

## Exame nacional de Matemática A (2012, 1.ª fase)

Proposta de resolução



### GRUPO I

1. Temos que

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$$

Como  $A$  e  $B$  são independentes, então  $P(A) \times P(B) = P(A \cap B)$ , pelo que, podemos escrever que

$$P(A) + P(B) - P(A \cup B) = P(A) \times P(B) \quad (1)$$

Como  $P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \frac{7}{10} = \frac{10}{10} - \frac{7}{10} = \frac{3}{10}$ , substituindo os valores conhecidos na igualdade (1), vem:

$$\begin{aligned} \frac{3}{10} + P(B) - \frac{3}{4} &= \frac{3}{10} \times P(B) \Leftrightarrow \frac{6}{20} + \frac{20P(B)}{20} - \frac{15}{20} = \frac{6P(B)}{20} \Leftrightarrow 6 + 20P(B) - 15 = 6P(B) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 20P(B) - 6P(B) = 15 - 6 \Leftrightarrow 14P(B) = 9 \Leftrightarrow P(B) = \frac{9}{14} \end{aligned}$$

Resposta: **Opção B**

2. Calculando a probabilidade do acontecimento contrário, ou seja, a probabilidade de que o João e a Margarida fiquem sentados ao lado um do outro, vem:

- O cálculo dos casos possíveis, pode resultar de considerar as trocas de todos os 7 amigos pelas 7 posições, ou seja,  ${}^7A_7 = P_7 = 7!$
- Relativamente aos casos favoráveis, podemos considerar o par de amigos como um elemento único, resultando assim, nas trocas de 6 elementos (o par de amigos mais as restantes 5 pessoas), em 6 posições possíveis, ou seja,  ${}^6A_6 = P_6 = 6!$ , multiplicado por 2, porque o João pode ficar à direita ou à esquerda da Margarida.

Assim, recorrendo à probabilidade do acontecimento contrário, a probabilidade de o João e a Margarida não ficarem sentados um ao lado do outro é

$$1 - \frac{6! \times 2}{7!} = 1 - \frac{6! \times 2}{7 \times 6!} = 1 - \frac{2}{7} = \frac{7}{7} - \frac{2}{7} = \frac{5}{7}$$

Resposta: **Opção D**

3. Seleccionando 7 dos 12 compartimentos para colocar os copos brancos, que por serem iguais, a ordem da seleção não é relevante, temos  ${}^{12}C_7$  formas de arrumar os copos brancos.

Por cada arrumação diferente dos copos brancos, devemos considerar  ${}^5A_3$  hipóteses diferentes para colocar os copos de outras cores, que correspondem a selecionar 3 dos 5 compartimentos (ainda) vazios, e em que a ordem da seleção é relevante por se destinarem a copos de cor diferente.

Assim o número de arrumações diferentes é  ${}^{12}C_7 \times {}^5A_3$

Resposta: **Opção C**

4. Como

$$f(x) = -x - \frac{3}{2} \Leftrightarrow e^x - 3 = -x - \frac{3}{2} \Leftrightarrow e^x - 3 + x + \frac{3}{2} = 0 \Leftrightarrow e^x + x + \frac{3}{2} - \frac{6}{2} = 0 \Leftrightarrow e^x + x - \frac{3}{2} = 0$$

afirmar que a equação  $f(x) = -x - \frac{3}{2}$  tem, pelo menos, uma solução, é equivalente a afirmar que a função  $g$ , também de domínio  $\mathbb{R}$ , definida por  $g(x) = e^x + x - \frac{3}{2}$  tem, pelo menos, um zero.

Desta forma, como a função  $g$  é contínua em  $\mathbb{R}$ , por ser resultar de operações entre funções contínuas em  $\mathbb{R}$ , e recorrendo ao corolário do Teorema de Bolzano, podemos analisar cada uma das hipóteses apresentadas:

- Como  $g(0) = e^0 + 0 - \frac{3}{2} = 1 - \frac{3}{2} = -\frac{1}{2}$ , ou seja  $g(0) < 0$  e  $g\left(\frac{1}{5}\right) = e^{\frac{1}{5}} + \frac{1}{5} - \frac{3}{2} \approx -0,08$ , ou seja,  $g\left(\frac{1}{5}\right) > 0$ , temos que,  $g(0) \times g\left(\frac{1}{5}\right) > 0$ , e por isso, não é garantida a existência de um zero da função  $g$  no intervalo  $\left]0, \frac{1}{5}\right[$
- Como  $g\left(\frac{1}{5}\right) = e^{\frac{1}{5}} + \frac{1}{5} - \frac{3}{2} \approx -0,08$ , ou seja,  $g\left(\frac{1}{5}\right) < 0$  e  $g\left(\frac{1}{4}\right) = e^{\frac{1}{4}} + \frac{1}{4} - \frac{3}{2} \approx 0,03$ , ou seja,  $g\left(\frac{1}{4}\right) > 0$ , temos que,  $g\left(\frac{1}{5}\right) \times g\left(\frac{1}{4}\right) < 0$ , e por isso, é garantida a existência de um zero da função  $g$  no intervalo  $\left]\frac{1}{5}, \frac{1}{4}\right[$
- Como  $g\left(\frac{1}{4}\right) = e^{\frac{1}{4}} + \frac{1}{4} - \frac{3}{2} \approx 0,03$ , ou seja,  $g\left(\frac{1}{4}\right) > 0$  e  $g\left(\frac{1}{3}\right) = e^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{3} - \frac{3}{2} \approx 0,23$ , ou seja,  $g\left(\frac{1}{3}\right) > 0$ , temos que,  $g\left(\frac{1}{4}\right) \times g\left(\frac{1}{3}\right) > 0$ , e por isso, não é garantida a existência de um zero da função  $g$  no intervalo  $\left]\frac{1}{4}, \frac{1}{3}\right[$
- Como  $g\left(\frac{1}{3}\right) = e^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{3} - \frac{3}{2} \approx 0,23$ , ou seja,  $g\left(\frac{1}{3}\right) > 0$  e  $g(1) = e^1 + 1 - \frac{3}{2} \approx 2,22$ , ou seja,  $g(1) > 0$ , temos que,  $g\left(\frac{1}{3}\right) \times g(1) > 0$ , e por isso, não é garantida a existência de um zero da função  $g$  no intervalo  $\left]\frac{1}{3}, 1\right[$

Resposta: **Opção B**



5. Como a função é contínua em  $\mathbb{R}$ , também é contínua em  $x = a$ , pelo que

$$f(a) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$$

Pela observação do gráfico da função  $g$ , temos que

$$f(a) = g(a) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} g(x) = 2$$

E calculando  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$ , vem

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} \log_3 \left( -x - \frac{1}{3} \right) = \log_3 \left( -a - \frac{1}{3} \right)$$

Como  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a)$ , temos que

$$\log_3 \left( -a - \frac{1}{3} \right) = 2 \Leftrightarrow -a - \frac{1}{3} = 3^2 \Leftrightarrow -a = 9 + \frac{1}{3} \Leftrightarrow -a = \frac{27}{3} + \frac{1}{3} \Leftrightarrow -a = \frac{28}{3} \Leftrightarrow a = -\frac{28}{3}$$

Resposta: **Opção A**

6. As retas tangentes ao gráfico nos pontos de abscissas  $x = -3$  e  $x = 1$  têm declive negativo, ou seja, em  $x = -3$  e  $x = 1$  a função é decrescente, pelo que  $f'(-3) < 0$  e também  $f'(1) < 0$ .

Relativamente ao sentido das concavidades, em  $x = 1$ , o gráfico de  $f$  tem a concavidade voltada para baixo, pelo que  $f''(1) < 0$ .

Em  $x = -3$ , o gráfico de  $f$  tem a concavidade voltada para cima, pelo que  $f''(-3) > 0$

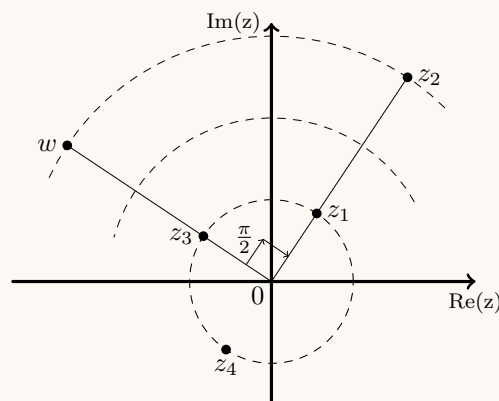
Resposta: **Opção C**

7. As operações "dividir por  $i$ " e "dividir por 3" correspondem geometricamente a "fazer uma rotação de centro em  $O$  e amplitude  $-\frac{\pi}{2}$  radianos" e "dividir a distância ao centro por 3", respetivamente.

Assim, podemos fazer as operações por qualquer ordem e, por isso, temos duas alternativas:

- $\frac{w}{i} = z_2$  e  $\frac{z_2}{3} = z_1$ , ou então
- $\frac{w}{3} = z_3$  e  $\frac{z_3}{i} = z_1$

Resposta: **Opção A**



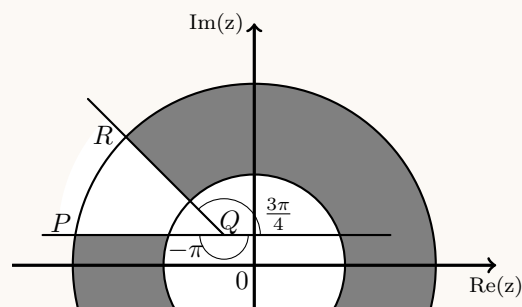
8. A coroa circular representada é o conjunto dos pontos que distam da origem entre 3 e 6 unidades, ou seja a representação dos números complexos  $z$ , tais que  $3 \leq |z| \leq 6$

Os pontos assinalados devem ainda satisfazer a condição de que o ângulo (medido a partir da representação geométrica do complexo  $-1 + i$  está compreendido entre  $-\pi$  rad e  $\frac{3\pi}{4}$  rad.

$$\text{Ou seja: } -\pi \leq \arg(z - (-1 + i)) \leq \frac{3\pi}{4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\pi \leq \arg(z + 1 - i) \leq \frac{3\pi}{4}$$

Resposta: **Opção C**



---

**GRUPO II**


---

1.

1.1. Começamos por simplificar as expressões de  $z_1$  e de  $z_2$ :

Recorrendo aos coeficientes da linha 3 do Triângulo de Pascal (1 3 3 1), temos que:

$$z_1 = (-2+i)^3 = 1(-2)^3 + 3(-2)^2(i) + 3(-2)(i)^2 + 1(i)^3 = -8 + 12i - 6i^2 - i = -8 + 6 + 12i - i = -2 + 11i$$

$$z_2 = \frac{1+28i}{2+i} = \frac{(1+28i) \times (2-i)}{(2+i) \times (2-i)} = \frac{2-i+56i-28i^2}{2^2-i^2} = \frac{2-28(-1)+55i}{4-(-1)} = \frac{30+55i}{5} = 6+11i$$

Assim, temos que

$$z^3 + z_1 = z_2 \Leftrightarrow z^3 + (-2+11i) = 6+11i \Leftrightarrow z^3 - 2 + 11i = 6+11i \Leftrightarrow z^3 = 8 \Leftrightarrow z = \sqrt[3]{8} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow z = \sqrt[3]{8} \operatorname{cis} 0 \Leftrightarrow z = \sqrt[3]{8} \operatorname{cis} \frac{0+2k\pi}{3}, k \in \{0,1,2\} \Leftrightarrow z = 2 \operatorname{cis} \frac{2k\pi}{3}, k \in \{0,1,2\}$$

Ou seja, temos 3 raízes de índice 3, que são as 3 soluções da equação:

- $k = 0 \rightarrow z = 2 \operatorname{cis} 0$
- $k = 1 \rightarrow z = 2 \operatorname{cis} \frac{2\pi}{3}$
- $k = 2 \rightarrow z = 2 \operatorname{cis} \frac{4\pi}{3}$

1.2. Se  $w$  e  $\frac{1}{w}$  são raízes de índice  $n$  de um mesmo número complexo  $z$ , então  $w^n = z$  e  $\left(\frac{1}{w}\right)^n = z$ 

Logo temos que:

$$w^n = \left(\frac{1}{w}\right)^n \Leftrightarrow w^n = \frac{1}{w^n} \Leftrightarrow w^n \times w^n = 1 \Leftrightarrow (w^n)^2 = 1 \Leftrightarrow w^n = \pm\sqrt{1} \Leftrightarrow w^n = \pm 1$$

Como  $w^n = z$  temos que  $w^n = \pm 1 \Leftrightarrow z = \pm 1 \Leftrightarrow z = 1 \vee z = -1$ 

2.

2.1. Considerando a experiência aleatória que consiste em escolher, ao acaso, um aluno dessa escola, e os acontecimentos:

 $R$ : «O aluno é um rapaz» $E$ : «O aluno tem excesso de peso»Temos que  $P(\bar{R}) = 0,55$ ,  $P(E|\bar{R}) = 0,3$  e  $P(\bar{E}|R) = 0,4$ 

Assim, organizando os dados numa tabela obtemos:

- $P(E \cap \bar{R}) = P(\bar{R}) \times P(E|\bar{R}) = 0,55 \times 0,3 = 0,165$
- $P(R) = 1 - P(\bar{R}) = 1 - 0,55 = 0,45$
- $P(\bar{E} \cap R) = P(R) \times P(\bar{E}|R) = 0,45 \times 0,4 = 0,18$
- $P(R \cap E) = P(R) - P(\bar{E} \cap R) = 0,45 - 0,18 = 0,27$
- $P(E) = P(R \cap E) + P(\bar{R} \cap E) = 0,27 + 0,165 = 0,435$

	$R$	$\bar{R}$	
$E$	0,27	0,165	0,435
$\bar{E}$	0,18		
	0,45	0,55	1

Assim, calculando a probabilidade de o aluno escolhido ser rapaz, sabendo que tem excesso de peso, e escrevendo o resultado na forma de fração irredutível, temos

$$P(R|E) = \frac{P(R \cap E)}{P(E)} = \frac{0,27}{0,435} = \frac{18}{29}$$



2.2. Como 55% dos alunos são raparigas e existem 200 alunos, podemos calcular o número de raparigas como  $200 \times 0,55 = 110$  e o número de rapazes é  $200 - 110 = 90$ .

O número de conjuntos de 3 alunos que podem ser escolhidos (o número de casos possíveis) é  ${}^{200}C_3$ . O número de conjuntos com 2 raparigas e 1 rapaz (o número de casos favoráveis) pode ser calculado considerando que se escolhe 1 de entre os 90 rapazes, e 2 de entre as 110 raparigas, ou seja  $90 \times {}^{110}C_2$

Assim, calculando a probabilidade de serem escolhidos duas raparigas e um rapaz e arredondando o resultado às centésimas, temos

$$\frac{90 \times {}^{110}C_2}{{}^{200}C_3} \approx 0,41$$

3. Como no saco estão 5 bolas e extraímos 4, temos apenas 5 conjuntos de bolas que podem ser extraídos:

- bolas com os números  $\{-2, -1, 0, 1\}$ , produto correspondente:  $-2 \times (-1) \times 0 \times 1 = 2 \times 0 = 0$
- bolas com os números  $\{-2, -1, 0, 2\}$ , produto correspondente:  $-2 \times (-1) \times 0 \times 2 = 4 \times 0 = 0$
- bolas com os números  $\{-2, -1, 1, 2\}$ , produto correspondente:  $-2 \times (-1) \times 1 \times 2 = 4$
- bolas com os números  $\{-2, 0, 1, 2\}$ , produto correspondente:  $-2 \times 0 \times 1 \times 2 = -4 \times 0 = 0$
- bolas com os números  $\{-1, 0, 1, 2\}$ , produto correspondente:  $-1 \times 0 \times 1 \times 2 = -2 \times 0 = 0$

Ou seja, os produtos possíveis são apenas 0 e 4.

Quando a bola com o número 0 é extraída, o que acontece 4 em cada 5 vezes, o produto é 0, ou seja,

$$P(X = 0) = \frac{4}{5}$$

Quando a bola com o número 0 não é extraída, o que acontece 1 em cada 5 vezes, o produto é 4, ou seja,

$$P(X = 4) = \frac{1}{5}$$

4.

4.1. Resolvendo a equação  $f(x) = 0$ , temos que

$$\begin{aligned} e^{x-2} - \frac{4e^{-x} + 4}{e^2} = 0 &\Leftrightarrow \frac{e^2 \times e^{x-2}}{e^2} - \frac{4e^{-x} + 4}{e^2} = 0 \Leftrightarrow \frac{e^2 \times e^{x-2}}{e^2} - \frac{4e^{-x} + 4}{e^2} = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{e^x}{e^2} - \frac{4e^{-x} + 4}{e^2} = 0 &\Leftrightarrow \frac{e^x}{e^2} - \frac{4e^{-x} + 4}{e^2} = 0 \Leftrightarrow \frac{e^x - 4e^{-x} - 4}{e^2} = 0 \Leftrightarrow e^x - 4e^{-x} - 4 = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow e^x - 4 \times \frac{1}{e^x} - 4 = 0 &\Leftrightarrow \frac{e^x \times e^x}{e^x} - \frac{4}{e^x} - \frac{4e^x}{e^x} = 0 \Leftrightarrow (e^x)^2 - 4e^x - 4 = 0 \Leftrightarrow \end{aligned}$$

Fazendo a substituição de variável  $y = e^x$ , e usando a fórmula resolvente, vem:

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow y^2 - 4y - 4 = 0 &\Leftrightarrow y = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4(1)(-4)}}{2} \Leftrightarrow y = \frac{4 \pm \sqrt{16 + 16}}{2} \Leftrightarrow y = \frac{4 \pm \sqrt{32}}{2} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow y = \frac{4 \pm 4\sqrt{2}}{2} &\Leftrightarrow y = 2 + 2\sqrt{2} \vee y = 2 - 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

Como  $y = e^x$ , temos que:

$$e^x = 2 + 2\sqrt{2} \vee e^x = 2 - 2\sqrt{2}$$

E como  $2 - 2\sqrt{2} < 0$ , a equação  $e^x = 2 - 2\sqrt{2}$  é impossível, pelo que podemos determinar o valor do único zero da função  $f$ :

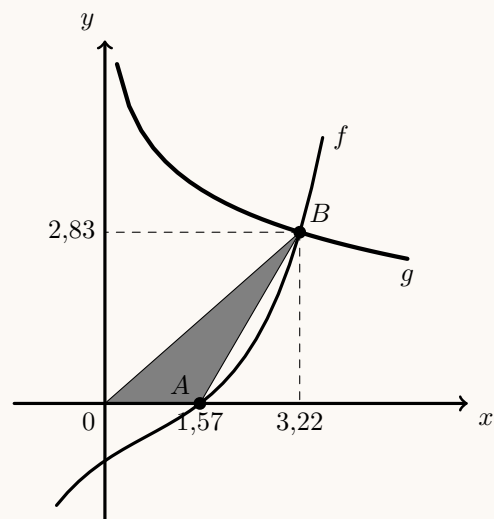
$$e^x = 2 + 2\sqrt{2} \Leftrightarrow x = \ln(2 + 2\sqrt{2})$$



- 4.2. Assim, traçando, na calculadora gráfica, os gráficos das funções  $f$  e  $g$ , numa janela que permita visualizar a interseção dos dois gráficos, bem como a interseção do gráfico de  $f$  com o eixo das abscissas, obtemos o gráfico reproduzido na figura ao lado.

Determinando um valor aproximado às centésimas do zero da função  $f$ , com a opção de determinar o valor dos zeros de uma função, obtemos as coordenadas do ponto  $A(1,57; 0)$ , pelo que podemos assumir o valor 1,57 para a medida da base do triângulo.

Usando a opção da calculadora para determinar as coordenadas do ponto de interseção de dois gráficos, obtemos os valores, aproximados às centésimas, para as coordenadas do ponto  $B(3,22; 2,83)$ . Logo podemos considerar o valor da ordenada (2,83) como a medida da altura do triângulo.



Assim, calculando o valor da área do triângulo  $[OAB]$ , arredondado às décimas, vem:

$$A_{[OAB]} \approx \frac{1,57 \times 2,83}{2} \approx 2,2$$



5.

- 5.1. Como o domínio da função  $f$  é  $\mathbb{R}$ , poderão existir assíntotas não verticais quando  $x \rightarrow -\infty$  e quando  $x \rightarrow +\infty$ . Assim, vamos averiguar em primeiro lugar a existência de uma assíntota de equação  $y = mx + b$ , quando  $x \rightarrow -\infty$ :

$$m = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{xe^{1-x}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^{1-x}) = e^{1-(-\infty)} = e^{1+\infty} = +\infty$$

Pelo que, como  $m = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$  não é constante, podemos afirmar que não existe uma assíntota não vertical do gráfico de  $f$ , quando  $x \rightarrow -\infty$

Averiguando a existência de uma assíntota de equação  $y = mx + b$ , quando  $x \rightarrow +\infty$ , vem:

$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \ln(x+1) - x \ln(x) + 3x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln(x+1) - \ln(x) + 3) = +\infty - \infty \text{ (Indeterminação)}$$

$$\begin{aligned} m &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln(x+1) - \ln(x) + 3) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln(x+1) - \ln(x)) + \lim_{x \rightarrow +\infty} 3 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \ln \frac{x+1}{x} \right) + 3 = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \ln \left( 1 + \frac{1}{x} \right) \right) + 3 = \ln \left( 1 + \frac{1}{+\infty} \right) + 3 = \ln(1 + 0^+) + 3 = \ln(1) + 3 = 0 + 3 = 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 3x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x \ln(x+1) - x \ln(x) + 3x - 3x) = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (x (\ln(x+1) - \ln(x))) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( x \times \ln \frac{x+1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( x \ln \left( 1 + \frac{1}{x} \right) \right) = +\infty \times 0 \text{ (Indeterminação)} \\ &\text{(fazendo } y = \frac{1}{x}, \text{ temos } x = \frac{1}{y} \text{ e se } x \rightarrow +\infty, \text{ então } y \rightarrow 0^+) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( x \ln \left( 1 + \frac{1}{x} \right) \right) = \lim_{y \rightarrow 0^+} \left( \frac{1}{y} \ln \left( 1 + \frac{1}{\frac{1}{y}} \right) \right) = \lim_{y \rightarrow 0^+} \left( \frac{1}{y} \ln(1+y) \right) = \\ &= \lim_{y \rightarrow 0^+} \left( \frac{\ln(1+y)}{y} \right) = \underbrace{\lim_{y \rightarrow 0^+} \left( \frac{\ln(y+1)}{y} \right)}_{\text{Lim. Notável}} = 1 \end{aligned}$$

Assim temos que a reta de equação  $y = 3x + 1$  é uma assíntota do gráfico de  $f$  (e não existem outras assíntotas não verticais).

- 5.2. Como o declive ( $m$ ), da reta tangente ao gráfico de  $f$  no ponto de abcissa  $-1$  é  $f'(-1)$ , começamos por determinar a expressão da derivada, para  $x < 0$ :

$$f'(x) = (xe^{1-x})' = (x)'e^{1-x} + x(e^{1-x})' = 1 \times e^{1-x} + x(1-x)'e^{1-x} = e^{1-x} + x(-1)e^{1-x} = e^{1-x} - xe^{1-x}$$

Calculando o declive da reta tangente temos:

$$m = f'(-1) = e^{1-(-1)} - (-1)e^{1-(-1)} = e^2 + e^2 = 2e^2$$

Calculando as coordenadas do ponto de tangência, temos:  $f(-1) = (-1)e^{1-(-1)} = -e^2$ , ou seja, o ponto  $P(-1, -e^2)$  é um ponto do gráfico de  $f$  que também pertence à reta tangente.

Substituindo o valor do declive na equação da reta, vem  $y = 2e^2 \times x + b$

Substituindo as coordenadas do ponto na equação da reta, calculamos o valor da ordenada na origem:

$$-e^2 = 2e^2 \times (-1) + b \Leftrightarrow -e^2 = -2e^2 + b \Leftrightarrow -e^2 + 2e^2 = b \Leftrightarrow e^2 = b$$

Logo, a equação reduzida da reta tangente ao gráfico da função  $f$  no ponto de abcissa  $x = -1$  é:

$$y = 2e^2 \times x + e^2$$



6.

- 6.1. Considerando um ponto  $P$ , sobre o lado  $[AB]$  do trapézio, tal que o segmento  $[DP]$  seja perpendicular ao lado  $[AB]$ , consideramos o ângulo  $ADP$  com amplitude  $\frac{\pi}{2} - \alpha$

Como  $\overline{DP} = 1$ , recorrendo à definição de cosseno, temos:

$$\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\overline{DP}}{\overline{DA}} \Leftrightarrow \overline{DA} = \frac{1}{\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)}$$

e como  $\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = \sin \alpha$ , temos que:  $\overline{DA} = \frac{1}{\sin \alpha}$

Da definição de tangente de um ângulo, e como  $\operatorname{tg}\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}$  temos:

$$\operatorname{tg}\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\overline{AP}}{\overline{DP}} \Leftrightarrow \operatorname{tg}\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\overline{AP}}{1} \Leftrightarrow \overline{AP} = -\frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}$$

Logo, o perímetro do trapézio é:

$$\begin{aligned} P_{[ABCD]} &= \overline{PB} + \overline{BC} + \overline{CD} + \overline{DA} + \overline{AP} = 1 + 1 + 1 + \frac{1}{\sin \alpha} + \left(-\frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}\right) = \\ &= 3 + \frac{1}{\sin \alpha} - \frac{1}{\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}} = 3 + \frac{1}{\sin \alpha} - \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = 3 + \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha} \end{aligned}$$

Ou seja, para cada valor de  $\alpha \in \left] \frac{\pi}{2}, \pi \right[$ , o perímetro do trapézio  $[ABCD]$  é  $P(\alpha) = 3 + \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha}$

- 6.2. Começando por determinar a expressão da derivada, temos:

$$\begin{aligned} P'(\alpha) &= \left(3 + \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha}\right)' = (3)' + \left(\frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha}\right)' = 0 + \frac{(1 - \cos \alpha)'(\sin \alpha) - (1 - \cos \alpha)(\sin \alpha)'}{(\sin \alpha)^2} = \\ &= \frac{0 - (-\sin \alpha)(\sin \alpha) - (1 - \cos \alpha)(\cos \alpha)}{\sin^2 \alpha} = \frac{\sin^2 \alpha - (\cos \alpha - \cos^2 \alpha)}{\sin^2 \alpha} = \\ &= \frac{\sin^2 \alpha - \cos \alpha + \cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} = \frac{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha - \cos \alpha}{\sin^2 \alpha} = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin^2 \alpha} \end{aligned}$$

Como  $\operatorname{tg}^2 \theta + 1 = \frac{1}{\cos^2 \theta}$  e  $\operatorname{tg} \theta = -\sqrt{8}$ , vem:

$$(-\sqrt{8})^2 + 1 = \frac{1}{\cos^2 \theta} \Leftrightarrow 8 + 1 = \frac{1}{\cos^2 \theta} \Leftrightarrow \cos^2 \theta = \frac{1}{9} \Leftrightarrow \cos \theta = \pm \sqrt{\frac{1}{9}} \Leftrightarrow \cos \theta = \pm \frac{1}{3}$$

Como  $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ ,  $\cos \theta < 0$ , logo  $\cos \theta = -\frac{1}{3}$

E também:  $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \Leftrightarrow \sin^2 \theta = 1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^2 \Leftrightarrow \sin^2 \theta = 1 - \frac{1}{9} \Leftrightarrow \sin^2 \theta = \frac{8}{9}$

$$\text{Assim, } P'(\theta) = \frac{1 - \left(-\frac{1}{3}\right)}{\frac{8}{9}} = \frac{1 + \frac{1}{3}}{\frac{8}{9}} = \frac{\frac{4}{3}}{\frac{8}{9}} = \frac{4 \times 9}{3 \times 8} = \frac{3}{2}$$

