Exame nacional de Matemática A **(2012, 2.ª fase)**

Proposta de resolução

GRUPO I

1. Para calcular o número de códigos diferentes, de acordo com as restrições impostas, podemos começar por escolher a posição do ≪2≫, e assim existem 7 posições possíveis.
   Por cada uma das 7 escolhas anteriores, escolhemos outras duas posições (de entre as 6 disponíveis para posicionar os ≪5≫, logo existem ${}^6C_2$ escolhas diferentes.
   Como as restantes posições são todas ocupadas por ≪a≫, a colocação dos ≪a≫ corresponde a uma única hipótese de posicionamento. Assim temos que o número total de hipóteses possíveis é

   $$7 \times {}^6C_2 \times 1 = 105$$

   Resposta: **Opção A**

2. Como o valor médio da variável aleatória X é $\frac{35}{24}$, temos que:

   $$\frac{35}{24} = 0 \times b^3 + 1 \times a + 2 \times 2a \;\Leftrightarrow\; \frac{35}{24} = 0 + a + 4a \;\Leftrightarrow\; \frac{35}{24} = 5a \;\Leftrightarrow\; \frac{7 \times 5}{24 \times 5} = a \;\Leftrightarrow\; \frac{7}{24} = a$$

   Também sabemos que:

   $$b^3 + a + 2a = 1 \;\Leftrightarrow\; b^3 + 3a = 1 \;\Leftrightarrow\; b^3 = 1 - 3a$$

   Substituindo o valor de a, temos:

   $$b^3 = 1 - 3 \times \frac{7}{24} \;\Leftrightarrow\; b^3 = 1 - \frac{21}{24} \;\Leftrightarrow\; b^3 = \frac{24}{24} - \frac{21}{24} \;\Leftrightarrow\; b^3 = \frac{3}{24} \;\Leftrightarrow\; b^3 = \frac{1}{8} \;\Leftrightarrow\; b = \sqrt[3]{\frac{1}{8}} \;\Leftrightarrow\; b = \frac{1}{2}$$

   Resposta: **Opção C**

3. Como o penúltimo elemento da linha do triângulo de Pascal é 111, sabemos que essa linha tem 112 elementos, todas da forma ${}^{112}C_n$.

   Logo só existem 6 elementos desta linha que são inferiores a 10^5:
   ${}^{111}C_0 = {}^{111}C_{111} (= 1)$; ${}^{111}C_1 = {}^{111}C_{110} (= 111)$ e ainda ${}^{111}C_2 = {}^{111}C_{109} (= 6105)$
   Porque
   ${}^{111}C_3 = {}^{111}C_{108} = 221\,815$ e todos os restantes são superiores a estes.

   Logo, sabemos que existem $112 - 6 = 106$ elementos superiores a 10^5, num total de 112, ou seja, o valor da probabilidade é $\frac{106}{112} = \frac{53}{56}$

   Resposta: **Opção B**

4. Como (x_n) é uma sucessão com termos em $]-1,1[$ e $\lim(x_n) = 1$, então:

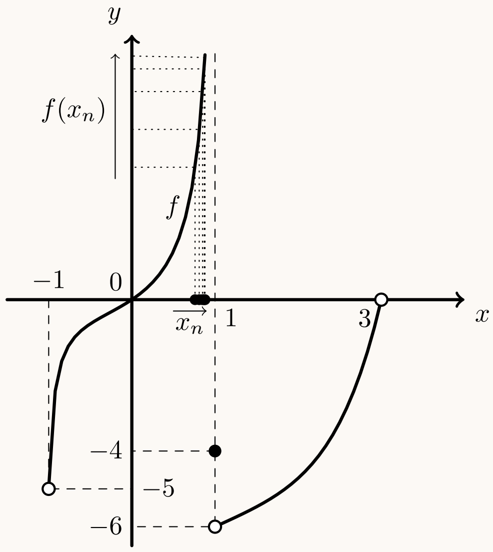
$$\lim x_n = 1^-$$

E assim, de acordo com o gráfico, temos que:

$$\lim f\left(x_n\right) = \lim_{x\to 1^-} f(x) = +\infty$$

Graficamente, na figura ao lado, estão representados alguns termos de (x_n) como objetos, e alguns termos da sucessão das imagens $f(x_n)$, que tendem para $+\infty$, quando (x_n) tende para 1

Resposta: **Opção A**



5. Sabemos que o declive da reta tangente (m) por ser calculado por:

   - a tangente da inclinação: $m = \operatorname{tg}\dfrac{\pi}{4} = 1$
   - o valor da derivada no ponto de abcissa a
     Determinando a expressão da derivada, vem:

$$f'(x) = \left(\ln\left(\frac{x}{3}+2\right)\right)' = \frac{\left(\frac{x}{3}+2\right)'}{\frac{x}{3}+2} = \frac{\left(\frac{x}{3}\right)'+(2)'}{\frac{x}{3}+\frac{6}{3}} = \frac{\frac{1}{3}+0}{\frac{x+6}{3}} = \frac{1}{x+6}$$

   Logo, $m = f'(a) = \dfrac{1}{a+6}$

   Desta forma temos que:

$$\frac{1}{a+6} = 1 \quad\Leftrightarrow\quad 1 = a+6 \wedge a \neq -6 \quad\Leftrightarrow\quad a = -5$$

   Resposta: **Opção D**

6. Como $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 3$ podemos afirmar que a reta horizontal definida pela equação $y = 3$ é uma assíntota do gráfico de f

   Como $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = +\infty$ podemos afirmar que a reta vertical definida pela equação $x = 1$ é uma assíntota do gráfico de f

   Como $y = mx + b$ é uma assíntota não vertical do gráfico de f se $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x) - mx) = b$, então como $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-2x) = 1$, temos que a reta definida por $y = 2x+1$ é uma assíntota não vertical do gráfico de f

   Assim, a única opção em que são indicadas duas das três assíntotas identificadas é a opção (B).

   Resposta: **Opção B**

7. Como $\overline{z_2} = 3 + ki$ temos:

   $z_1 \times \overline{z_2} = (2+i)(3+ki) = 6 + 2ki + 3i + ki^2 = 6 - 1 \times k + i(2k+3) = (6-k) + (2k+3)i$

   Para que $z_1 \times \overline{z_2}$ seja um imaginário puro $\operatorname{Re}(z_1 \times \overline{z_2}) = 0$

   Logo $6 - k = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 6 = k$

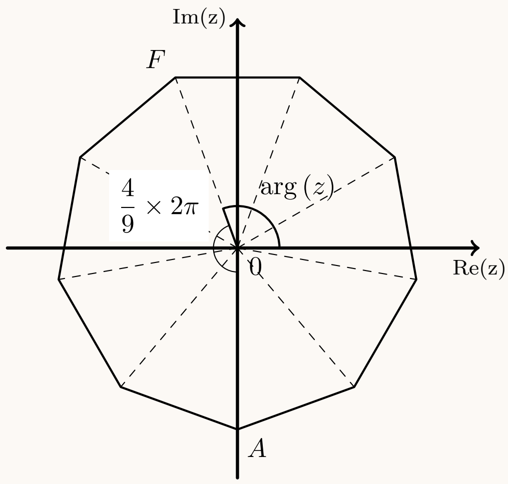
   Resposta: **Opção D**

8. Designado por z e w os números complexos que têm por imagens geométricas os pontos F e A, respetivamente. Assim temos que $|z| = |w| = 3$, porque os pontos A e F estão a igual distância da origem.

   Sabemos que o ângulo FOA tem amplitude $\frac{4}{9} \times 2\pi = \frac{8\pi}{9}$, porque os vértices do polígono dividem o ângulo giro em 9 partes iguais.

   Logo $\arg(w) = \arg(z) + \frac{10\pi}{9}$

   Como o ponto A está dobre a parte negativa do eixo imaginário temos que $\arg(w) = \frac{3\pi}{2}$, pelo que, substituindo na igualdade anterior, vem:

   $$\frac{3\pi}{2} = \arg(z) + \frac{8\pi}{9} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{3\pi}{2} - \frac{8\pi}{9} = \arg(z) \quad \Leftrightarrow$$

   $$\Leftrightarrow \quad \frac{27\pi}{18} - \frac{16\pi}{18} = \arg(z) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{11\pi}{18} = \arg(z)$$

   Resposta: **Opção B**

GRUPO II

1.

   1.1. Sabemos que $i^0 = 1$, $i^1 = i$, $i^2 = -1$ e $i^3 = -i$, e que é válida a igualdade $i^n = i^k$, onde k é o resto da divisão inteira de n por 4.
   Assim, como $4n - 6 = 4n - 8 + 2 = 4(n-2) \mathbf{+2}$ temos que $i^{4n-6} = i^2 = -1$

   Devemos escrever $2\operatorname{cis}\left(-\frac{\pi}{6}\right)$ na f.a. para podermos somar as parcelas do numerador:

   $$2\operatorname{cis}\left(-\frac{\pi}{6}\right) = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right) = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) - i\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)$$

   Assim temos que:

   $$\frac{\sqrt{3} \times i^{4n-6} + 2\operatorname{cis}\left(-\frac{\pi}{6}\right)}{2\operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{5}\right)} = \frac{\sqrt{3} \times (-1) + 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)}{2\operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{5}\right)} = \frac{-\sqrt{3} + \sqrt{3} - \frac{2}{2}i}{2\operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{5}\right)} = \frac{-i}{2\operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{5}\right)} =$$

   $$= \frac{\operatorname{cis}\left(-\frac{\pi}{2}\right)}{2\operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{5}\right)} = \frac{1}{2}\operatorname{cis}\left(-\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{5}\right) = \frac{1}{2}\operatorname{cis}\left(-\frac{7\pi}{10}\right) = \frac{1}{2}\operatorname{cis}\left(\frac{13\pi}{10}\right)$$

1.2. Como $z_1 = \operatorname{cis}\alpha = \cos\alpha + i\operatorname{sen}\alpha$ e

$z_2 = \operatorname{cis}\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) + i\operatorname{sen}\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = -\operatorname{sen}\alpha + i\cos\alpha$, vem que:

$z_1 + z_2 = (\cos\alpha + i\operatorname{sen}\alpha) + (-\operatorname{sen}\alpha + i\cos\alpha) = (\cos\alpha - \operatorname{sen}\alpha) + i(\operatorname{sen}\alpha + \cos\alpha)$

Assim,

- $\operatorname{Re}(z_1+z_2) = \cos\alpha - \operatorname{sen}\alpha$ e como $\alpha \in \left]\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right[$, logo
  $\cos\alpha < \operatorname{sen}\alpha \quad\Leftrightarrow\quad \cos\alpha - \operatorname{sen}\alpha < 0$, logo temos que $\operatorname{Re}(z_1+z_2) < 0$
- $\operatorname{Im}(z_1+z_2) = \operatorname{sen}\alpha + \cos\alpha$ e como α é um ângulo do 1º quadrante,
  $\operatorname{sen}\alpha > 0 \wedge \cos\alpha > 0 \quad\Rightarrow\quad \operatorname{sen}\alpha + \cos\alpha > 0$, logo temos que $\operatorname{Im}(z_1+z_2) > 0$

Ou seja, a representação geométrica de $z_1 + z_2$ no plano complexo, pertence ao 2.º quadrante.

2.

2.1. Como a experiência ≪*Analisar um pacote de açucar*≫ se repete dez vezes, de forma independente, a distribuição de probabilidades da variável X:≪*Número de pacotes em condições de serem comercializados*≫, segue o modelo binomial $\left(P(X=k) = {}^nC_k\, p^k\, q^{n-k}\right)$.

Considerando como sucesso o acontecimento ≪*Pacote estar em condições de ser comercializado*≫, a respetiva probabilidade, é:

$$p = P(5{,}7 < Y < 7{,}3) = P(6{,}5 - 2\times 0{,}4 < Y < 6{,}5 + 2\times 0{,}4) = P(\mu - 2\sigma < Y < \mu + 2\sigma) \approx 0{,}9545$$

Logo, $q = 1 - p = 1 - P(5{,}7 < Y < 7{,}3) \approx 1 - 0{,}9545 = 0{,}0455$

Assim temos $n = 10$, vem $p \approx 0{,}9545$ e $q \approx 0{,}0455$, pelo que:

$$P(X=8) = {}^{10}C_8 \times (0{,}9545)^8 \times (0{,}0455)^2 \approx 0{,}064$$

2.2. A resposta (I) $({}^{500}C_{30} - {}^{498}C_{28})$ pode ser interpretada como:
O número total de grupos de 30 funcionários que se podem escolher são ${}^{500}C_{30}$. Naturalmente em alguns destes estão presentes as duas irmãs.
Se ao número total destes grupos subtrairmos o número de grupos em que as duas irmãs estão presentes, ou seja, os grupos de 30 elementos que incluem as duas irmãs e mais 28 de entre os restantes 498 funcionários $({}^{498}C_{28})$, restam apenas os grupos onde está apenas uma das irmãs ou então nenhuma delas, o que significa que pelo menos uma delas não integrará o grupo de funcionários escolhidos.

A resposta (II) $(2 \times {}^{498}C_{29} + {}^{498}C_{30})$ pode ser interpretada como:
Os grupos de 30 funcionários, que respeitam a condição defina, podem ser de dois tipos:

- Apenas uma das irmãs pertence ao grupo.
  Existem $2\times{}^{498}C_{29}$ grupos deste tipo, pois resultam de incluir 1 das 2 irmãs e mais 29 funcionários, escolhidos de entre os restantes 498.
- Nenhuma das irmãs pertence ao grupo. Existem ${}^{498}C_{30}$ grupos deste tipo, pois resultam da escolha de 30 funcionários do grupo de 498 funcionários que não incluí as irmãs.

Assim, $2\times{}^{498}C_{29}+{}^{498}C_{30}$ representa o número de grupos que incluí apenas uma das irmãs, adicionado ao número de grupos que não incluí nenhuma das irmãs.

3. Temos que:

$$
\begin{aligned}
P\left(\overline{A\cap B}|B\right)+P(A|B) &= \frac{P\left(\left(\overline{A\cap B}\right)\cap B\right)}{P(B)}+\frac{P(A\cap B)}{P(B)} && \text{Definição: } P(X|Y)=\frac{P(X\cap Y)}{P(Y)}\\
&= \frac{P\left(\left(\overline{A}\cup\overline{B}\right)\cap B\right)+P(A\cap B)}{P(B)} && \text{Leis de De Morgan: } \overline{X\cap Y}=\overline{X}\cup\overline{Y}\\
&= \frac{P\left(\left(\overline{A}\cap B\right)\cup\left(\overline{B}\cap B\right)\right)+P(A\cap B)}{P(B)}\\
&= \frac{P\left(\overline{A}\cap B\right)+P(A\cap B)}{P(B)} && \overline{B}\cap B=\emptyset \text{ e } X\cup\emptyset=X\\
&= \frac{P(B)-P(A\cap B)+P(A\cap B)}{P(B)} && \text{Teorema: } P\left(X\cap\overline{Y}\right)=P(X)-P(X\cap Y)\\
&= \frac{P(B)}{P(B)}\\
&= 1 && \text{Hipótese: } P(B)\neq 0
\end{aligned}
$$

Logo, se $P(B)\neq 0$ então $P\left(\overline{A\cap B}|B\right)+P(A|B)=1$ *q.e.d.*

4.

4.1. Temos que $f(0)=1-e^{k+1}$

Calculando $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$, vem

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{1-e^{4x}}{x}=\frac{1-e^{4(0^+)}}{0^+}=\frac{1-1}{0}=\frac{0}{0} \text{ (Indeterminação)}$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{1-e^{4x}}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{-(-1+e^{4x})}{x}=\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{4}{4}\times\frac{-(e^{4x}-1)}{x}\right)=$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\left(-4\times\frac{(e^{4x}-1)}{4x}\right)=\lim_{x\to 0^+}(-4)\times\underbrace{\lim_{x\to 0^+}\frac{(e^{4x}-1)}{4x}}_{\text{Lim. Notável}}=-4\times 1=-4$$

Como se pretende que $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=f(0)$, vem

$$-4=1-e^{k+1} \Leftrightarrow e^{k+1}=1+4 \Leftrightarrow e^{k+1}=5 \Leftrightarrow k+1=\ln 5 \Leftrightarrow k=-1+\ln 5$$

4.2. Como a função f é contínua em $\mathbb{R}\backslash\{0\}$, porque resulta de operações sucessivas entre funções contínuas, só podem existir assíntotas verticais quando $x \to 0^-$ ou quando $x \to 0^+$.
Calculando os limites temos:

- $$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{1-e^{4x}}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-\left(e^{4x}-1\right)}{\frac{1}{4}\times 4x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-4\left(e^{4x}-1\right)}{4x} = -4\lim_{x\to 0^+}\frac{e^{4x}-1}{4x} = -4$$

  (fazendo $y = 4x$, se $x \to 0^+$, então $y \to 0^+$)

  $$= -4\underbrace{\lim_{y\to 0^+}\frac{e^y-1}{y}}_{\text{Lim. Notável}} = -4\times 1 = -4$$

- $$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-}\frac{\operatorname{sen} x}{1-\sqrt{1-x^3}} = \lim_{x\to 0^-}\frac{(\operatorname{sen} x)(1+\sqrt{1-x^3})}{(1-\sqrt{1-x^3})(1+\sqrt{1-x^3})} = \lim_{x\to 0^-}\frac{(\operatorname{sen} x)(1+\sqrt{1-x^3})}{1^2-(\sqrt{1-x^3})^2} =$$

  $$= \lim_{x\to 0^-}\frac{(\operatorname{sen} x)(1+\sqrt{1-x^3})}{1-(1-x^3)} = \lim_{x\to 0^-}\frac{(\operatorname{sen} x)(1+\sqrt{1-x^3})}{1-1+x^3} = \lim_{x\to 0^-}\frac{(\operatorname{sen} x)(1+\sqrt{1-x^3})}{x^3} =$$

  $$= \underbrace{\lim_{x\to 0^-}\frac{\operatorname{sen} x}{x}}_{\text{Lim. Notável}}\times\lim_{x\to 0^-}\frac{1+\sqrt{1-x^3}}{x^2} = 1\times\frac{1+\sqrt{1}}{(0^-)^2} = \frac{2}{0^+} = +\infty$$

Assim podemos concluir que $x = 0$ é a única assíntota vertical do gráfico de f (quando $x \to 0^-$).

4.3. Para estudar o sentido o sentido das concavidades e a existência de pontos de inflexão, começamos por determinar a expressão da segunda derivada:

$$\text{Como } x \in \mathbb{R}^+\,,\ g'(x) = f(x) - \frac{1}{x} = \frac{1-e^{4x}}{x} - \frac{1}{x} = \frac{1-e^{4x}-1}{x} = -\frac{e^{4x}}{x}$$

$$g''(x) = \left(g'(x)\right)' = \left(-\frac{e^{4x}}{x}\right)' = -\left(\frac{e^{4x}}{x}\right)' = -\frac{(e^{4x})'\times x - e^{4x}\times(x)'}{x^2} = -\frac{(4x)'e^{4x}\times x - e^{4x}}{x^2} =$$

$$= -\frac{4e^{4x}\times x - e^{4x}}{x^2} = -\frac{e^{4x}(4x-1)}{x^2}$$

Determinando os zeros da segunda derivada, vem:

$$g''(x) = 0 \ \Leftrightarrow\ -\frac{e^{4x}(4x-1)}{x^2} = 0 \ \Leftrightarrow\ -e^{4x}(4x-1) = 0 \land \underbrace{x^2 \neq 0}_{\text{PV, } x>0} \ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ \underbrace{-e^{4x} = 0}_{\text{Eq Imp}} \lor 4x-1 = 0 \ \Leftrightarrow\ x = \frac{1}{4}$$

Assim, estudando a variação de sinal de g'' e relacionando com o sentido das concavidades do gráfico de g, vem:

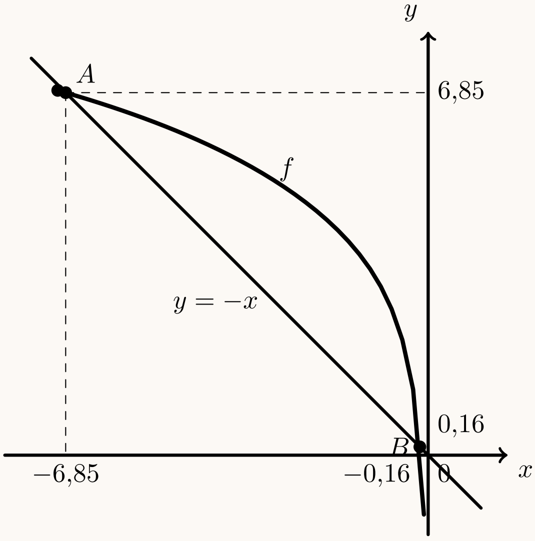
x	0		$\frac{1}{4}$	$+\infty$
g''	n.d.	$+$	0	$-$
g	n.d.		Pt. I.	

Logo, podemos concluir que o gráfico de g:

- tem um único ponto de inflexão (de abcissa $x = \frac{1}{4}$)
- tem a concavidade voltada para cima no intervalo $\left]0,\frac{1}{4}\right]$
- tem a concavidade voltada para baixo no intervalo $\left[\frac{1}{4},+\infty\right[$

5. A bissetriz dos quadrantes pares, é a reta de equação $y = -x$, logo as coordenadas dos pontos A e B podem ser determinadas através da interseção do gráfico da função f com a reta $y = -x$.

Assim, traçando, na calculadora gráfica, os gráficos da função f e da reta, numa janela compatível como o domínio da função f, $(-7 \leq x < 0)$ - reproduzidos na figura ao lado - e recorrendo à função da calculadora para determinar valores aproximados das coordenadas dos pontos de interseção de dois gráficos, obtemos valores, aproximado às centésimas, para as coordenadas dos pontos $A(-6{,}85; 6{,}85)$ e $B(-0{,}16; 0{,}16)$

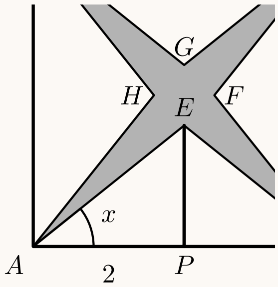


Calculando a distância entre dois pontos pela fórmula $d = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2)}$ vem que:

$$d \approx \sqrt{(-0.16 - (-6.85))^2 + (0.16 - 6.85)^2} \approx$$
$$\approx \sqrt{6{,}69^2 + (-6{,}69)^2} \approx \sqrt{44{,}756 + 44{,}756} \approx$$
$$\approx \sqrt{89{,}512} \approx 9{,}46$$

6.

6.1. Definindo o ponto P, como o ponto médio do lado $[AB]$, a área da região sombreada pode ser calculada como a diferença entre a área do quadrado e a soma das áreas de 8 triângulos retângulos (o triângulo $[AEP]$ e os restantes 7 semelhantes a este):



$$A_{[AEBFCGDH]} = A_{[ABCD]} - 8 \times A_{[AEP]}$$

Como P é o ponto médio de $[AB]$, temos que $\overline{AP} = 2$, podemos determinar $\overline{EP}$, recorrendo à definição de tangente de um ângulo:

$$\operatorname{tg} x = \frac{\overline{EP}}{\overline{AP}} \quad \Leftrightarrow \quad \operatorname{tg} x = \frac{\overline{EP}}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \overline{EP} = 2 \operatorname{tg} x$$

Assim, calculando a área da região sombreada, vem:

$$A_{[AEBFCGDH]} = A_{[ABCD]} - 8 \times A_{[AEP]} = \overline{AB}^2 - 8 \times \frac{\overline{AP} \times \overline{EP}}{2} = 4^2 - 8 \times \frac{2 \times 2 \operatorname{tg} x}{2} =$$
$$= 16 - 8 \times 2 \operatorname{tg} x = 16 - 16 \operatorname{tg} x = 16(1 - \operatorname{tg} x)$$

Logo, para cada valor de $x \in \left]0, \frac{\pi}{4}\right[$, a área da região sombreada é dada por $a(x) = 16(1 - \operatorname{tg} x)$

6.2. Como a função a resulta de operações sucessivas de funções contínuas em $\left]0, \frac{\pi}{4}\right[$, é uma função contínua, e, por isso, também é contínua em $\left[\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{5}\right]$.

Como $4{,}38 < 5 < 11{,}71$, ou seja, $a\left(\frac{\pi}{5}\right) < 5 < a\left(\frac{\pi}{12}\right)$, então, podemos concluir, pelo Teorema de Bolzano, que existe $\alpha \in \left]\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{5}\right[$, tal que $a(\alpha) = 5$, ou seja, que existe um ângulo α com amplitude compreendida entre $\frac{\pi}{12}$ *rad* e $\frac{\pi}{5}$ *rad*, que define uma região sombreada com área 5.

C.A.

$$a\left(\frac{\pi}{12}\right) = 16\left(1 - \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{12}\right)\right) \approx 11{,}71$$

$$a\left(\frac{\pi}{5}\right) = 16\left(1 - \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{5}\right)\right) \approx 4{,}38$$