3-1)^{\alpha}$. calcular a derivada de y como função implícita de x, num ponto dado, em casos não mais difíceis que: $\frac{(x+3)^2}{5} \pm \frac{(y-7)^2}{4}=1$, $(x-3)y=k$
- Derivada da função inversa e derivada da função composta; aplicação à derivada de $\sqrt[n]{f(x)}$.	- Fazer o estudo analítico e gráfico de funções irracionais simples envolvendo apenas um radical quadrático ou cúbico.	
- Derivada de x^{α}, com $\alpha \in Q$ e $x \in R^+$ (informação)		
- Derivada de função implícita	- Calcular $\frac{dy}{dx}$ sendo y função implícita de x, em casos muito simples.	- A regra de derivação da função implícita permite calcular o declive da recta tangente a uma circunferência, por exemplo, de equação $x^2+y^2=25$, no ponto de abcissa 3 e ordenada positiva: tem-se $2x+2yy'=0$, donde $y'=-\frac{x}{y}$ ou seja $y'=-\frac{3}{4}$. - Fazer o estudo de algumas funções irracionais dos tipos $\sqrt{x-3}$, $\sqrt[3]{x^2-x}$, as quais podem surgir ligadas a um problema de optimização como: "Determinar o rectângulo de área máxima que se pode inscrever num semi-círculo de raio 10 m".

Nº de aulas previstas: 5

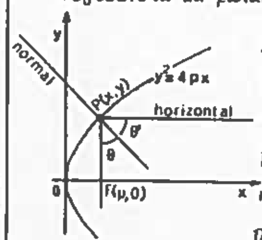
3. GEOMETRIA ANALÍTICA IV - Cónicas. Complementos de Geometria no Espaço.

O estudo das cónicas impõe-se por razões de ordem historico-cultural, científico-técnico, estética e pedagógica.

O estudo analítico dessas linhas será enriquecido com a determinação de tangentes e normais e com a propriedade reflectora da parábola.

Estudam-se, nesta unidade, as equações vectoriais e cartesianas de rectas e planos bem como o paralelismo e a perpendicularidade no espaço.

Subtemas	Objectivos	Indicações Metodológicas
- Cónicas: perspectiva histórica e importância na tecnologia actual e na Astronomia.	- Elaborar e apresentar, individualmente ou em grupo, um trabalho escrito ou oral sobre um tema ligado a cónicas.	- Devem ser propostos trabalhos de consulta e síntese a apresentar por escrito ou oralmente, ou realizar projectos interdisciplinares. São muitos os temas propícios à elaboração de monografias. Exemplos: . Historico-culturais - Apolonius, Copérnico, Kepler, Galileu, Newton e as sucessivas interpretações do sistema solar.
. Referência às secções da superfície cónica.		. Científico-técnicas - satélites artificiais, forno solar, antena parabólica, farol de automóvel, trajectória de um projectil.
. Definição a partir das propriedades focais; excentricidade. Equações reduzidas referidas a eixos de simetria ou paralelos a estes.	- Determinar características duma cónica, dada a equação referida aos eixos de simetria ou a eixos paralelos a estes, e vive-versa.	. Geométricos - obtenção por secção de superfícies cónicas, por dobragens, construção com régua e compasso, processo do jardineiro,... . Estéticos - fontes decorativas, pontes, o arco de parábola na arquitectura moderna,...
. Tangentes e normais: determinação analítica; propriedade reflectora da parábola: demonstração.	- Determinar as rectas tangente e normal a uma cónica, num ponto dado.	- A obtenção das equações reduzidas a partir das propriedades focais não deve ser exigida ao aluno, embora deva ser feita e explicada na aula; analogamente, no que se refere à propriedade reflectora da parábola: "Raio paralelo ao eixo reflecte-se passando pelo foco e vice-versa".



Sugestão de demonstração: De $F(p,0)$ e $y^2=4p.x$ vem $y'=2p/y$ donde $\vec{n}(2p/y,-1)$ é vector normal. Sendo θ o ângulo de $\vec{n}$ com o versor de $\vec{PF}$ e θ' o de $\vec{n}$ com $(1,0)$, mostre que $\cos\theta=\cos\theta'$ recorrendo ao produto escalar.

Para obter tangentes e normais em pontos dados pode recorrer-se à derivação na forma implícita. Exemplo:

De $\frac{x^2}{5}-\frac{y^2}{2}=1$ vem $\frac{2x}{5}-y.y'=0$. No ponto $(5,\sqrt{8})$ vem $y'=\frac{\sqrt{2}}{2}$;

tangente: $y-\sqrt{8}=\frac{\sqrt{2}}{2}(x-5)$; normal: $y-\sqrt{8}=-\sqrt{2}(x-5)$.

3. GEOMETRIA ANALÍTICA - IV. (cont.)

Subtemas	Objectivos	Indicações Metodológicas
- Complementos de Geometria no Espaço: . Produto escalar: extensão ao espaço; informação da conservação das propriedades; expressão nas coordenadas; condição de perpendicularidade de dois vectores.	- Determinar analiticamente pontos, rectas e planos obedecendo a condições dadas. - Resolver analiticamente situações que envolvem paralelismo perpendicularidade de rectas e planos.	- Convém recordar al[illegible] conhecimentos de Geometria no espaço já adquiridos. Exemplos: - A representação de um vector $\vec{u}$ num referencial o.n.: (u_1,u_2,u_3) ou $\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$. - A soma de vectores e o produto de um escalar por um vector. - Ponto médio; distância de dois pontos: norma de um vector. - Vector definido por dois pontos: equação vectorial da recta: $P=A+k\vec{u}$, $k\in\mathbb{R}$.
. Equações da recta no espaço em referencial o.n.: vectoriais, paramétricas, cartesianas.	- Calcular a distância de um ponto a um plano.	- Recordar aos alunos a definição de produto escalar $\vec{u}.\vec{v} = \\|\vec{u}\\| . \\|\vec{v}\\| . \cos(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$ e a partir dela estabelecer que $\vec{u}.\vec{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3$ e concluir que os vectores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, com $\vec{u} \neq \vec{0}$ e $\vec{v} \neq \vec{0}$ são perpendiculares se e só se $\vec{u}.\vec{v}=0$. - É importante que o aluno seja capaz de passar de equações vectoriais para as cartesianas e vice-versa.
. Plano definido por: . um ponto e duas direcções; equações vectoriais e paramétricas. . um ponto e um vector normal; equação cartesiana. . Paralelismo e perpendicularidade de rectas e planos.		- O aluno deve ser capaz de obter a equação vectorial do plano que passa por três pontos não colineares, por uma recta e um ponto fora dela, ou ainda, por duas rectas paralelas. É importante destacar o vector normal a partir da equação cartesiana do plano e usá-lo em questões de paralelismo e de perpendicularidade. - Como actividade pode determinar-se a distância de um ponto dado a uma recta dada.

Nº de aulas previstas: 15

4. SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES

Diversas ciências e tecnologias conduzem a problemas com mais de duas incógnitas cuja resolução recorre a "sistemas de equações lineares".

Para que o aluno conheça um método facilmente generalizável a n incógnitas estuda-se o método de Gauss (ou do "pivot") para sistemas de três equações e resolvem-se também alguns exemplos com quatro equações. O uso da forma matricial visa, além da simplificação do processo, um primeiro contacto com um símbolo novo, de indiscutível importância na continuação de estudos.

Embora o objectivo do tema seja dar apoio técnico à resolução de problemas de geometria no espaço, podem propor-se outras actividades envolvendo a resolução de sistemas, desde que não alonguem demais a unidade.

Subtemas

- Sistemas de três equações lineares com três incógnitas.
  - .Sistemas equivalentes.
  - .Resolução pelo método de Gauss ou do "pivot".
  - .Casos de indeterminação e de impossibilidade.

Objectivos

- Resolver sistemas de três equações com três incógnitas, usando o método de eliminação de Gauss apoiado na matriz completa do sistema.
- Determinar a intersecção de três planos interpretando geometricamente o resultado obtido. O mesmo para intersecção de uma recta com um plano.

Indicações Metodológicas

- Convém recordar os métodos usados na resolução de sistemas de duas equações com duas incógnitas (9º e 10º anos) e exemplificar como podem estender-se a sistemas de 3 equações a 3 incógnitas.
- Os sistemas de três equações com três incógnitas devem surgir de problemas como a intersecção de três planos: $\begin{cases} 2x+y+z=0 \\ y+z=3 \\ 2z=4 \end{cases}$

- É vantajoso começar por um sistema triangular, ou escalonado, e mostrar como a "substituição regressiva" o resolve facilmente (de $z=2$ vem $y=1$, donde $x=-3/2$). O aluno deve compreender a utilidade de passar dum sistema qualquer a um triangular equivalente.

- As três operações básicas que se usam na resolução dum sistema pelo método de Gauss são:
  (1) Trocar entre si duas equações do sistema.
  (2) Multiplicar ambos os membros duma equação por um número diferente de zero.
  (3) Substituir uma equação pela soma dela com outra.
  O aluno deve ser capaz de detectar onde se usa cada uma destas operações; por exemplo:

a) $\begin{cases} 2x+2y-z=4 \\ 3z=6 \\ y-2z=2 \end{cases} \underset{(1)}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} 2x+2y-z=4 \\ y-2z=2 \\ 3z=6 \end{cases} \underset{(2)}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} x+y-\frac{1}{2}z=2 \\ y-2z=2 \\ z=2 \end{cases} \quad \ldots$

b) $\begin{cases} 2x+y+z=1 \\ -2x-2y+z=7 \\ 4x+y=-2 \end{cases} \underset{(3)}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} 2x+y+z=1 \\ 3y+2z=8 \\ 4x+y=-2 \end{cases} \underset{(2),(3)}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} 2x+y+z=1 \\ 3y+2z=8 \\ -y-2z=\text{[illegible]} \end{cases} \Longleftrightarrow \ldots$

- O método de Gauss, ou do "pivot", consiste em tomar o coeficiente de x na 1ª equação - pivot - para anular os coeficientes de x nas restantes equações; toma-se depois o coeficiente de y na

Subtemas	Objectivos	Indicações Metodológicas

2^{a} equação - 2º pivot - e anulam-se os coeficientes de y nas seguintes; e assim sucessivamente. O"pivot" tem de ser diferente de zero, pelo que pode ser preciso trocar linhas.

- Para abordar o problema da indeterminação e impossibilidade, propor a intersecção de três planos como:

$$\begin{array}{r} \\ (-3) \\ (-1) \end{array}\begin{cases} x+2y+3z=10 \\ 3x-2y+z=6 \\ x-6y-5z=-14 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x+2y+3z=10 \\ -8y-8z=-24 \\ -8y-8z=-24 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x+2y+3z=10 \\ y+z=3 \\ \text{—} \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x=y+1 \\ z=3-y \end{cases} \left(\text{ou} \begin{cases} x=4-z \\ y=3-z \end{cases} \right)$$

mostrar que não há solução única (sistema indeterminado) e fazer a interpretação geométrica do resultado obtido; ou então, com os três planos:

$$\begin{cases} x+2y=5 \\ -x+z=1 \\ -y-\frac{z}{2}=2 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x+2y=5 \\ 2y+z=6 \\ -2y-z=4 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x+2y=5 \\ 0=10 \\ \text{—} \end{cases} \qquad \text{(sistema impossível)}$$

- Resolução de sistemas de equações lineares usando a matriz completa:
  - .Matriz triangular; matriz diagonal; matriz dos coeficientes; matriz completa.
  - .Operações elementares sobre as linhas.

- Ao trabalhar com a matriz do sistema as operações elementares traduzem-se agora em termos de "linhas":

(1) Trocar duas linhas;
(2) Multiplicar uma linha por um número diferente de zero;
(3) Substituir uma linha pela soma dela com outra.

Exemplo da resolução recorrendo à matriz completa e ao método de Gauss:

$$\begin{cases} 2x_1+x_2-2x_3=10 \\ 6x_1+4x_2+4x_3=2 \\ 10x_1+8x_2+6x_3=8 \end{cases} \qquad \begin{array}{r} \text{pivot} \\ \\ (-3) \\ (-5) \end{array}\begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 & \vdots & 10 \\ 6 & 4 & 4 & \vdots & 2 \\ 10 & 8 & 6 & \vdots & 8 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{array}{r} \\ \\ (-3) \end{array}\begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 & \vdots & 10 \\ 0 & 1 & 10 & \vdots & -28 \\ 0 & 3 & 16 & \vdots & -42 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 & \vdots & 10 \\ 0 & 1 & 10 & \vdots & -28 \\ 0 & 0 & -14 & \vdots & 42 \end{bmatrix}$$

Da última linha vem $x_3=-3$ donde, por substituição regressiva vem $x_2=2$ donde $2x_1+2+6=10$ ou seja $x_1=1$.

NOTA: Podem obter-se os valores das variáveis continuando a fazer operações sobre linhas até transformar a matriz triangular em matriz diagonal:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 & \vdots & 10 \\ 0 & 1 & 10 & \vdots & -28 \\ 0 & 0 & -14 & \vdots & 42 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 & \vdots & 10 \\ 0 & 1 & 10 & \vdots & -28 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & -3 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & \vdots & 4 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & 2 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & -3 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & \vdots & 2 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & 2 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & -3 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{cases} x_1=1 \\ x_2=2 \\ x_3=3 \end{cases}$$

(O"pivot" usa-se, agora, para anular os coeficientes sobre ele)

- Extensão do método de Gauss a sistemas de 4 equações.

- Descobrir um polinómio de 3º grau cujo gráfico passe nos pontos (1,-1), (2,-2), (-1,5), (-2,-1) pode ser uma actividade a propor: precisa da resolução dum sistema de 4 equações com 4 incógnitas e pode ser aproveitada para explicar o problema da pesquisa de leis matemáticas que traduzam resultados de experiências. Como actividade deve ser proposta a resolução de outros sistemas de 4 equações com 4 incógnitas.

Nº de aulas previstas: 6

5. FUNÇÕES VI - Funções trigonométricas em $\mathbb{R}$.

As funções trigonométricas podem estudar-se agora como funções de variável real recorrendo aos instrumentos da Análise Infinitesimal.

A importância destas funções ultrapassa largamente as aplicações geométricas conhecidas dos alunos; elas intervêm no estudo de muitos fenómenos físicos nomeadamente de natureza periódica. Por isso se inclui nesta unidade a transformação de expressões, a resolução de equações e o estudo de funções trigonométricas simples.

Subtemas	Objectivos	Indicações Metodológicas
- Seno, coseno e tangente como funções reais de variável real: domínio, período. Continuidade (informação).	- Transformar expressões trigonométricas. - Resolver equações trigonométricas.	- As fórmulas citadas referem-se a seno, co-seno e tangente; o uso de formulários deve ser consentido. O aluno deve saber usar $\cos 2a$ como $1-2\,\text{sen}^2 a$ ou $2\cos^2 a-1$, o que permite linearizar $\text{sen}^2 a$ e $\cos^2 a$.
- Fórmulas da diferença, da soma e da duplicação.	- Estudar analiticamente funções trigonométricas, (zeros, variação, concavidade, assimptotas...)	- Precedendo o estudo da derivada do seno o professor demonstrará que $\text{sen}\,x-\text{sen}\,a=2\,\text{sen}\,\frac{x-a}{2}\cos\frac{x+a}{2}$.
		- O limite de $\frac{\text{sen}\,x}{x}$ quando $x\to 0$ deve ser obtido a partir da intuição geométrica de que $\text{sen}\,x<x<\text{tg}\,x$ sendo x a medida do arco em radianos com valores próximos de zero.
Estudo do $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\text{sen}\,x}{x}$		- A partir da conclusão sobre $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\text{sen}\,x}{x}$ podem-se pedir ao aluno limites de sucessões como $u_n=n\,\text{sen}\,\frac{1}{n}$.
Derivadas (com demonstração). .do seno .do co-seno e da tangente. .derivadas sucessivas.		- No cálculo de áreas sob curvas chamar a atenção do aluno para o caso de a curva estar abaixo do eixo no intervalo pedido.
Estudo analítico do seno, co-seno e tangente; gráficos. Primitivas do seno e do co-seno.	- Calcular áreas sob gráficos de funções simples envolvendo seno ou co-seno.	- Níveis de dificuldade a não exceder: a) identidades a provar: $\frac{2\,\text{sen}\,2a-\text{sen}\,4a}{2\,\text{sen}\,a\,\cos a}=4\,\text{sen}^2 a$ b) equações a resolver: $\frac{\sqrt{3}\cos x}{3}+\text{sen}(\pi+x)=1$ ou $\text{sen}\,x+\cos 2x=0{,}5$ (calculadora) c) indeterminações a levantar: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\text{sen}\,x}{x-\text{tg}\,2x}$ d) funções a estudar: $f(x)=\frac{x}{2}+\text{tg}x$ em $[-2\pi, 2\pi]$ e) primitivas a calcular: $P(3\,\text{sen}\,\frac{x}{2})$

Nº de aulas previstas: 11

6. FUNÇÕES VII - Funções exponencial e logarítmica

Completa-se o conjunto de funções a conhecer no ensino secundário e aperfeiçoa-se o esboço de gráficos apoiado no estudo analítico.

As funções exponencial e logarítmica intervêm no estudo matemático de fenómenos diversos como o crescimento de populações de seres vivos, a desintegração radioactiva, a inflacção, a acidez duma solução ... Estão na base do funcionamento de instrumentos de cálculo e têm enorme importância em Matemática superior quando a base é o número de Neper.

Subtemas

- A sucessão $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$: estudo numérico; convergência; valores aproximados de $\underline{e}$.
- A função exponencial a^x com $a>1$, $x \in R$: propriedades; gráfico. Informação de que $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x}=1$ e de que $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^r}{e^x}=0$.
- Noção de logaritmo de x na base a com $a \in R^+ \setminus \{1\}$, propriedades. Referência às bases 2 e 10. Função $\log_a x$ com $a>1$: propriedades, gráfico.
- Derivada, primitivas, estudo analítico e gráfico da função a^x com $a>1$.
- Derivada, estudo analítico e gráfico da função $\log_a x$ com $a \ 1$.
- Primitivas de $\frac{k}{x}$. Derivadas sucessivas de funções exponenciais ou logarítmicas.
- Os símbolos de indeterminação 1^∞, 0^0, ∞^0.
- Justificação de que $\lim\limits_{x\to a} f(x)^{g(x)} = \lim\limits_{x\to a} e^{g(x)\,[f(x)-1]}$ se $\lim\limits_{x\to a} f(x)=1$

Objectivos

- Fazer o estudo analítico de funções em cuja definição entram funções exponenciais ou logarítmicas.
- Caracterizar a função inversa dum função exponencial (logarítmica) dada.
- Resolver equações em que intervêm logaritmos ou exponenciais.
- Calcular limites, nomeadamente levantar indeterminação dos tipos 1^∞, 0^0, ∞^0, de funções de variável real ou natural.
- Justificar ou estabelecer fórmulas para derivadas sucessivas de funções exponenciais; logarítmicas ou trigonométricas.

Indicações Metodológicas

- Para obter valores aproximados de $\underline{e}$ a partir da sucessão $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ programar a calculadora ou recorrer a um computador ; a demonstração da convergência desta sucessão (monotonia e majoração) ficará ao critério do professor face ao tipo de turma que tiver.
- O estudo duma função pode estar ligado à resolução de problemas concretos. Exemplos: 1."Uma substância radioactiva perde 50% da sua massa em 10 anos. A quanto se reduzem 100 Kg. dessa substância em 50 anos? E em t anos? Estude a função de t obtida". 2. "Um cabo estendido entre dois postes, em determinadas condições toma a forma do gráfico de $y=4e^x+e^{-x}$; estude a função e mostre que a altura mínima é 4 (menor valor que y pode tomar)".
- Devem ser dedicadas várias aulas ao estudo completo de funções - domínio, continuidade, zeros, assímptotas, monotonia, extremos relativos e absolutos, concavidades, pontos de inflexão ... Pode-se pedir também a área sob troços do gráfico; a área sob um ramo da hipérbole $\frac{1}{x}$ entre 1 e α será igual a 1 quando $\alpha=e$, o que sugere uma interpretação geométrica do número $\underline{e}$. Os gráficos podem ser feitos em papel milimétrico e com o apoio complementar da calculadora. É uma óptima oportunidade para trabalhos de grupo os quais podem envolver, como é evidente, qualquer dos tipos de funções dados nas unidades anteriores. Exemplos de trabalhos de grupo (dificuldade e não exceder):

  Faça o estudo analítico e gráfico 1. $x \to f(x) = \frac{x}{1-\log x}$ 2. $x \to g(x) = e^x \cdot \cos x$ em $\left[-2\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$.
- O aluno deve usar transformações como:

  $2^x = e^{x \log 2}$ $\log \frac{1}{x} = -\log x$ $\log_{10} 2 = \frac{1}{\log_2 10}$ $\log_2 x = \frac{\log x}{\log 2}$

  e deve saber deduzir que $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\log(x+1)}{x} = 1$ e $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\log x}{x-1} = 1$ a partir da informação sobre $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x}$.

  ($\log x = \ln x$ = logaritmo natural ou neperiano de x)

Subtemas	Objectivos	Indicações Metodológicas
		- Ao longo desta unidade a calculadora será um auxiliar importante, nomeadamente para mudanças de base. - Sugere-se a realização de pelo menos uma actividade utilizando papel logarítmico. - Pode fazer-se uma referência ao matemático escocês John Neper e à importância que os logaritmos tiveram no cálculo numérico. - Quanto às indeterminações do tipo 1^{∞} o aluno deve compreender que sendo $f(x)$ e $g(x)$ contínuas, com $f(x) > 0$ nas vizinhanças de a, é $\lim\limits_{x \to a} f(x)^{g(x)} = \lim\limits_{x \to a} e^{g(x) \cdot \log f(x)}$; se $f(x) \neq 1$ quando $x \to a$ então $\lim\limits_{x \to a} f(x)^{g(x)} = \lim\limits_{x \to a} e^{g(x) \cdot \frac{\log f(x)}{f(x)-1} \cdot (f(x)-1)} = \lim\limits_{x \to a} e^{g(x) \cdot (f(x)-1)}$ porque $\lim\limits_{f(x) \to 1} \frac{\log f(x)}{f(x)-1} = 1$. Exemplos: a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{x+1}{x}\right)^{3x} = \lim\limits_{x \to +\infty} e^{3x\left(\frac{x+1}{x} - 1\right)} = e^3$ b) $\lim\limits_{x \to 0} \cos 2x^{\frac{1}{x^2}} = \lim\limits_{x \to 0} e^{\frac{\cos(2x)-1}{x^2}} = \lim\limits_{x \to 0} e^{\frac{-2 \operatorname{sen}^2 x}{x^2}} = e^{-2}$ c) (variável natural) $\lim \left(\frac{n^2-2}{n^2+1}\right)^{5n} = \lim e^{5n\left(\frac{n^2-2}{n^2+1} - 1\right)} = e^0 = 1$

7. NOÇÕES DE GRUPO E DE CORPO: exemplos de suporte numérico. NÚMEROS COMPLEXOS

Nesta unidade abordam-se os conceitos de grupo e de corpo com o objectivo de dar uma visão geral e unificadora dos mais importantes conjuntos numéricos.

Tal como o conjunto $\mathbb{R}$ surge como extensão de $\mathbb{Q}$, aparece agora $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, como extensão de $\mathbb{R}$, dando solução a alguns problemas operatórios insolúveis no universo anteriormente conhecido. Os números complexos serão estudados na forma $a+bi$ com $a,\ b \in \mathbb{R}$.

Subtemas	Objectivos	Indicações metodológicas
- Operações binárias; propriedades; operação (ou lei de composição) interna; grupóide. - Grupo: definição, exemplos. - Corpo: definição, exemplos, com destaque especial para $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$; demonstração de que $-a.b=-(a.b)=a.(-b)$ e de que $0.a=0$ em qualquer corpo.	- Reconhecer grupóides. - Averiguar se um grupóide dado é grupo (suporte numérico, operações triviais) - Averiguar se um terno $(A,+,.)$ é corpo (suporte numérico, operações triviais).	- Os exemplos de grupóide, grupo e corpo a considerar incluirão os suportes $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ ou alguns dos seus subconjuntos algebrizados com as operações triviais, por exemplo $(\{a+b\sqrt{2}\},+,.)$, com $a,\ b \in \mathbb{Q}$. - A título de exemplo poderão apresentar-se algumas operações simples, como a média aritmética $(a*b=\frac{a+b}{2})$, a média geométrica $(a*b=\sqrt{a\cdot b})$ ou ainda $a*b=a^{\log b}$ para concluir se gozam ou não de dada propriedade. - Deixa-se ao critério do professor a referência a estruturas de suporte não numérico, como grupóides de funções com a operação "o", mas não é de exigir aos alunos a resolução de exercícios sobre esses grupóides.
- O problema da raiz quadrada de um número negativo; o símbolo i. - Extensão de $\mathbb{R}$ a $\mathbb{C}$: igualdade, adição e multiplicação de números complexos; conservação das regras de cálculo. Números conjugados; soma e produto. Divisão em $\mathbb{C}$. Reconhecimento de que $(\mathbb{C},+,.)$ é corpo. - Representação geométrica de um complexo; correspondência entre $\mathbb{C}$ e o plano; entre $\mathbb{C}$ e $\mathbb{R}^2$, entre $\mathbb{C}$ e V_π. O número i como operador da "rotação de 90º".	- Operar com números complexos. - Calcular as raízes quadradas dum real negativo. - Interpretar geometricamente o produto dum complexo z por i e por $-i$.	- Uma perspectiva geral sobre a evolução do conceito de número é oportuna e válida para o enriquecimento cultural do aluno; pode constituir o tema de trabalhos de grupo a apresentar no final do ano lectivo para a avaliação, desde que seja fornecida bibliografia adequada e acessível. - O aluno deve realizar graficamente o produto de $a+bi$ por $i((0,1))$ o que se traduz por passar do vector (a,b) para o vector perpendicular $(-b,a)$: rotação de 90º no sentido directo; o mesmo quanto ao produto por $-i((0,-1))$: rotação de 90º no sentido retrógrado.

Nº de aulas previstas: 14

8. UNIDADE DE OPÇÃO — OPÇÃO A: O corpo $\mathbb{C}$ dos números complexos - estudo na forma trigonométrica.

Nas turmas onde predominam alunos que aspiram a cursos superiores de forte componente matemática/física esta será uma opção que constitui o prolongamento natural da unidade 7.

Os números complexos, t·balhados agora na forma trigonométrica, permitem esclarecer finalmente o problema de radiciação.

Algumas condições na ·····vel z serão interpretadas no plano de Argand.

Subtemas	Objectivos	Indicações Metodológicas
Representação trigonométrica de um número complexo, do seu conjugado, do seu simétrico, do seu inverso.	- Converter a forma algébrica na trigonométrica e vice-versa. - Operar com números complexos na forma trigonométrica e na forma algébrica.	
Multiplicação, divisão, potenciação radiciação de complexos na forma trigonométrica: fórmulas de Moivre.	- Determinar e representar graficamente as n raízes de índice n dum complexo	
Propriedades dos números conjugados. O módulo $\|z-z_0\|$ como distância; propriedades do módulo em $\mathbb{C}$; Interpretação geométrica de condições simples na variável complexa.	- Identificar domínios planos definidos por condições em z, com $z \in \mathbb{C}$. - Identificar, em casos simples, grupos com suporte contido em $\mathbb{C}$.	- As condições a interpretar não excederão o nível de dificuldade de $\left\|\frac{z-z_0}{z-z_1}\right\| \leq 1$; $\|z-z_2\|+\|z-z_1\| = 2a$; $0 \leq \arg i(z-z_0) \leq \frac{\pi}{2}$ $\|z-2\| \leq 2+\mathrm{Re}\, z$. (É necessário interpretar primeiro $\arg(z-z_0)=\alpha$ como semi-recta de origem z_0). Os domínios a identificar podem ser definidos por conjunção ou disjunção de condições e pode ser preciso transferir o problema para a representação cartesiana; os domínios serão limitados por rectas ou arcos de cónicas com equações conhecidas dos alunos. As situações não devem ser rebuscadas e devem envolver cálculos simples.

8. UNIDADE DE OPÇÃO. OPÇÃO B: ESPAÇO VECTORIAL (ou "espaço linear") SOBRE UM CORPO.

Outro possível prolongamento da unidade 7, na qual se estudaram duas importantes estruturas algébricas - grupo e corpo - é o estudo do conceito de espaço vectorial de que os alunos já conhecem exemplos e propriedades embora sem deles abstrair a estrutura.

O conceito de espaço vectorial tem uma enorme importância em Matemática assim como a classe de aplicações compatíveis com esta estrutura (aplicações lineares). É um conceito unificador de diferentes ramos da Matemática que tem encontrado muitas aplicações em Estatística, Economia, (por exemplo, na programação linear), na Física e na Engenharia.

Subtemas	Objectivos	Indicações Metodológicas
- Conceito de espaço vectorial (ou linear) sobre um corpo. Exemplos. Propriedades: $o\vec{u}=\vec{o}$; $a\vec{o}=\vec{o}$; $a\vec{u}=\vec{o} \iff a=o \vee \vec{u}=\vec{o}$.	- Averiguar se um conjunto dado é espaço/ /subespaço, vectorial real.	- R^2, R^3, V_π, V_E e $\mathbb{C}$, são conjuntos que o aluno já conhece algebrisados com a operação + ; é fácil salientar agora que são todos grupos comutativos e que os seus elementos podem ser multiplicados por um número real (escalar) ; das analogias entre as respectivas estruturas pode abstrair-se o conceito de espaço vectorial sobre um corpo.
- Subespaço linear: definição e critério; subespaço gerado por um conjunto de vectores.	- Averiguar se determinados vectores são linearmente dependentes ou independentes.	- A título de exemplo poderá referir-se $\mathbb{Q}$ ou $\mathbb{C}$ como corpo de escalares mas as questões a propor aos alunos serão sobre espaços vectoriais reais, nomeadamente R^n com $n=2,3,4$.
- Dependência e independência linear: teoremas elementares (com demonstração). Base: definição ; informação de que todo o espaço tem uma base.		- Entre os exemplos trabalhados na aula ou em trabalhos de grupo para fazer em casa, poderão aparecer espaços reais como {polinómios de grau $\leq n$} ; {funções contínuas em $[a,b]$} ; {sucessões convergentes}, {matrizes 3x3} ,... - As demonstrações dos teoremas referidos no programa podem fazer-se para um número determinado (3 ou 4 ou 5) de vectores; é o estilo de raciocínio que interessa e o aluno entenderá que a demonstração será análoga para qualquer número finito de vectores.
- Teorema (com demonstração): Se E tem uma base de cardinal p, quaisquer p vectores independentes geram E (logo formam nova base).	-Reconhecer e determinar bases e dimensões de um espaço linear real (ou subespaço).	
Corolário (com demonstração): Se E tem uma base de cardinal p quaisquer p+1 vectores são dependentes ou seja, não pode haver em E mais de p vectores livres.		
- Dimensão dum espaço linear; R^n tem dimensão n; base canónica.		

8. UNIDADE DE OPÇÃO   OPÇÃO C: Complementos sobre primitivação. Iniciação às equações diferenciais

Doc. de Trabalho

Esta opção interessa a alunos que se destinam a bacharelatos ou licenciaturas técnico-industriais, a engenharias, a biologia.

Visa dar uma ideia de como se podem resolver equações em que figura uma função desconhecida e a sua derivada ou derivadas - equações diferenciais - as quais surgem no estudo de certos fenómenos em Cinemática, Electricidade, Biologia e outros campos. Só exemplos muito elementares podem ser resolvidos.

Precedendo esta abordagem há um reforço do cálculo de primitivas e introduz-se a noção de diferencial.

Subtemas	Objectivos	Indicações Metodológicas
- Primitivação por decomposição e por partes.	- Primitivar funções (simples); determinar a primitiva que verifica uma dada condição.	- As funções a primitivar não devem exceder a dificuldade de: $ax^2+sen(ax+b)$; cos^2x ; $sen(mx)cos(nx)$; $x^2.e^{ax}$; $log\,x$.
- Noção de diferencial de uma função; aplicações numéricas. Derivada como quociente de diferenciais.	- Calcular áreas entre 2 gráficos de equações dadas. - Calcular o diferencial de uma função.	Pode-se exemplificar como o diferencial permite resolver problemas práticos como calcular o volume de tinta necessário para cobrir um depósito esférico com 3m de raio, de forma que a camada de tinta tenha 4 mm de espessura.
- Equações diferenciais elementares; exemplos de situações em que podem surgir; resolução dos tipos $y'=f(x)$ $y''=f(x)$ $y'=ay+b$ $y''=ay$ $y'=ay^2$.	- Determinar uma solução duma equação diferencial satisfazendo a uma condição dada. - Resolver problemas simples usando equações diferenciais.	- Exemplo de equações muito simples para encontrar a solução que satisfaz a dada condição: 1. Sendo $y'=6x$, determine y de modo que o gráfico da função passe em $(2,3)$ (vem $y=3x^2+c$ donde $c=-9$) 2. Dada a equação diferencial $y'=y+1$ vem $\frac{y'}{y+1}=1$ donde, primitivando, $log\|y+1\|=x+c$; pondo $c=log\,k$ vem $log\|y+1\|=log(k.e^x)$; $\|y+1\|=k.e^x$; se $y(0)=3$ será $k=4$ donde $\|y+1\|=4e^x$ - Temas da Geometria, da Física, do crescimento de populações, de transformações radioactivas, dão origem a problemas que se resolvem usando equações diferenciais simples. Exemplos: 1. Calcular a equação dos espaços do movimento de um corpo, sabendo que a velocidade em cada instante é o dobro do tempo gasto e no instante $t=1$ o espaço percorrido é $e=4m$. Temos $v=\frac{de}{dt}$ e $\frac{de}{dt}=2t$, donde $e=t^2+c$ Como $t=1$ implica que seja $e=4$, vem $4=1^2+c$ $c=3$ e $e=t^2+3$ b) A aceleração de um móvel é $a=10m/s^2$ e no instante $t=0$ vem $v=\frac{de}{dt}=-2$ m/s e $e=3m$. Determinar a equação do espaços.

Ano

8. OPÇÃO C. Complementos sobre Primitivação. Iniciação às equações diferenciais.

Doc. de Trabalho

Subtemas	Objectivos	Indicações Metodológicas
		Tem-se $a=\frac{d^2e}{dt^2}$ e $\frac{d^2e}{dt^2}$ $\frac{de}{dt}=10t+c_1$ $e=5t^2+c_1t+c_2$ com $t=0$, vem $-2=10\times0+c_1$ $3=5\times0^2+c_1\times0+c_2$ donde $c_1=-2$ e $c_2=3$ e, por isso, $e=5t^2-2t+3$ 2. A população de uma cidade aumenta proporcionalmente à mesma. Se em 40 anos aumentou de 40.000 para 90.000, qual será a população ao fim de 60 anos? $y'=ky$ $\frac{y'}{y}=k$ $\log y=kt+\log c$ $\log\frac{y}{c}=kt$ $\frac{y}{c}=e^{kt}$ e, ainda $y=c\,e^{kt}$ Como $t=0\Rightarrow y=40.000$, vem $40.000=c\,e^{k.0}$ $c=40.000$ e $y=40.000\,e^{kt}$ Como $t=40\Rightarrow y=90.000$, vem $90.000=40.000.e^{40k}$ $e^{40k}=\frac{9}{4}$ $k=\frac{1}{40}\log 2,25$ Por isso $y=40.000.\,e^{\frac{1}{40}(\log 2,25)t}$ ou seja $y=40.000\times(2,25)^{\frac{t}{40}}$ Com $t=60$ vem $y=40.000.(2,25)^{\frac{60}{40}}=40.000\times(2,25)^{1,5}=135.000.$

Nº. de aulas previstas: 16

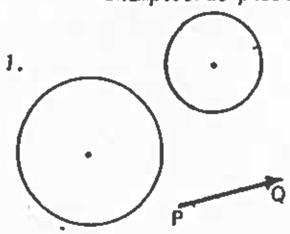
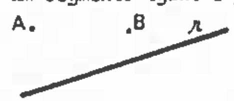
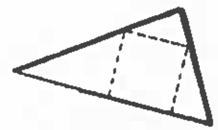
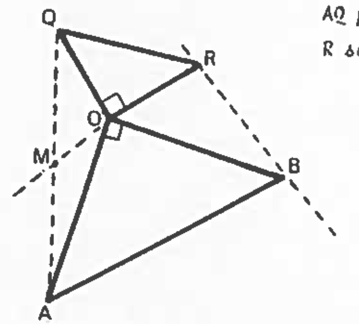
8. UNIDADE DE OPÇÃO: OPÇÃO D: TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS DO PLANO.

O conceito de transformação permite simplificar de forma unificadora e dinâmica o estudo das propriedades das figuras, lançando uma nova luz sobre a ligação entre vários domínios da Geometria. Por outro lado a noção de grupo ajuda a sistematizar as diversas transformações geométricas já conhecidas do aluno (translações, rotações, simetrias, isometrias) e ainda homotetias e semelhanças. Esta é uma boa opção para alunos que se destinam a cursos ou profissões ligados a desenho técnico, design ou arquitectura.

Subtemas	Objectivos	Indicações Metodológicas
- Transformação geométrica do plano: definição; exemplos; pontos invariantes; figuras globalmente invariantes. - Grupos de transformações geométricas. - Conjunto T das translacções do plano. O grupo (T,o). Propriedades que se conservam na translacção. - Conjunto Ro das rotações de centro O grupo (Ro,o). Propriedades que se conservam. Simetria central. - Simetria axial de eixo e: invariantes. Propriedades que se conservam numa simetria. - Verificação gráfica dos teoremas: "a composta de duas simetrias de eixos paralelos é uma transformação" e "toda a translação se pode decompor em duas simetrias".	- Justificar que um dado conjunto de transformações é grupo. - Justificar raciocínios recorrendo às propriedades que se conservam em dada transformação.	- Com excepção das questões relacionadas com a estrutura de grupo, todas as actividades a propor ao aluno serão de natureza gráfica como, por exemplo, determinar o centro duma homotetia dados objecto e imagem; determinar eixos de simetrias para decompor uma rotação (ou translação) dada; determinar imagens dadas pela composta duma homotetia como uma simetria ou uma isometria positiva; determinar uma homotetia e uma isometria que apliquem uma figura dada noutra semelhante dada; determinar o centro e a amplitude da composta duma translação com uma rotação dadas. - A composição de rotações e de rotação com translação pode ser feita decompondo estas transformações em simetrias.

8. UNIDADE DE OPÇÃO: OPÇÃO D: TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS DO PLANO.

Doc. de Trabalho

Subtemas	Objectivos	Indicações Metodológicas
"A composta de duas simetrias de eixos concorrentes é uma rotação" e "toda a rotação se pode decompor em duas simetrias."	- Decompor uma rotação ou uma translação em duas simetrias e compor simetrias.	
- Justificação gráfica de que: "A composta de rotação com translação é rotação. "A composta de 2 rotações é translação ou rotação".	- Caracterizar graficamente a composta de rotação com translação e de duas rotações de centros diferentes. (Determinar centro e amplitude da rotação ou vector da translação).	Exemplos de problemas a resolver:
- O grupo ($\overline{D}R$, ∘) (grupo das isometrias positivas do plano ou dos deslocamentos do plano).		1.  a) determinar cordas da circunferência maior paralelas e iguais a [PQ] . b) "apoiar" nas duas circunferências um segmento igual e paralelo a [PQ].
- O grupo das isometrias. Isometrias negativas.	- Pesquisar transformações que deixam globalmente invariante numa figura dada.	 2. Determinar o caminho mais curto de A a B tocando a recta r
- O conjunto das homotetias do plano com centro em O: $\mathcal{H}_O$	- Obter imagens ou o centro ou a razão numa homotetia dada.	 3. Inscrever um quadrado num triângulo dado.
O grupo ($\mathcal{H}_O$, ∘) Propriedades que se conservam na homotetia.	- Resolver graficamente problemas recorrendo a transformações.	4. Dados dois triângulos rectângulos isósceles [OAB] e [ORQ] e sendo M o ponto médio de AQ prove MO BR. Sugestão: usar a rotação de centro O que aplica R sobre Q e mostre que a imagem de BR fica paralela a OM. 
- Noção de semelhança. Informação de que toda a semelhança é composta de homotetia com isometria.		
O grupo de semelhanças do plano (informação).		
Propriedades que se conservam na semelhança.		

Nº de aulas previstas: 16

CONSULTAS BIBLIOGRAFICAS ACONSELHADAS PARA
CADA UNIDADE

À frente de cada título estão indicados os números que se referem às obras que constam da Bibliografia Geral, página 27.

12º ANO

. Probabilidades II .... (1), (14), (16)
. Funções IV .... (1), (17)
. Geometria Analítica IV .... (3), (8), (9), (A), (C)
. Sistemas de equações lineares .... (4), (12)
. Funções VI .... (1), (4)
. Funções VII - .... (1)
. Grupos e corpos .... (1), (13)

Opções

. O Conjunto C .... (7), (13), (B)
. Complementos sobre primitivação .... (17-CE.Tome 1)
. Espaços lineares .... (1), (13)
. Transformações geométricas .... (18), (17), (17, 1º. Tome 2)