

Exame Final Nacional de Matemática Aplicada às Ciências Sociais
Prova 835 | 2.ª Fase | Ensino Secundário | 2023

11.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 55/2018, de 6 de julho | Decreto-Lei n.º 22/2023, de 3 de abril

Duração da Prova: 150 minutos. | Tolerância: 30 minutos.

15 Páginas

A prova inclui 9 itens, devidamente identificados no enunciado, cujas respostas contribuem obrigatoriamente para a classificação final. Dos restantes 5 itens da prova, apenas contribuem para a classificação final os 3 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.

Para cada resposta, identifique o item.

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta.

Não é permitido o uso de corretor. Risque aquilo que pretende que não seja classificado.

É permitido o uso de régua, compasso e calculadora gráfica.

Apresente apenas uma resposta para cada item.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

A prova inclui um formulário.

Nas respostas aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Nas respostas aos itens que envolvem cálculos, apresente todas as justificações necessárias e todos os cálculos que tiver de efetuar.

Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

Sempre que recorrer à calculadora, apresente, consoante a situação, todos os elementos relevantes visualizados na sua utilização, como:

- os gráficos obtidos, com os pontos relevantes assinalados (por exemplo, pontos de intersecção de gráficos, pontos de máximos e pontos de mínimos);
- as linhas da tabela obtida que são relevantes para a resolução;
- as listas que introduziu na calculadora para obter as estatísticas relevantes para a resolução (por exemplo, média, desvio padrão, coeficiente de correlação e declive e ordenada na origem de uma reta de regressão).

Formulário

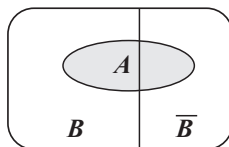
Modelos de grafos

Condição necessária e suficiente para que um grafo conexo admita circuitos de Euler

Um grafo conexo admite circuitos de Euler se e só se todos os seus vértices forem de grau par.

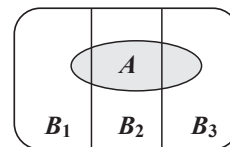
Modelos de probabilidade

Teorema da probabilidade total e regra de Bayes



$$\begin{aligned}P(A) &= P(A \cap B) + P(A \cap \bar{B}) = \\ &= P(B) \times P(A | B) + P(\bar{B}) \times P(A | \bar{B})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}P(B | A) &= \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \\ &= \frac{P(B) \times P(A | B)}{P(B) \times P(A | B) + P(\bar{B}) \times P(A | \bar{B})}\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}P(A) &= P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2) + P(A \cap B_3) = \\ &= P(B_1) \times P(A | B_1) + P(B_2) \times P(A | B_2) + P(B_3) \times P(A | B_3)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}P(B_k | A) &= \frac{P(A \cap B_k)}{P(A)} = \\ &= \frac{P(B_k) \times P(A | B_k)}{P(B_1) \times P(A | B_1) + P(B_2) \times P(A | B_2) + P(B_3) \times P(A | B_3)}\end{aligned}$$

podendo k tomar os valores 1, 2 ou 3

Modelo normal

Se X é $N(\mu, \sigma)$, então:

$$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0,6827$$

$$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0,9545$$

$$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0,9973$$

Intervalos de confiança

Intervalo de confiança para o valor médio μ de uma variável aleatória normal X , admitindo que se conhece o desvio padrão da variável

$$\left] \bar{x} - z \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right[$$

n – dimensão da amostra
 \bar{x} – média amostral
 σ – desvio padrão da variável
 z – valor relacionado com o nível de confiança (*)

Intervalo de confiança para o valor médio μ de uma variável aleatória X , admitindo que se desconhece o desvio padrão da variável e que a amostra tem dimensão superior a 30

$$\left] \bar{x} - z \frac{s}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z \frac{s}{\sqrt{n}} \right[$$

n – dimensão da amostra
 \bar{x} – média amostral
 s – desvio padrão amostral
 z – valor relacionado com o nível de confiança (*)

Intervalo de confiança para uma proporção p , admitindo que a amostra tem dimensão superior a 30

$$\left] \hat{p} - z \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}, \hat{p} + z \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \right[$$

n – dimensão da amostra
 \hat{p} – proporção amostral
 z – valor relacionado com o nível de confiança (*)

(*) Valores de z para os níveis de confiança mais usuais

Nível de confiança	90%	95%	99%
z	1,645	1,960	2,576

* 1. No verão passado, o José viajou pelas Caraíbas num navio de cruzeiro. No penúltimo jantar da viagem, como é tradição, o comandante do navio colocou à votação dos turistas a escolha do empregado mais popular da zona de restauração. Na viagem que o José realizou, a escolha foi feita entre a Ana (A), o Bernardo (B), o Carlos (C) e a Diana (D).

Ao votar, cada turista tinha de dispor os nomes dos quatro empregados, A , B , C , e D , de acordo com a ordem da sua preferência.

Cada um dos turistas votou uma única vez, correspondendo cada ordenação efetuada a um voto.

Para representar o resultado da votação:

- desenharam-se quatro círculos concêntricos com diferentes raios;
- definiram-se tantos sectores circulares quanto o número de listas de preferências obtidas, sendo a amplitude dos sectores proporcional ao número de votos em cada lista.

Cada sector é composto por quatro faixas circulares; na faixa mais próxima do centro, regista-se o empregado que ocupa a primeira posição na lista de preferências, na faixa seguinte, apresenta-se o empregado que ocupa a segunda posição na lista de preferências, e assim sucessivamente.

Na Figura 1, representa-se o resultado dos 900 votos validamente expressos.

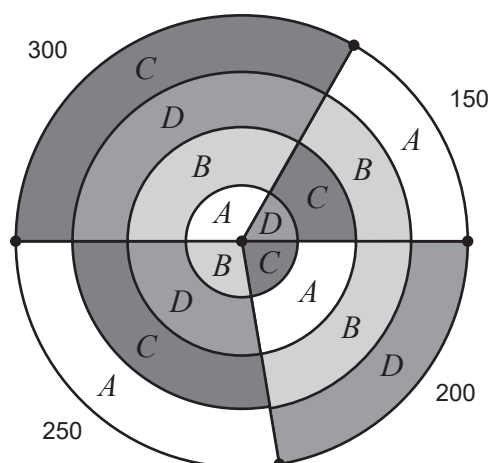


Figura 1

Da análise da Figura 1, conclui-se que se obtiveram quatro listas de preferências e que, por exemplo, 150 pessoas votaram na lista em que o empregado D ocupa a primeira preferência, o empregado C ocupa a segunda preferência, o empregado B ocupa a terceira preferência, e o empregado A ocupa a quarta preferência.

Para apurar o empregado mais popular da zona de restauração, decidiu-se aplicar o método a seguir descrito.

- Efetua-se a contagem do número de votos em cada empregado, como primeira preferência, e verifica-se se algum deles obtém a maioria absoluta. Caso isso se verifique, esse empregado é o mais popular da zona de restauração.
- Caso contrário, o empregado que obteve o menor número de votos, como primeira preferência, é eliminado de todos os quatro sectores. Cada um dos sectores é reestruturado de modo que os empregados que ocupavam as faixas circulares mais afastadas do centro do que a faixa do empregado eliminado se movem uma posição em direção ao centro, mantendo-se a mesma ordem.
- Após a reestruturação dos sectores circulares, aplicam-se novamente os procedimentos anteriores.
- O processo repete-se até que um dos empregados obtenha a maioria absoluta como primeira preferência.

Complete o texto seguinte, selecionando a opção adequada a cada espaço.

Escreva na folha de respostas cada um dos números, **I**, **II**, **III** e **IV**, seguido da opção **a)**, **b)** ou **c)** que lhe corresponde. A cada espaço corresponde uma só opção.

O número mínimo de votos, como primeira preferência, para que um empregado obtivesse maioria absoluta era **I** . Na contagem efetuada após a primeira eliminação de um dos candidatos, o candidato **II** ficou com 350 votos.

O segundo candidato a ser eliminado foi **III** .

O candidato vencedor obteve **IV** votos.

I	II	III	IV
a) 451	a) <i>A</i>	a) <i>A</i>	a) 550
b) 450	b) <i>B</i>	b) <i>B</i>	b) 600
c) 900	c) <i>C</i>	c) <i>C</i>	c) 750

- * 2. Num dos navios de cruzeiro da empresa LZD, existe um circuito de manutenção com seis estações. Um circuito de manutenção consiste numa série de exercícios físicos dispostos sequencialmente (em estações), de modo que os turistas, quando passam pelas estações, têm a possibilidade de executar o exercício proposto.

Na Figura 2, apresenta-se um grafo, no qual os vértices representam as estações, e as arestas representam os troços pedonais existentes entre elas.

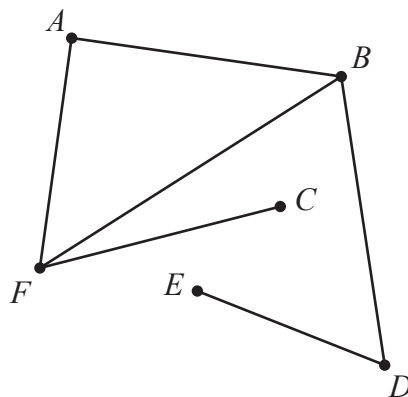


Figura 2

Pretende-se construir novos troços pedonais entre as estações existentes, para que seja possível iniciar e terminar o circuito de manutenção numa mesma estação, percorrendo todos os troços, incluindo os novos, sem repetir nenhum deles.

Qual o número mínimo de troços pedonais a construir?

- (A) 1
- (B) 2
- (C) 3
- (D) 4

* 3. Os pais da Luísa fizeram um cruzeiro com o itinerário seguinte.

Dia 1 – Atenas (A) **Dia 2** – Istambul (I) **Dia 3** – Volos (V) **Dia 4** – Mykonos (M)
Dia 5 – Rodes (R) **Dia 6** – Santorini (S) **Dia 7** – Atenas (A)

A Luísa, não podendo acompanhar os pais, tenciona visitar os mesmos locais, sem repetir nenhum deles, mas viajando em transportes públicos terrestres e marítimos. No seu planeamento, a Luísa pretende iniciar e terminar a viagem em Atenas, despendendo o menor tempo possível nas deslocações entre estes locais.

Na Tabela 1, estão registadas as durações das viagens entre os vários locais a visitar, pesquisadas na Internet pela Luísa.

Tabela 1

	A	I	M	R	S	V
A		17h20	2h50	15h50	9h30	4h40
I	17h20		26h00	15h30	28h20	14h50
M	2h50	26h00		10h30	2h30	6h10
R	15h50	15h30	10h30		2h40	7h00
S	9h30	28h20	2h30	2h40		6h20
V	4h40	14h50	6h10	7h00	6h20	

Para definir o seu percurso, a Luísa decide construir um grafo para modelar a situação, aplicando o método seguinte.

- Escolhe-se a aresta do grafo com menor peso, qualquer que ela seja.
- Escolhe-se, sucessivamente, as arestas com menor peso, garantindo que três arestas do grafo que está a ser definido não se encontram num mesmo vértice e não permitindo a formação de quaisquer percursos fechados que não incluam todos os vértices.

Poderá a Luísa visitar os locais pela mesma ordem seguida pelos pais?

Na sua resposta, apresente:

- a ordenação das arestas selecionadas que resulte da aplicação do método descrito;
- um grafo semelhante ao que terá sido construído pela Luísa;
- um possível itinerário definido pela Luísa.

- * 4. O José e a irmã pediram uma *pizza* enquanto desfrutavam da piscina do navio de cruzeiro. A *pizza* pedida, além de outros ingredientes, tinha numa metade cogumelos e, na outra, azeitonas, como se ilustra na Figura 3.

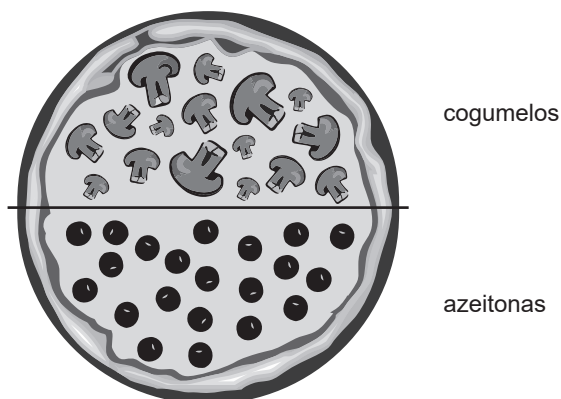


Figura 3

A irmã do José dividiu a *pizza* em duas porções que, para ela, tinham o mesmo valor monetário.

Na Figura 4, apresenta-se a divisão em duas porções de igual tamanho, P_1 e P_2 , efetuada pela irmã do José.

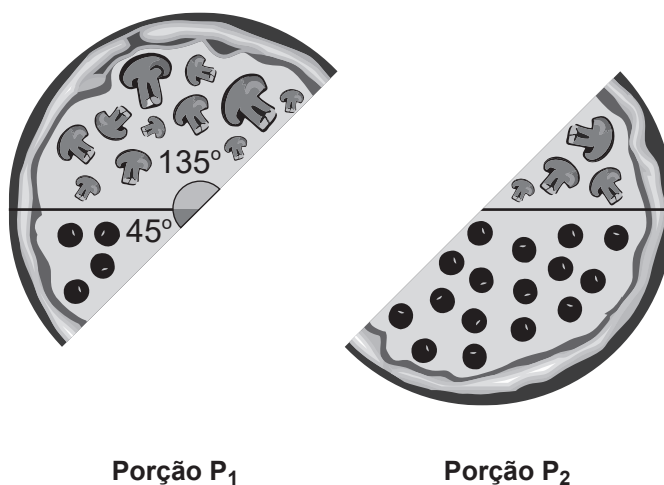


Figura 4

O José, que atribui à parte com cogumelos, representada na Figura 3, o dobro do valor monetário que atribui à parte com azeitonas, escolheu a porção P_1 e lembrou-se de determinar o valor monetário da porção que escolheu.

Admita que o preço da *pizza* é 42 euros.

Indique o valor monetário atribuído pelo José à porção que selecionou.

5. O Tiago consultou um mediador de seguros para conhecer as condições de um seguro de saúde para o seu agregado familiar e o orçamento anual do mesmo.

Para orçamentar o seguro, o mediador solicitou ao Tiago informação sobre a constituição do seu agregado familiar e sobre a idade, em anos, de cada membro que o constitui.

Na Tabela 2, apresenta-se a informação fornecida pelo Tiago.

Tabela 2

Elemento do agregado familiar	Idade (em anos)
Tiago	50
Alice	44
Beatriz	14
Nuno	12

Na Tabela 3, apresentam-se os prémios totais anuais, de acordo com o escalão etário dos segurados, e, na Tabela 4, as taxas de desconto a aplicar aos prémios totais anuais, em função do número de pessoas seguradas.

Tabela 3

Escalão etário (em anos)	Prémios totais anuais (em euros)
Dos 0 aos 5	356,99
Dos 6 aos 10	334,42
Dos 11 aos 20	241,48
Dos 21 aos 25	286,85
Dos 26 aos 30	349,56
Dos 31 aos 35	381,08
Dos 36 aos 40	405,85
Dos 41 aos 45	466,18
Dos 46 aos 50	531,08
Dos 51 aos 55	599,23
Dos 56 aos 60	668,81

Tabela 4

Taxa de desconto a aplicar aos prémios totais anuais	
2 pessoas seguradas	5%
3 ou 4 pessoas seguradas	11%
5 ou mais pessoas seguradas	20%

Com a informação prestada na Tabela 2 e utilizando os dados das Tabelas 3 e 4, o mediador orçamentou o prémio do seguro para todo o agregado familiar do Tiago.

Determine o valor anual, em euros, que o mediador de seguros terá apresentado para o seguro de saúde de todo o agregado familiar do Tiago.

Caso proceda a arredondamentos nos cálculos intermédios, conserve três casas decimais.

Na sua resposta, apresente o valor em euros, com arredondamento às centésimas.

6. A empresa LZD explora os itinerários de cruzeiro A , B e C .

Desde o início do ano 2000, a empresa contratou, numa instituição bancária, uma conta-corrente para cada um dos itinerários.

Admita que o saldo A da conta-corrente, em milhões de euros, para o itinerário A , t anos após o início do ano 2000, é dado por

$$A(t) = 4 + 3 \ln(2t + 1), \quad t \in [0, 22]$$

6.1. O maior investimento em publicidade para promover o itinerário A ocorreu nos anos em que o saldo da conta-corrente se situou entre 11,15 milhões de euros e 13,5 milhões de euros.

Determine durante quantos anos completos ocorreu o maior investimento em publicidade para promover o itinerário A .

Para responder a esta questão, recorra às capacidades gráficas da sua calculadora e apresente:

- o(s) gráfico(s) visualizado(s);
- a(s) abcissa(s) do(s) ponto(s) relevante(s), com arredondamento às centésimas.

* 6.2. Qual é o valor, aproximado às unidades, da percentagem de aumento do saldo A , no final do primeiro ano de contratação da conta-corrente?

- (A) 55%
- (B) 53%
- (C) 85%
- (D) 82%

- * 6.3. Admita que o saldo B da conta-corrente do itinerário B e o saldo C da conta-corrente do itinerário C , em milhões de euros, t anos após o início do ano 2000, são dados, respetivamente, por

$$B(t) = -0,3t + 4,8, \quad t \in [0, 22] \quad \text{e} \quad C(t) = 8 - 10e^{-0,2t}, \quad t \in [0, 22]$$

Associe a cada um dos saldos, apresentados na Coluna I, as afirmações da Coluna II que lhe correspondem.

Cada um dos números, de 1 a 7, deve ser associado apenas a uma das letras, e todos os números devem ser utilizados.

Escreva na folha de respostas cada letra da Coluna I, seguida do(s) número(s) correspondente(s) da Coluna II.

COLUNA I	COLUNA II
<p>(a) Saldo A</p> <p>(b) Saldo B</p> <p>(c) Saldo C</p>	<p>(1) Tem vindo a diminuir.</p> <p>(2) No início do ano 2000, apresentava o maior valor.</p> <p>(3) No início do ano de 2001, apresentava valor negativo.</p> <p>(4) Foi sempre positivo.</p> <p>(5) Entre o início do ano 2000 e o início do ano de 2002, aumentou, aproximadamente, 3 milhões de euros.</p> <p>(6) No início do ano de 2016, foi nulo.</p> <p>(7) No início do ano de 2002, apresentava o maior valor.</p>

7. O *Net Promoter Score (NPS)* é um dos indicadores mais utilizados para aferir o grau de satisfação dos clientes relativamente a uma empresa.

Para calcular o *NPS*, um conjunto de clientes responde à questão:

«Numa escala de 0 a 10, recomendaria a nossa empresa a um amigo?»

Em que 0 representa «nada provável» e 10 «extremamente provável».

Recolhidas as respostas, os clientes são divididos em três grupos: Promotores, se atribuem 9 ou 10 pontos; Neutros, se atribuem 7 ou 8 pontos; Detratores, se atribuem entre 0 e 6 pontos.

De seguida, aplica-se a seguinte fórmula:

$$NPS = \text{percentagem de Promotores} - \text{percentagem de Detratores}$$

O valor *NPS* obtido pode variar entre -100% e 100%.

Na Tabela 5, apresenta-se a escala de classificação do grau de satisfação dos clientes de uma empresa, de acordo com o resultado do *NPS*, arredondado às unidades.











Tabela 5

<i>NPS</i> (%)	-100 a -1	0 a 49	50 a 74	75 a 100
Classificação do grau de satisfação	Zona crítica	Zona de aperfeiçoamento	Zona de qualidade	Zona de excelência

7.1. A empresa de cruzeiros LZD pretende aferir o grau de satisfação dos seus clientes.

Para isso, recolheu os resultados da pontuação atribuída por 1080 dos seus clientes. Na Tabela 6, apresentam-se os resultados obtidos.

Tabela 6

	Detratores						Neutros		Promotores		
N.º de clientes											
	0	34	25	9	0	22	30	124	170	369	297
Pontos	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

7.1.1. Atualmente, para aferir o grau de satisfação dos seus clientes, a empresa de cruzeiros LZD recorre ao cálculo do *NPS*, mas, anteriormente, recorria ao cálculo da média das pontuações atribuídas pelos clientes.

Admita que uma média de pontuações igual ou superior a 9 pontos corresponde a um grau de satisfação numa Zona de excelência.

Prove que o grau de satisfação dos clientes não se encontra na Zona de excelência, independentemente da forma de aferição, recorrendo aos dados das Tabelas 5 e 6.

Caso proceda a arredondamentos nos cálculos intermédios, conserve duas casas decimais.

Na sua resposta, apresente:

- a média das pontuações atribuídas pelos clientes;
- o valor do *NPS*.

* 7.1.2. Complete o texto seguinte, seleccionando a opção adequada a cada espaço.

Escreva na folha de respostas cada um dos números, I, II, III e IV, seguido da opção a), b) ou c) que lhe corresponde. A cada espaço corresponde uma só opção.

A moda das pontuações atribuídas pelos Detratores é I .

Os clientes Neutros representam, com arredondamento às unidades, aproximadamente II % da amostra.

A mediana das pontuações atribuídas pelos 1080 clientes é III .

Os resultados obtidos estão organizados no gráfico circular IV , no qual se apresenta a amplitude, em graus, de um dos sectores.

I	II	III	IV
a) 1	a) 31	a) 10	<p>a) 193°</p> <p>■ Detratores ■ Neutros ■ Promotores</p>
b) 3	b) 29	b) 9	<p>b) 219°</p> <p>■ Detratores ■ Neutros ■ Promotores</p>
c) 6	c) 27	c) 8	<p>c) 222°</p> <p>■ Detratores ■ Neutros ■ Promotores</p>

* 7.2. Analisados os resultados obtidos numa outra amostra composta por 1000 clientes da empresa LZD, conclui-se que 723 são clientes Promotores.

Admita que os clientes Detratores representam 8% da amostra.

Determine, para esta amostra, o número mínimo de clientes Neutros que teriam de passar a Promotores para que a empresa LZD se classificasse na Zona de excelência, de acordo com o resultado do *NPS* obtido.

8. Foram analisados 500 formulários preenchidos pelos turistas que embarcaram num navio de cruzeiro.

8.1. Concluiu-se que:

- 200 turistas estão em lua de mel;
- dos turistas que estão em lua de mel, metade está instalada numa *suíte*;
- dos turistas que não estão em lua de mel, a quinta parte não está instalada numa *suíte*.

Escolhe-se ao acaso um desses 500 formulários.

Determine a probabilidade de o formulário escolhido pertencer a um turista que não está em lua de mel, sabendo-se que está instalado numa *suíte*.

Apresente o resultado na forma de fração irredutível.

*** 8.2.** Admita que a idade dos 500 turistas cujos formulários foram analisados segue uma distribuição normal de valor médio 51 anos.

Admita ainda que a probabilidade de um desses turistas, selecionado ao acaso, ter uma idade:

- inferior a 44 anos é igual a 0,32;
- compreendida entre 41 e 58 anos é igual a 0,42.

Determine quantos dos 500 turistas é de esperar que tenham uma idade compreendida entre 41 e 44 anos.

9. A empresa LZD estudou o tempo, em minutos, necessário para o embarque de turistas nos seus navios de cruzeiro.

Para construir um intervalo de confiança para o tempo médio necessário para o embarque de turistas, constituiu uma amostra aleatória de 256 turistas que se encontravam a bordo dos seus vários navios, tendo estes indicado o tempo decorrido até ao seu embarque.

Na Figura 5, apresentam-se os dados recolhidos, organizados em classes.

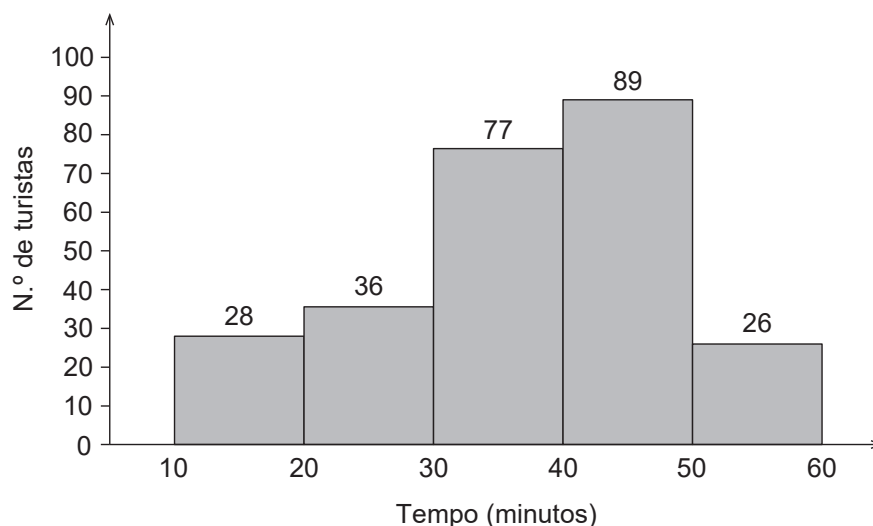


Figura 5

Determine um intervalo de confiança a 95% para o valor médio do tempo necessário, em minutos, para o embarque de turistas nos navios de cruzeiro da empresa LZD.

Na sua resposta, apresente a média do tempo necessário para o embarque dos turistas inquiridos, o valor do desvio padrão e os valores dos extremos do intervalo, arredondados às décimas.

FIM

COTAÇÕES

As pontuações obtidas nas respostas a estes 9 itens da prova contribuem obrigatoriamente para a classificação final.	1.	2.	3.	4.	6.2.	6.3.	7.1.2.	7.2.	8.2.	Subtotal
Cotação (em pontos)	14	14	20	18	14	14	14	20	18	146
Destes 5 itens, contribuem para a classificação final da prova os 3 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.	5.	6.1.	7.1.1.	8.1.	9.	Subtotal				
Cotação (em pontos)	3 x 18 pontos					54				
TOTAL										200

Prova 835

2.^a Fase