

Prova Escrita de MATEMÁTICA A - 12º Ano

2010 - Época especial

Proposta de resolução

GRUPO I

1. O grupo dos 3 livros de Matemática pode ser arrumado de ${}^3A_3 = P_3 = 3!$ formas diferentes. Como a prateleira tem duas pontas, o grupo dos três livros pode ser colocado de 2 formas. Os restantes 5 livros podem ser arrumados de ${}^5A_5 = P_5 = 5!$ formas diferentes. Logo, o número de arrumações diferentes é

$$3! \times 2 \times 5! = 1440$$

Resposta: **Opção D**

2. Como $P(\overline{B}) = 0,3$, pelo teorema $P(X) = 1 - P(\overline{X})$, temos que:

$$P(B) = 1 - 0,3 = 0,7$$

Assim, pelo teorema $P(X \cup Y) = P(X) + P(Y) - P(X \cap Y)$, temos que:

$$P(A \cup B) = 0,4 + 0,7 - 0,3 = 0,8$$

Resposta: **Opção D**

3. Como existem 7 perfumes de senhora e são escolhidos 6 ao acaso, podem ser escolhidos 6 perfumes de senhora, e portanto zero perfumes de homem, logo $P(X = 0) > 0$, pelo que podemos excluir as opções (B) e (C).

Calculando a probabilidade de escolher 6 perfumes de senhora, do conjunto dos 10, temos:

$$P(X = 0) = \frac{{}^7C_6}{{}^{10}C_6} = \frac{7}{{}^{10}C_6}$$

Logo, apenas a opção (A) é compatível com este cálculo.

Resposta: **Opção A**

4. Resolvendo a equação, temos

$$f(x) = 2 \Leftrightarrow \ln(-3x) = 2 \Leftrightarrow -3x = e^2 \Leftrightarrow x = \frac{e^2}{-3} \Leftrightarrow x = -\frac{1}{3}e^2$$

Resposta: **Opção C**



5. Como a reta de equação $y = -4$ é assíntota do gráfico da função h , de domínio \mathbb{R}^+ , então temos que




$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = -4$$

Logo, vem que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln\left(\frac{1}{2x}\right)}{h(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{1}{2x}\right)}{\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x)} = \frac{\ln\left(\frac{1}{+\infty}\right)}{-4} = \frac{\ln(0^+)}{-4} = \frac{-\infty}{-4} = +\infty$$

Resposta: **Opção B**

6. Através da análise do gráfico, podemos descrever a variação do sinal da derivada para relacionar com a monotonia da função f :

x		a		b	
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$		Máx		min	

Logo, o único gráfico apresentado compatível com a monotonia estudada é o gráfico da opção (A).

Resposta: **Opção A**

7. Considerando $z = a + bi$ (com $a \in \mathbb{R}$ e $b \in \mathbb{R}$), temos que:

- $\bar{z} = a - bi$
- $z + \bar{z} = a + bi + a - bi = 2a$
- $i \times (z + \bar{z}) = i(2a) = 2ia$
- $i \times (z + \bar{z}) = 0 \Leftrightarrow 2ia = 0 \Leftrightarrow a = 0$

Ou seja o conjunto A é o conjunto dos números complexos z , tais que $\text{Re}(z) = 0$, ou seja a sua representação geométrica coincide com o eixo imaginário.

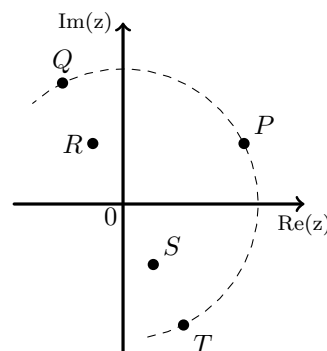
Resposta: **Opção B**

8. A operação "multiplicar por i " corresponde geometricamente a "fazer uma rotação de centro em O e amplitude $\frac{\pi}{2}$ radianos".

Assim temos que $i \times z = w$, sendo w o número complexo que tem por imagem geométrica o ponto Q .

Logo $-i \times z = -w$, ou seja o número complexo que tem por imagem geométrica o ponto T .

Resposta: **Opção D**



GRUPO II

1.

1.1. Começamos por escrever $(-1 - i)$ na f.t.:

Seja $-1 - i = \rho \operatorname{cis} \theta$:

- $\rho = |-1 - i| = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$
- $\theta = \pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}$, porque $\operatorname{tg} \theta = \frac{-1}{-1} = 1$, logo $\theta = \frac{\pi}{4} \vee \theta = \pi + \frac{\pi}{4}$, mas como $\operatorname{sen} \theta < 0$ e $\operatorname{cos} \theta < 0$, logo θ é um ângulo do 3º quadrante.

Assim, aplicando a fórmula de Moivre para a potência, temos que

$$(-1 - i)^8 = \left(\sqrt{2} \operatorname{cis} \frac{5\pi}{4} \right)^8 = (\sqrt{2})^8 \operatorname{cis} \left(8 \times \frac{5\pi}{4} \right) = 16 \operatorname{cis} \frac{40\pi}{4} = 16 \operatorname{cis} (10\pi) = 16 \operatorname{cis} 0$$

Da mesma forma temos que $\left(\operatorname{cis} \left(\frac{\pi}{8} \right) \right)^2 = \operatorname{cis} \left(2 \times \frac{\pi}{8} \right) = \operatorname{cis} \left(\frac{\pi}{4} \right)$

$$\begin{aligned} \text{Assim temos que } z &= \frac{(-1 - i)^8}{\left(\operatorname{cis} \left(\frac{\pi}{8} \right) \right)^2} \times \operatorname{cis} \left(\frac{5\pi}{2} \right) = \frac{16 \operatorname{cis} 0}{\operatorname{cis} \left(\frac{\pi}{4} \right)} \times \operatorname{cis} \left(\frac{5\pi}{2} \right) = 16 \operatorname{cis} \left(-\frac{\pi}{4} \right) \times \operatorname{cis} \left(\frac{5\pi}{2} \right) = \\ &= 16 \operatorname{cis} \left(-\frac{\pi}{4} + \frac{5\pi}{2} \right) = 16 \operatorname{cis} \left(-\frac{\pi}{4} + \frac{10\pi}{4} \right) = 16 \operatorname{cis} \left(\frac{9\pi}{4} \right) = 16 \operatorname{cis} \left(\frac{\pi}{4} + 2\pi \right) = 16 \operatorname{cis} \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

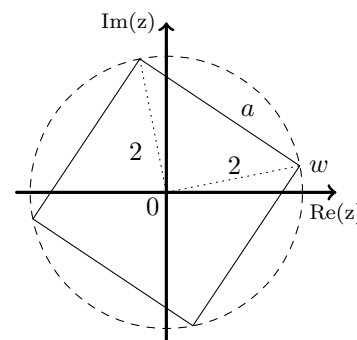
1.2. Sabemos que as quatro raízes quartas de z são números complexos cujas imagens geométricas são os vértices de um quadrado, centrado na origem.

Seja w uma das raízes quartas de z , como $z = 16 \operatorname{cis} \frac{\pi}{4}$, recorrendo à fórmula de Moivre, temos que $|w| = \sqrt[4]{16} = \sqrt[4]{2^4} = 2$, ou seja a distância dos vértices do quadrado ao centro é 2.

Assim, podemos calcular o lado a do quadrado, recorrendo ao teorema de Pitágoras:

$$a^2 = 2^2 + 2^2 \Leftrightarrow a^2 = 4 + 4 \Leftrightarrow a^2 = 8 \Leftrightarrow a = \sqrt{8} \text{ (consideramos apenas a raiz positiva por se tratar de uma medida).}$$

Temos assim que a área A do polígono cujos vértices, no plano complexo, são as imagens geométricas das raízes quartas de z é dada por $A = (\sqrt{8})^2 = 8$



2.

2.1. Se ao total do número de grupos diferentes de 5 alunos que se podem formar com os 27 alunos (${}^{27}C_5$, não se condiera relevante a ordem por não haver diferenciação dentro do grupo), subtrairmos os grupos que são formados apenas por rapazes (${}^{17}C_5$) e também os que são formados apenas por raparigas (${}^{10}C_5$, como existem 17 rapazes na turma, o número de raparigas é $27 - 17 = 10$), o resultado é o número de grupos em que existe pelo menos um aluno de cada sexo, ou seja

$${}^{27}C_5 - {}^{17}C_5 - {}^{10}C_5 = 74\,290$$



- 2.2. No contexto da situação descrita, $P(B|A)$, é a probabilidade de ter sido escolhido um grupo composto por 2 rapazes e 3 raparigas, sabendo que a Maria e o Manuel integram o grupo.

Assim, $\frac{16 \times {}^9C_2}{{}^{25}C_3}$ é um cálculo da probabilidade recorrendo à regra de Laplace, ou seja calculando o quociente entre o número de casos favoráveis ($16 \times {}^9C_2$) e o número de casos possíveis (${}^{25}C_3$).

O número de casos possíveis, consiste em determinar o número de grupos de 3 elementos que se podem formar com os 25 alunos da turma (${}^{25}C_3$) (excluindo a Maria e o Manuel, e não considerando a ordem relevante por não existir diferenciação dentro do grupo). A qualquer um destes grupos juntam-se a Maria e o Manuel, formando um grupo de 5 alunos que inclui estes dois.

O número de casos favoráveis, consiste em determinar o número de grupos de 3 elementos que se podem formar com os 25 alunos da turma, escolhendo 1 de entre os restantes 16 rapazes e 2 de entre as restantes 9 raparigas ($16 \times {}^9C_2$), excluindo a Maria e o Manuel. Como ao rapaz selecionado se junta o Manuel, o grupo será composto por 2 rapazes e como ao conjunto de duas raparigas se junta a Maria, o grupo terá 3 raparigas na sua composição.

$$\text{Desta forma } P(B|A) = \frac{16 \times {}^9C_2}{{}^{25}C_3}$$

3. Como a probabilidade de pelo menos, uma das amigas telefonar à sua mãe, é $P(A \cup B)$
Como os acontecimentos A e B são independentes, temos que $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$
Assim, pelo teorema $P(X \cup Y) = P(X) + P(Y) - P(X \cap Y)$, temos que:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A) \times P(B)$$

Pelo que

$$P(A \cup B) = 0,7 + 0,8 - 0,7 \times 0,8 = 0,94$$

Apresentando o valor da probabilidade calculada em percentagem, temos $P(A \cup B) = 94\%$

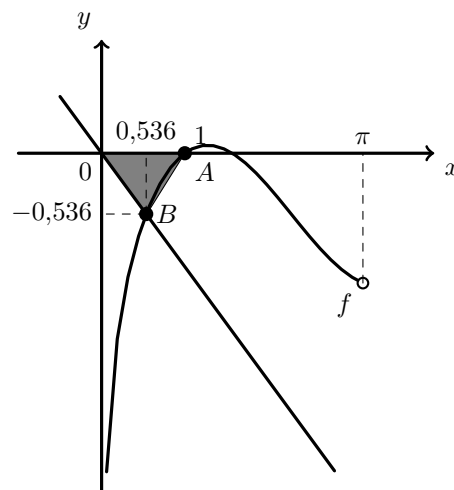
4. Traçando na calculadora o gráfico da função f e a bissetriz dos quadrantes pares, ou seja a reta de equação $y = -x$ numa janela compatível com o domínio de f , obtemos o gráfico que se reproduz na figura seguinte.

Logo podemos considerar como a medida da base do triângulo, a abcissa do ponto A , e como a medida da altura o valor absoluto da ordenada do ponto B (como se pode ver na figura).

Recorrendo à função da calculadora que permite determinar valores dos zeros de uma função, determinamos o valor da abcissa do ponto A , $x_A = 1$. Usando a função da calculadora para determinar valores aproximados de um ponto de interseção de dois gráficos determinamos o valor (aproximado às centésimas) da ordenada do ponto B , $y_B \approx -0,536$.

Assim, calculando a área do triângulo, e arredondando o resultado às centésimas, vem:

$$A_{[OAB]} = \frac{x_A \times |y_B|}{2} \approx \frac{1 \times 0,536}{2} \approx 0,268 \approx 0,27$$



5. Como a reta de equação $y = 1$ é a única assíntota do gráfico da função f , de domínio \mathbb{R}^+ , então, como é uma reta de declive igual a zero, vem que

$$m_f = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{f(x)}{x} \right) = 0$$

E assim, determinando o declive da assíntota oblíqua da função g , quando $x \rightarrow +\infty$, (porque o domínio da função é \mathbb{R}^+), vem:

$$m_g = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x) + x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{f(x)}{x} + \frac{x}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{f(x)}{x} \right) + \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{x} \right) = 0 + 1 = 1$$

E como a reta de equação $y = 1$ é assíntota do gráfico da função f , de domínio \mathbb{R}^+ , então, vem que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$$

E assim, determinando a ordenada na origem da assíntota oblíqua da função g , quando $x \rightarrow +\infty$, (porque o domínio da função é \mathbb{R}^+), vem:

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} (g(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) + x - 1 \times x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x)) = 1$$

Logo, temos que a reta de equação $y = x + 1$ é a assíntota oblíqua gráfico de g , que como tem declive 1 é paralela à reta de equação $y = x$, ou seja a bissetriz dos quadrantes ímpares.

6.

6.1. Para averiguar se a função h é contínua em $x = 0$, temos que verificar se $h(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} h(x)$

- $h(0) = 3 \ln(0^2 + 1) = 3 \ln(1) = 3 \times 0 = 0$
- $\lim_{x \rightarrow 0^-} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (3 \ln(x^2 + 1)) = 3 \ln((0^-)^2 + 1) = 3 \ln(0 + 1) = 3 \ln(1) = 3 \times 0 = 0$
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{2x} - e^x}{x} = \frac{e^0 - e^0}{0} = \frac{0}{0}$ (Indeterminação)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{2x} - e^x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{x+x} - e^x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x \times e^x - e^x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x(e^x - 1)}{x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} e^x \times \underbrace{\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x - 1}{x}}_{\text{Lim. Notável}} = e^0 \times 1 = 1 \times 1 = 1 \end{aligned}$$

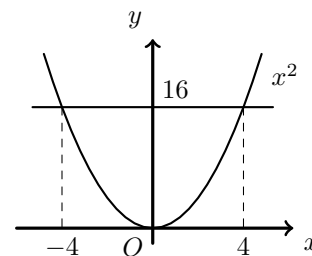
Como $\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0^-} h(x)$, então a função h não é contínua em $x = 0$

6.2. Temos que

$$h(-4) = \ln((-4)^2 + 1) = \ln(16 + 1) = \ln(17)$$

Assim, resolvendo a inequação, em $] - \infty, 0]$, temos

$$\begin{aligned} h(x) > h(-4) &\Leftrightarrow \ln(x^2 + 1) > \ln(17) \Leftrightarrow x^2 + 1 > 17 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x^2 > 17 - 1 \Leftrightarrow x^2 > 16 \Leftrightarrow x < -4 \vee x > 4 \end{aligned}$$



Como o domínio de valência da inequação é $] - \infty, 0]$, o conjunto solução é

$$]- \infty, 0] \cap (]- \infty, -4[\cup]4, + \infty[) =] - \infty, -4[$$



7.

7.1. As três horas da tarde desse dia correspondem a $t = 15$.

Assim, a profundidade correspondente é dada por:

$$P(15) = 2 \cos\left(\frac{\pi}{6} \times 15\right) + 8 = 2 \cos\left(\frac{3 \times 5 \times \pi}{3 \times 2}\right) + 8 = 2 \cos\left(\frac{5\pi}{2}\right) + 8 = 2 \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + 8 = 2 \times 0 + 8 = 8$$

Ou seja, às 15 horas, a profundidade da água na marina era de 8 metros.

7.2. Determinando a expressão da derivada, temos:

$$\begin{aligned} P'(t) &= \left(2 \cos\left(\frac{\pi}{6}t\right) + 8\right)' = \left(2 \cos\left(\frac{\pi}{6}t\right)\right)' + (8)' = 2\left(\frac{\pi}{6}t\right)' \left(-\sin\left(\frac{\pi}{6}t\right)\right) + 0 = \frac{2\pi}{6} \left(-\sin\left(\frac{\pi}{6}t\right)\right) = \\ &= -\frac{\pi}{3} \sin\left(\frac{\pi}{6}t\right) \end{aligned}$$

Calculando os zeros da derivada, vem:

$$\begin{aligned} P'(t) = 0 &\Leftrightarrow -\frac{\pi}{3} \sin\left(\frac{\pi}{6}t\right) = 0 \Leftrightarrow \sin\left(\frac{\pi}{6}t\right) = 0 \Leftrightarrow \sin\left(\frac{\pi}{6}t\right) = \sin 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{\pi}{6}t = 0 + 2k\pi \vee \frac{\pi}{6}t = \pi - 0 + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow t = \frac{6(2k\pi)}{\pi} \vee t = \frac{6(\pi + 2k\pi)}{\pi}, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow t = 12k \vee t = 6 + 12k, k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Como $t \in [0, 24]$, atribuindo valores a k ($k = 0$, $k = 1$ e $k = 2$), obtemos o conjunto dos zeros da função derivada: $\{0, 6, 12, 18, 24\}$

Desta forma, estudando a variação de sinal de P' e relacionando com a monotonia da função P , vem:

t	0		6		12		18		24
$P'(t)$	0	-	0	+	0	-	0	+	0
$P(t)$	Máx	\searrow	min	\nearrow	Máx	\searrow	min	\nearrow	Máx

Logo, a profundidade mínima, que ocorreu às 6 horas e depois novamente às 18 horas, pode ser calculada como:

$$P(6) = 2 \cos\left(\frac{\pi}{6} \times 6\right) + 8 = 2 \cos(\pi) + 8 = 2(-1) + 8 = -2 + 8 = 6$$

Ou seja a profundidade mínima na marina, nesse dia, foi de 6 metros.

