1. Pela observação da informação representada na figura, sabemos que o número de inscrições por cada zona, é:

   - Zona Norte: $4 \times 10 = 40$ pessoas inscritas;
   - Zona Centro: $3{,}5 \times 10 = 35$ pessoas inscritas;
   - Zona Sul: $3 \times 10 = 30$ pessoas inscritas.

   Assim, aplicando o método descrito, temos que:

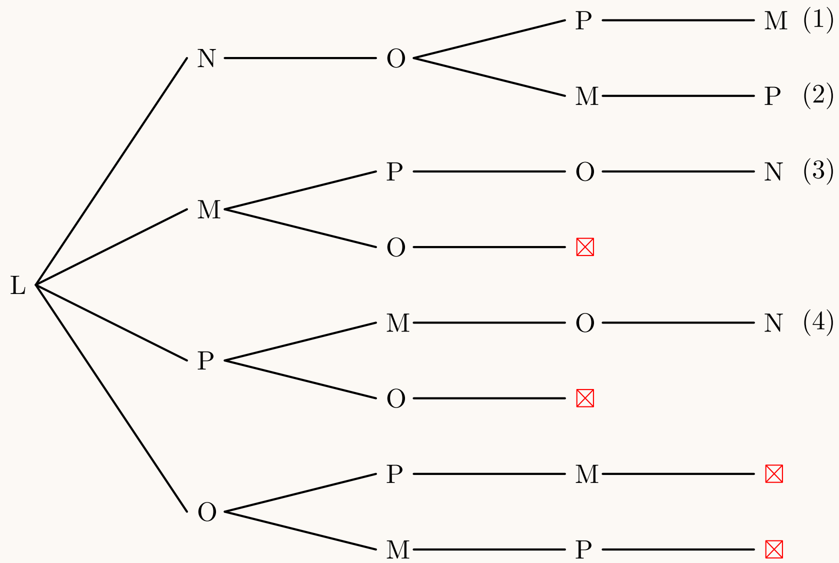
	Zona Norte	**Zona Centro**	**Zona Sul**
Número de inscrições	40	35	30
Divisor padrão	$\frac{105}{15} = 7$		
Quota padrão	$\frac{40}{7} \approx 5{,}7$	$\frac{35}{7} = 5$	$\frac{30}{7} \approx 4{,}3$
Primeira atribuição	–	5	–
L	5	–	4
$\sqrt{L(L+1)}$	$\sqrt{5 \times 6} = \sqrt{30} \approx 5{,}5$	–	$\sqrt{4 \times 5} = \sqrt{20} \approx 4{,}5$
Quota modificada	$5 + 1 = 6$	—	4

   Desta forma, a comissão deve ser constituída por:

   - 6 moradores da Zona Norte;
   - 5 moradores da Zona Centro;
   - 4 moradores Zona Sul.

2.

2.1. Analisando o grafo da figura, e determinando todas as visitas que se podem definir nas condições descritas, através de um diagrama em árvore, temos:



Assim, vem que:

O presidente da junta de freguesia verificou que existem **4** percursos possíveis, mas, se quiser visitar o expositor N depois de visitar o expositor O, apenas existe(m) **2** percurso(s) possível(is).
Verificou também que não poderia visitar o expositor M imediatamente a seguir ao expositor **N** e que, imediatamente a seguir a visitar o expositor N, poderia visitar o expositor **O** .

Logo, as correspondências corretas são:

- **I → c)**
- **II → b)**
- **III → a)**
- **IV → b)**

2.2. De acordo com a tabela e com a aplicação do algoritmo, iniciando a verificação no restaurante, $R1$, obtemos a seguinte ordenação dos troços e um grafo ponderado que representa o percurso escolhido pela aplicação do método descrito:

I - $R1$ - P (214 m)

II - P - O (200 m)

III - O - M (255 m)
(não se seleciona o troço O-P porque P já foi visitado)

IV - M - L (284 m)
(O, P e $R1$ já foram visitados)

IV - L - N (401 m)
(todos os restantes já foram visitados.)

Desta forma, o percurso que respeita as condições definidas, é:

$$R1 \rightarrow P \rightarrow O \rightarrow M \rightarrow L \rightarrow N$$

E a distância, em metros, percorrida pelo Rui, é:

$$214 + 200 + 255 + 284 + 401 = 1354 \text{ m}$$

3. Identificando os valores de que depende o cálculo do salário líquido, SL, temos:

   - $SB = 1500$
   - $SR = 5{,}2 \times 22 = 144{,}4$, correspondente a 22 dias de trabalho;
   - $SS = 1500 \times 0{,}11 = 165$ correspondente a 11%; do salário bruto;
   - $1500 \times 0{,}146 = 219$ correspondente á taxa de 14,6% indicada na tabela para um salário bruto compreendido entre 1437 e 1577 e a 2 dependentes.

   Assim, temos que o valor do salário líquido, de acordo com a fórmula de cálculo, é:

   $$SL = SB + SR - SS - RF = 1500 + 144{,}4 - 165 - 219 = 1230{,}4 \text{ euros}$$

4. Procedendo à distribuição dos bens, aplicando o método descrito, temos:

	Augusto	**Joaquim**
X	32	24
Y	38	51
Z	30	25
Atribuição temporária	X+Z	Y
Total temporário	$32 + 30 = 62$	51
Diferença	X:$32 - 24 = 8$; Y:$51 - 38 = 13$; Z:$30 - 25 = 5$	
Bem usado no ajuste	Z	
Designação	A	B
Total final de pontos	$62 - \frac{x}{100} \times 30$	$51 + \frac{x}{100} \times 25$

   Igualando os dois totais finais e revolvendo a equação que traduz a partilha equilibrada, vem:

   $$62 - \frac{x}{100} \times 30 = 51 + \frac{x}{100} \times 25 \Leftrightarrow 62 - \frac{x \times 30}{100} = 51 + \frac{x \times 25}{100} \Leftrightarrow 62 - 0{,}3x = 51 + 0{,}25x \Leftrightarrow$$

   $$\Leftrightarrow 62 - 51 = 0{,}25x + 0{,}3x \Leftrightarrow 11 = 0{,}55x \Leftrightarrow \frac{11}{0{,}55} = x \Leftrightarrow x = 20$$

   Assim, a partilha final dos bens pelos dois amigos é:

   - O Joaquim (B) recebe o bem Y e mais 20% do bem Z;
   - O Augusto recebe o bem X mais $100 - 20 = 80\%$ do bem Z.

   Assim, vem que:

   O prémio temporariamente destinado ao Joaquim foi o prémio **Y** , sendo o total de pontos dos prémios temporariamente destinados ao Augusto igual a **62** . O prémio a utilizar no ajuste da partilha é o prémio **Z** . Na partilha final dos prémios, o Augusto terá direito a **80** desse prémio.

   Logo, as correspondências corretas são:

   - **I** $\rightarrow$ **b)**
   - **II** $\rightarrow$ **b)**
   - **III** $\rightarrow$ **c)**
   - **IV** $\rightarrow$ **c)**

5.

5.1. Analisando o número de habitantes no início de cada uma das décadas e o crescimento associado, temos:

Anos	N.º de habitantes	Crescimento
1980	$A(1)=\frac{10566}{1+5\times e^{-0,8\times 1}}\approx 3254$	—
1990	$A(2)=\frac{10566}{1+5\times e^{-0,8\times 2}}\approx 5258$	$5258-3234=2004$
2000	$A(3)=\frac{10566}{1+5\times e^{-0,8\times 3}}\approx 7269$	$7269-5258=\mathbf{2011}$
2010	$A(4)=\frac{10566}{1+5\times e^{-0,8\times 4}}\approx 8777$	$8777-7269=1508$
2020	$A(5)=\frac{10566}{1+5\times e^{-0,8\times 5}}\approx 9679$	$9679-8777=902$

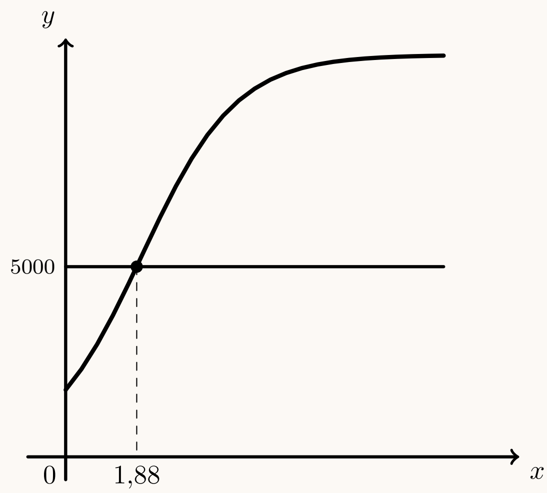
Logo é possível verificar que, de entre os intervalos de tempo apresentados, aquele em que se verificou o crescimento da população mais acentuado foi entre o inicio de 1990 e o início de 2000.

Resposta: **Opção B**

5.2. Representamos na calculadora gráfica os gráficos do número de habitantes em função do tempo $\left(y=\dfrac{10\,566}{1+5e^{-0,8x}}\right)$ e da reta correspondente aos 5 milhares de habitantes ($y=5000$), numa janela compatível com o limite temporal do modelo, ou seja, $x\geq 0$, que se encontra reproduzido na figura seguinte.

Usando a função da calculadora para determinar valores aproximados das coordenadas do ponto de interseção do modelo com a reta, obtemos o valor aproximado (às centésimas) da abcissa do ponto de interseção, ou seja, o valor correspondente ao tempos em que o número de habitantes da freguesia era 5000, ou seja, os pontos de coordenadas $(1{,}88\,;\,5000)$.

Assim, como $A(1{,}88)\approx 5000$, sabemos que a ampliação do centro de saúde aconteceu 1,88 décadas após o inicio de 1970, ou seja, num período de tempo compreendido entre 1 e 2 décadas ($1<1{,}88<2$) após o inicio de 1970, o que nos permite garantir que a ampliação ocorreu entre 1980 e 1990, ou seja, na década de 80.



5.3. Calculando o número de habitantes, em cada uma das duas freguesias, no inicio de 1970, ou seja, para $t = 0$, temos:

- $A(0) = \dfrac{10566}{1 + 5 \times e^{-0,8\times 0}} = 1761$
- $B(0) = \dfrac{a}{1 + 4 \times e^{-0,7\times 0}} = \dfrac{a}{1 + 4 \times e^{0}} = \dfrac{a}{1 + 4 \times 1} = \dfrac{a}{5}$

Como, nesta data, as duas freguesias tinham o mesmo número de habitantes, estes valores são iguais, pelo que podemos calcular o valor de a:

$$\frac{a}{5} = 1761 \Leftrightarrow a = 1761 \times 5 \Leftrightarrow a = 8805$$

E assim, substituindo o valor de a no modelo, temos que o número de habitantes da freguesia de Bileira, com arredondamento às unidades, no início do ano de 2020, ou seja, para $t = 5$, é:

$$B(5) = \frac{8805}{1 + 4 \times e^{-0,7\times 5}} \approx 7856$$

6. Consideramos a experiência aleatória que consiste em escolher, ao acaso, uma rifa da quermesse, e os acontecimentos:

V:≪A rifa é verde≫
Pr:≪A rifa é premiada≫

Organizando os dados numa tabela obtemos:

- Número total de rifas: 200
- Número de rifas verdes: 120
- Número de rifas não verdes: $200 - 120 = 80$
- Número de rifas verdes premiadas: $\dfrac{1}{4} \times 120 = 30$
- Número de rifas não verdes premiadas: 30
- Número de rifas não verdes e não premiadas: $80 - 30 = 50$

	V	$\overline{V}$	
Pr	30	30	
$\overline{Pr}$		50	
	120	80	200

Desta forma, a probabilidade de a rifa escolhida não ser premiada, sabendo-se que não é verde,na forma de dízima,é:

$$P\left(\overline{Pr}|\overline{V}\right) = \frac{P\left(\overline{Pr} \cap \overline{V}\right)}{P\left(\overline{V}\right)} = \frac{\frac{50}{200}}{\frac{80}{200}} = \frac{50}{80} = \frac{5}{8} = 0,625$$

7. Considerando a variável aleatória X que define o tempo que cada cliente aguarda até ser atendido na zona de restauração da Festa da Freguesia, como esta segue uma distribuição normal, com $\mu = 15$ minutos e $15 - 8 = 7$ tal como $15 + 8 = 23$, temos que 7 e 23 são valores equidistantes do valor médio.

   Como numa distribuição normal $P\left(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma\right) \approx 0{,}9545$, e neste caso, $P\left(\mu - 8 < X < \mu + 8\right) \approx 0{,}9545$, podemos calcular o valor do desvio padrão:

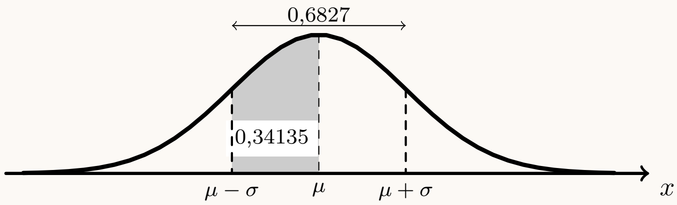
$$2\sigma = 8 \Leftrightarrow \sigma = \frac{8}{2} \Leftrightarrow \sigma = 4$$

   Assim, como a distribuição normal é simétrica em relação ao valor médio, a probabilidade de um cliente aguardar entre 11 e 15 minutos, é:

$$P(11 < X < 15) = P(12 - 4 < X < 15) =$$

$$= P(\mu - \sigma < X < \mu) = \frac{P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma)}{2} \approx$$

$$\approx \frac{0{,}6827}{2} \approx 0{,}34135$$



   Logo, dos 1550 clientes que foram atendidos naquele dia, espera-se que o número dos que devem esperar entre 11 e 15 minutos, seja:

$$1550 \times 0{,}34135 \approx 529$$

8.

   8.1. Analisando os valores da temperatura máxima em cada um dos dias e a variação em relação ao dia anterior, temos:

Dia	Temperatura máxima (°C)	Variação (°C)
7 (domingo)	26	—
8 (segunda)	23	$23 - 26 = -3$
9 (terça)	28	$28 - 23 = 5$
10 (quarta)	29	$29 - 28 = 1$
11 (quinta)	29	$29 - 29 = 0$
12 (sexta)	28	$28 - 29 = -1$
13 (sábado)	26	$26 - 28 = -2$

   Logo, observando em concreto os valores da variação de segunda, sexta e sábado, podemos concluir que o gráfico de variação da temperatura máxima, relativamente ao dia anterior é o que está representado na opção D.

   Resposta: **Opção D**

8.2. Organizando os dados relativos aos valores da temperatura mínima (16; 15; 16; 16; 15; 15; 14), da temperatura máxima (26; 23; 28; 29; 29; 28; 26) e da precipitação acumulada diária (1; 0,5;0,1; 0,2; 0; 0,3; 3), em três listas na calculadora gráfica e calculando as medidas estatísticas de cada uma das variáveis, obtemos os seguintes valores, relativos à média, mediana, 1.º quartil, desvio padrão, e amplitude:

	Temperatura mínima	Temperatura máxima	Precipitação acumulada diária
Média	15,2857	27	0,7286
Mediana	15	28	0,3
1º quartil	15	26	0,1
Desvio padrão	0,6999	2	0,9765
Amplitude	2	6	3

E assim, podemos estabelecer as correspondências seguintes:

- **(1) - (b)** O conjunto dos dados é o que apresenta média inferior à mediana são os da temperatura máxima;
- **(2) - (a)** O conjunto dos dados é o que apresenta o primeiro quartil igual à mediana para a variável temperatura mínima;
- **(3) - (c)** De segunda para terça, os valores da precipitação decresceram (de 0,5 para 0,1) e os valores das temperaturas miníma e máxima cresceram (de 15 para 16 e de 23 para 28, respetivamente) e em nenhum outro par de dias se verificou uma tendência semelhante;
- **(4) - (c)** Os valores da precipitação são todos diferentes,pelo que nenhum deles tem uma frequência maior que os restantes, pelo que não existe moda, ou seja, o conjunto dos dados é amodal;
- **(5) - (a)** O conjunto dos dados é o que apresenta menor dispersão em relação à média, que pode ser identificado através do valor do desvio padrão que é menor, são os dados relativos à temperatura mínima;
- **(6) - (b)** A amplitude dos dados da temperatura mínima é igual a 6;
- **(7) - (c)** Relativamente à temperatura mínima existem 3 dados acima da média, ou seja, mais de 30% $\left(3 \times \frac{100}{7} \approx 42{,}86\right)$; relativamente à temperatura máxima existem 4 dados acima da média, ou seja, mais de 30% $\left(4 \times \frac{100}{7} \approx 51{,}14\right)$ e relativamente à precipitação acumulada existem 2 dados acima da média, ou seja, menos de 30% $\left(2 \times \frac{100}{7} \approx 28{,}57\right)$

Resposta: **(a) - 2,5**; **(b) - 1,6** e **(c) - 3,4,7**

8.3. Designando por d, o valor da descida da temperatura máxima entre dois dias correspondentes das duas semanas, e calculado a soma das temperaturas registadas, temos:

- entre os dias 7 e 13: $26 + 23 + 28 + 29 + 29 + 28 + 26 = 189$
- entre os dias 14 e 20: $(26-d)+(23-d)+(28-d)+(29-d)+(29-d)+(28-d)+(26-d) = 189-7d$
- nos 14 dias da Festa: $189 + 189 - 7d = 378 - 7d$

Assim, sabendo que a média dos 14 dias da Festa foi de 25,5 °C, podemos calcular o valor d, da a descida da temperatura máxima entre os dias 7 e 14:

$$\frac{378-7d}{14} = 25{,}5 \Leftrightarrow 378 - 7d = 25{,}5 \times 14 \Leftrightarrow 378 - 7d = 357 \Leftrightarrow 378 - 357 = 7d \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 378 - 357 = 7d \Leftrightarrow 21 = 7d \Leftrightarrow \frac{21}{7} = d \Leftrightarrow d = 3$$

9. Como a amostra tem dimensão superior a 30, podemos determinar o intervalo de confiança, sabendo:
   - A dimensão da amostra: $n = 90 + 420 + 210 + 180 = 900$
   - A proporção amostral do número de visitantes que visitaram a Festa da Freguesia pela primeira vez: $\hat{p} = \dfrac{90}{900} = 0{,}1$
   - O valor de z para um nível de confiança de 90%: $z = 1{,}645$

   Assim, calculando os valores dos extremos do intervalo de confiança $\left(\left] \hat{p} - z\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} , \hat{p} + z\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \right[\right)$, e arredondando os valores às centésimas, temos:

$$\left] 0{,}1 - 1{,}645\sqrt{\frac{0{,}1(1-0{,}1)}{900}} \; ; \; 0{,}1 + 1{,}645\sqrt{\frac{0{,}1(1-0{,}1)}{900}} \right[\approx \left]0{,}08; 0{,}12\right[$$