

Prova Escrita de MATEMÁTICA A - 12º Ano
2016 - 1ª Fase

Proposta de resolução

GRUPO I

1. Como $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A|B) \times P(B)$ vem que:

$$P(A \cap B) = \frac{1}{6} \times \frac{3}{10} = \frac{3}{60} = \frac{1}{20}$$

Como $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$, temos que:

$$P(A \cup B) = \frac{2}{5} + \frac{3}{10} - \frac{1}{20} = \frac{8}{20} + \frac{6}{20} - \frac{1}{20} = \frac{13}{20}$$

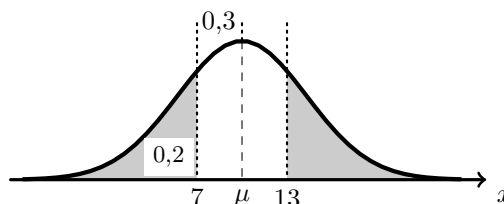
Resposta: **Opção C**

2. Atendendo às características da distribuição normal, temos que:

- $P(X < 10) = 0,5$
- $P(X < 7) = P(X < 10) - P(7 < X < 10) = 0,5 - 0,3 = 0,2$

Logo como a distribuição normal é simétrica em relação ao valor médio e como 7 e 13 são valores equidistantes da média ($10 - 7 = 3$ e $13 - 10 = 3$), temos que:

$$P(X > 13) = P(X < 7) = 0,2$$



Resposta: **Opção B**

3. Calculando o valor do limite, temos que:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{ae^{x-a} - a}{x^2 - a^2} = \frac{ae^{a-a} - a}{a^2 - a^2} = \frac{a \times e^0 - a}{a - a} = \frac{a \times 1 - a}{a - a} = \frac{0}{0} \text{ (Indeterminação)}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{ae^{x-a} - a}{x^2 - a^2} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{a(e^{x-a} - 1)}{(x-a)(x+a)} = \lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{a}{x+a} \times \frac{e^{x-a} - 1}{x-a} \right) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{a}{x+a} \times \lim_{x \rightarrow a} \frac{e^{x-a} - 1}{x-a} =$$

(fazendo $y = x - a$, temos que se $x \rightarrow a$, então $y \rightarrow 0$)

$$= \frac{a}{a+a} \times \underbrace{\lim_{y \rightarrow 0} \left(\frac{e^y - 1}{y} \right)}_{\text{Lim. Notável}} = \frac{a}{2a} \times 1 = \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{2}$$

Resposta: **Opção B**



4. Simplificando a expressão dada, temos que:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x) + e^x - x}{x} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{f(x)}{x} + \frac{e^x}{x} - \frac{x}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} + \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{x} - \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} + \frac{0^+}{-\infty} - \lim_{x \rightarrow -\infty} 1 = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} + 0 - 1 = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} - 1\end{aligned}$$

Pelo que:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x) + e^x - x}{x} = 1 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} - 1 = 1 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = 1 + 1 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = 2$$

Como o domínio da função é \mathbb{R}^- , então o declive da assíntota do gráfico de f , é: $m = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = 2$

Resposta: **Opção D**

5. Identificando as medidas relevantes para o cálculo da área do trapézio, temos que:

- a base menor é a ordenada o ponto P , ou seja, $\overline{OP} = 1$
- como R é um ponto do quarto quadrante, então temos que $\cos \alpha > 0$, pelo que a altura do trapézio $[OPQR]$ é: $\overline{PQ} = \cos \alpha$
- como R é um ponto do quarto quadrante, então temos que $\sin \alpha < 0$, pelo que a base maior do trapézio $[OPQR]$ é: $\overline{QR} = 1 + (-\sin \alpha) = 1 - \sin \alpha$

Desta forma, a área do trapézio é:

$$\begin{aligned}A_{[OPQR]} &= \frac{\overline{OP} + \overline{QR}}{2} \times \overline{PQ} = \frac{1 + 1 - \sin \alpha}{2} \times \cos \alpha = \frac{2 - \sin \alpha}{2} \times \cos \alpha = \\ &= \frac{2 \cos \alpha - \sin \alpha \cos \alpha}{2} = \cos \alpha - \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{2}\end{aligned}$$

Resposta: **Opção D**

6. Escrevendo o número complexo -3 na forma trigonométrica, vem $-3 = 3 \operatorname{cis}(-\pi)$

Desta forma, temos que:

$$z = -3 \operatorname{cis} \theta = 3 \operatorname{cis}(-\pi) \times \operatorname{cis} \theta = (3 \times 1) \operatorname{cis}(-\pi + \theta) = 3 \operatorname{cis}(\theta - \pi)$$

Logo, como $\theta \in \left] \pi, \frac{3\pi}{2} \right[$, então $\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$, pelo que:

$$\pi - \pi < \theta - \pi < \frac{3\pi}{2} - \pi \Leftrightarrow 0 < \theta - \pi < \frac{\pi}{2}$$

Ou seja, $\arg(z) \in \left] 0, \frac{\pi}{2} \right[$, logo a imagem geométrica do número complexo z é um ponto do primeiro quadrante.

Resposta: **Opção A**



7. Como a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180° , e o triângulo é isósceles ($B\hat{A}C = A\hat{C}B$), podemos determinar a amplitude do ângulo CBA , ou seja, a amplitude do ângulo formado pelos vetores \vec{BA} e \vec{BC} :

$$C\hat{B}A = 180 - 2 \times 75 = 180 - 150 = 30^\circ$$

Desta forma valor do produto escalar $\vec{BA} \cdot \vec{BC}$ é:

$$\vec{BA} \cdot \vec{BC} = \|\vec{BA}\| \times \|\vec{BC}\| \times \cos(\vec{BA} \wedge \vec{BC}) = \sqrt{2} \times \sqrt{2} \times \cos 30^\circ = 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$$

Resposta: **Opção C**

8. Calculando os limites das duas sucessões vem que:

- $\lim(u_n) = \lim\left(\frac{kn+3}{2n}\right) = \lim\left(\frac{kn}{2n} + \frac{3}{2n}\right) = \lim\left(\frac{k}{2} + \frac{3}{2n}\right)$

Como a sucessão $\left(\frac{3}{2n}\right)$ é um infinitésimo, então, $\lim\left(\frac{k}{2} + \frac{3}{2n}\right) = \frac{k}{2}$

- $\lim(v_n) = \lim\left(\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right) = \ln\left(\lim\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right) = \ln\left(\lim\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right) = \ln e = 1$

Assim, vem que:

$$\lim(u_n) = \lim(v_n) \Leftrightarrow \frac{k}{2} = 1 \Leftrightarrow k = 2$$

Resposta: **Opção B**



GRUPO II

1. Escrevendo $-1 + \sqrt{3}i$ na f.t. temos $-1 + \sqrt{3}i = \rho \operatorname{cis} \alpha$, onde:

- $\rho = |-1 + \sqrt{3}i| = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$
- $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{3}}{-1} = -\sqrt{3}$; como $\operatorname{sen} \alpha > 0$ e $\operatorname{cos} \alpha < 0$, α é um ângulo do 2º quadrante, logo
$$\alpha = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{3\pi}{3} - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$$

Assim temos que $-1 + \sqrt{3}i = 2 \operatorname{cis} \frac{2\pi}{3}$, pelo que podemos simplificar a expressão do número complexo z_1 :

$$z_1 = \frac{8 \operatorname{cis} \theta}{2 \operatorname{cis} \frac{2\pi}{3}} = \frac{8}{2} \operatorname{cis} \left(\theta - \frac{2\pi}{3} \right) = 4 \operatorname{cis} \left(\theta - \frac{2\pi}{3} \right)$$

Como $\operatorname{Arg}(\bar{w}) = -\operatorname{Arg}(w)$ e $|\bar{w}| = |w|$, vem que: $\bar{z}_1 = 4 \operatorname{cis} \left(- \left(\theta - \frac{2\pi}{3} \right) \right) = 4 \operatorname{cis} \left(\frac{2\pi}{3} - \theta \right)$

Logo:

$$\bar{z}_1 \times z_2 = 4 \operatorname{cis} \left(\frac{2\pi}{3} - \theta \right) \times \operatorname{cis}(2\theta) = (4 \times 1) \operatorname{cis} \left(\frac{2\pi}{3} - \theta + 2\theta \right) = 4 \operatorname{cis} \left(\frac{2\pi}{3} + \theta \right)$$

Para que $\bar{z}_1 \times z_2$ seja um número real, então $\operatorname{Arg}(\bar{z}_1 \times z_2) = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

Atribuindo valores a k , vem que:

- Se $k = 0$, então $\operatorname{Arg}(\bar{z}_1 \times z_2) = 0 \Leftrightarrow \frac{2\pi}{3} + \theta = 0 \Leftrightarrow \theta = -\frac{2\pi}{3}$, ($\theta \notin]0, \pi[$)
- Se $k = 1$, então $\operatorname{Arg}(\bar{z}_1 \times z_2) = \pi \Leftrightarrow \frac{2\pi}{3} + \theta = \pi \Leftrightarrow \theta = \pi - \frac{2\pi}{3} \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{3}$, ($\theta \in]0, \pi[$)
- Se $k = 2$, então $\operatorname{Arg}(\bar{z}_1 \times z_2) = 2\pi \Leftrightarrow \frac{2\pi}{3} + \theta = 2\pi \Leftrightarrow \theta = 2\pi - \frac{2\pi}{3} \Leftrightarrow \theta = \frac{4\pi}{3}$, ($\theta \notin]0, \pi[$)

Assim, o valor de $\theta \in]0, \pi[$ para o qual $\bar{z}_1 \times z_2$ é um número real é $\theta = \frac{\pi}{3}$

2.

2.1. Identificando os valores que a variável X pode assumir, e calculando as respectivas probabilidades, temos:

- 1 - correspondente à extração de duas bolas com o número 1 (1×1);

$$P(X = 1) = \frac{{}^4C_2}{{}^9C_2} = \frac{1}{6}$$

- 2 - correspondente à extração de uma bola com o número 1 e outra com o número 2 (1×2);

$$P(X = 2) = \frac{{}^4C_1 \times {}^4C_1}{{}^9C_2} = \frac{4}{9}$$

- 4 - correspondente à extração de uma bola com o número 1 e outra com o número 4 (1×4), ou, correspondente à extração de duas bolas com o número 2 (2×2);

$$P(X = 4) = \frac{{}^4C_2}{{}^9C_2} + \frac{{}^4C_1 \times {}^1C_1}{{}^9C_2} = \frac{5}{18}$$

- 8 - correspondente à extração de uma bola com o número 2 e outra com o número 4 (2×4);

$$P(X = 8) = \frac{{}^4C_1 \times {}^1C_1}{{}^9C_2} = \frac{1}{9}$$

(como só existe uma bola com o número 4, não é possível considerar a extração de duas bolas com o número 4)

Logo, a tabela de distribuição de probabilidades da variável aleatória X é:

x_i	1	2	4	8
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{5}{18}$	$\frac{1}{9}$



- 2.2. Para que o número seja ímpar o algarismo das unidades deve ser 1 (porque é o único número das bolas que é ímpar). Assim, dos 9 algarismos do números, apenas 8 podem ser ocupados pelas bolas com os números 2 e 4.

Selecionando 4 das 8 posições (disponíveis) do número para serem ocupadas por bolas com o número 2, temos 8C_4 hipóteses, e selecionando 1 das 4 posições disponíveis (excluindo a posição das unidades e as posições ocupadas pelas bolas com os números 4), temos ${}^4C_1 = 4$ hipóteses diferentes.

As restantes posições serão ocupadas pelas bolas com os números 1, pelo que a quantidade de números ímpares que é possível obter, é:

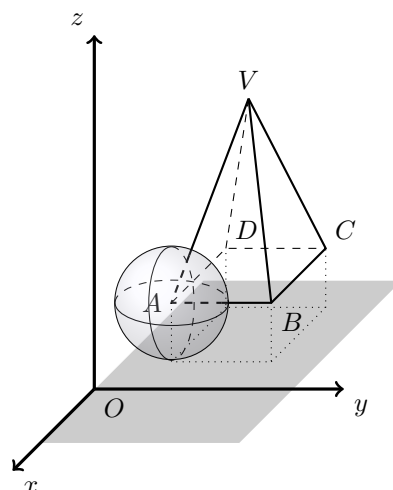
$${}^8C_4 \times 4 = 280$$

3.

- 3.1. Como o ponto A tem cota 1, está à distância 1 do plano xOy , pelo que o raio da superfície esférica de centro no ponto A e que é tangente ao plano xOy tem raio 1.

Assim, a equação da superfície esférica é:

$$\begin{aligned} (x - (-1))^2 + (y - 1)^2 + (z - 1)^2 &= 1^2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (x + 1)^2 + (y - 1)^2 + (z - 1)^2 &= 1 \end{aligned}$$



- 3.2. As coordenadas do ponto V podem ser determinadas pela interseção do plano BCV e da reta perpendicular à base da pirâmide que contém a projeção vertical do ponto V no plano xOy

Esta reta pode ser definida como a interseção dos planos medidores dos segmentos $[AB]$ e $[BC]$:

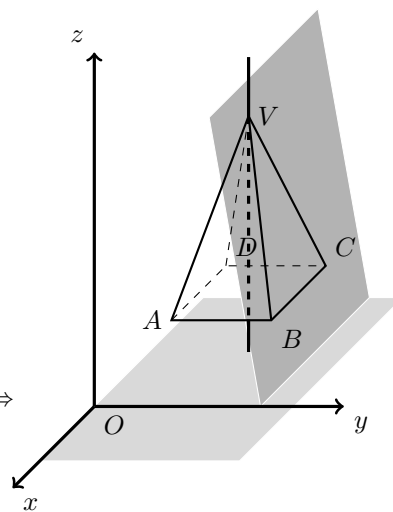
$$x = -2 \wedge y = 2$$

E assim, ao calcular as coordenadas do ponto V , temos que:

$$3y + z - 10 = 0 \wedge x = -2 \wedge y = 2 \Leftrightarrow 3(2) + z = 10 \wedge x = -2 \wedge y = 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow z = 10 - 6 \wedge x = -2 \wedge y = 2 \Leftrightarrow z = 4 \wedge x = -2 \wedge y = 2 \Leftrightarrow$$

Ou seja, as coordenadas do ponto V são $(-2, 2, 4)$



3.3. Determinando as coordenadas do vetor \overrightarrow{AC} , temos:

$$\overrightarrow{AC} = C - A = (-3, 3, 1) - (-1, 1, 1) = (-3 - (-1), 3 - 1, 1 - 1) = (-2, 2, 0)$$

Como o plano α é perpendicular à reta AC , o vetor \overrightarrow{AC} é um vetor normal do plano α , pelo que a equação do plano α é da forma: $\alpha : -2x + 2y + 0 \times z + d = 0$

Substituindo as coordenadas do ponto P (que pertence ao plano α), calculamos o valor do parâmetro d , e determinamos a equação do plano α :

$$-2(1) + 2(-2) + 0 \times (-1) + d = 0 \Leftrightarrow -2 - 4 + 0 + d = 0 \Leftrightarrow -6 + d = 0 \Leftrightarrow d = 6$$

$$\alpha : -2x + 2y + 6 = 0 \Leftrightarrow -x + y + 3 = 0$$

Assim, a interseção do plano α e do plano BCV , é a reta definida por:

$$\begin{cases} -x + y + 3 = 0 \\ 3y + z - 10 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x - 3 \\ 3y = 10 - z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x - 3 \\ y = \frac{10 - z}{3} \end{cases}$$

Escrevendo umas equações cartesianas da reta vem:

$$x - 3 = y = \frac{10 - z}{3} \Leftrightarrow \frac{x - 3}{1} = \frac{y - 0}{1} = \frac{-(z - 10)}{3} \Leftrightarrow \frac{x - 3}{1} = \frac{y - 0}{1} = \frac{z - 10}{-3}$$

Pelo que, podemos identificar um ponto da reta, $R(3, 0, 10)$, e um vetor diretor $\vec{u} = (1, 1, -3)$. E assim, uma equação vetorial desta reta, é:

$$(x, y, z) = (3, 0, 10) + \lambda(1, 1, -3), \lambda \in \mathbb{R}$$



4.

4.1. Começamos por determinar a expressão da derivada da função h , para calcular os extremos da função:

$$\begin{aligned} h'(t) &= \left(20 + \frac{1}{2\pi} \cos(2\pi t) + t \operatorname{sen}(2\pi t)\right)' = (20)' + \left(\frac{1}{2\pi} \cos(2\pi t)\right)' + (t \operatorname{sen}(2\pi t))' = \\ &= 0 + \frac{1}{2\pi} (\cos(2\pi t))' + (t)' \operatorname{sen}(2\pi t) + t (\operatorname{sen}(2\pi t))' = \\ &= \frac{1}{2\pi} (-(2\pi t)') \operatorname{sen}(2\pi t) + 1 \times \operatorname{sen}(2\pi t) + t(2\pi t)' \cos(2\pi t) = \\ &= \frac{1}{2\pi} (-2\pi) \operatorname{sen}(2\pi t) + \operatorname{sen}(2\pi t) + t(2\pi) \cos(2\pi t) = \\ &= -\operatorname{sen}(2\pi t) + \operatorname{sen}(2\pi t) + t(2\pi) \cos(2\pi t) = \\ &= 2\pi t \cos(2\pi t) \end{aligned}$$

Calculando os zeros da derivada, no domínio da função $([0,1])$, vem:

$$\begin{aligned} 2\pi t \cos(2\pi t) = 0 &\Leftrightarrow 2\pi t = 0 \vee \cos(2\pi t) = 0 \Leftrightarrow t = 0 \vee \cos(2\pi t) = \cos \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow t = 0 \vee 2\pi t = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow t = 0 \vee t = \frac{\pi}{2 \times 2\pi} + \frac{k\pi}{2\pi}, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow t = 0 \vee t = \frac{1}{4} + \frac{k}{2}, k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Atribuindo valores a k , calculamos os valores de t compatíveis com o domínio da função:

- Se $k = 0$, então $t = \frac{1}{4}$
- Se $k = 1$, então $t = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{1}{4} + \frac{2}{4} = \frac{3}{4}$

Pelo que o conjunto dos zeros da função é $\left\{0, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right\}$, e assim estudando a variação do sinal da derivada e relacionando com a monotonia da função, vem:

t	0		$\frac{1}{4}$		$\frac{3}{4}$		1
$h'(t)$	0	+	0	-	0	+	+
$h(t)$	min	\longrightarrow	Máx	\longleftarrow	min	\longrightarrow	Máx

Assim, calculando o valor dos mínimos relativos e máximos relativos, temos que:

- $h(0) = 20 + \frac{1}{2\pi} \cos(2\pi \times 0) + 0 \times \operatorname{sen}(2\pi \times 0) = 20 + \frac{1}{2\pi} \cos(0) + 0 = 20 + \frac{1}{2\pi}$
- $h\left(\frac{1}{4}\right) = 20 + \frac{1}{2\pi} \cos\left(2\pi \times \left(\frac{1}{4}\right)\right) + \frac{1}{4} \times \operatorname{sen}\left(2\pi \times \left(\frac{1}{4}\right)\right) =$
 $= 20 + \frac{1}{2\pi} \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{4} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 20 + \frac{1}{2\pi} \times 0 + \frac{1}{4} \times 1 = 20 + \frac{1}{4}$
- $h\left(\frac{3}{4}\right) = 20 + \frac{1}{2\pi} \cos\left(2\pi \times \left(\frac{3}{4}\right)\right) + \frac{3}{4} \times \operatorname{sen}\left(2\pi \times \left(\frac{3}{4}\right)\right) =$
 $= 20 + \frac{1}{2\pi} \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) + \frac{3}{4} \operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 20 + \frac{1}{2\pi} \times 0 + \frac{3}{4} \times (-1) = 20 - \frac{3}{4}$
- $h(1) = 20 + \frac{1}{2\pi} \cos(2\pi \times 1) + 1 \times \operatorname{sen}(2\pi \times 1) = 20 + \frac{1}{2\pi} \times 1 + 0 = 20 + \frac{1}{2\pi}$

Como $h\left(\frac{3}{4}\right) < h(0)$, temos que o mínimo absoluto é $m = h\left(\frac{3}{4}\right) = 20 - \frac{3}{4} = \frac{77}{4}$

Como $h\left(\frac{1}{4}\right) > h(1)$, temos que o máximo absoluto é $M = h\left(\frac{1}{4}\right) = 20 + \frac{1}{4} = \frac{81}{4}$

E assim, o valor da amplitude de oscilação é:

$$A = M - m = \frac{81}{4} - \frac{77}{4} = \frac{4}{4} = 1$$



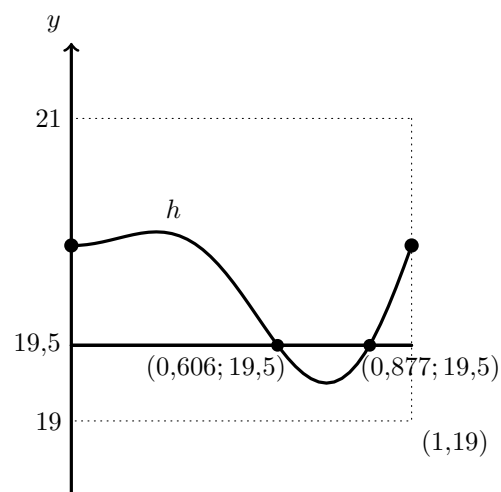
- 4.2. Representando na calculadora o gráfico da função h e a reta de equação $y = 19,5$ na janela compatível com o domínio de h e com $y \in [19,21]$, obtemos o gráfico se reproduz na figura ao lado.

Recorrendo à função da calculadora que permite determinar valores aproximados de um ponto de interseção de dois gráficos, determinamos os valores das abcissas (com aproximação às milésimas) dos pontos do gráfico de h que têm ordenada 19,5, ou seja, os valores de a e de b :

$$a \approx 0,606 \text{ e } b \approx 0,877$$

E assim, o valor de $b - a$ arredondado às centésimas, é:

$$b - a \approx 0,877 - 0,606 \approx 0,27$$



No contexto da situação descrita, o valor de $b - a$ é a duração do intervalo de tempo em que a distância do ponto P do tabuleiro a um ponto fixo foi inferior a 19,5 metros; ou seja, que, durante o minuto em que durou a medição, o ponto P esteve a menos de 19,5 metros de distância do ponto fixo durante 0,27 minutos, aproximadamente.

5.

5.1. Temos que:

$$p = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x) - f(-1)}{x - (-1)} = f'(-1)$$

Recorrendo à expressão algébrica função derivada de f , vem que:

$$p = f'(-1) = e^{-1} ((-1)^2 + (-1) + 1) = e^{-1} (1 - 1 + 1) = e^{-1} \times 1 = \frac{1}{e}$$

Logo, vem que:

$$q = -\frac{1}{p} = -\frac{1}{\frac{1}{e}} = -e$$

Como p é o valor da função derivada de f no ponto de abcissa -1 , então p é o declive da reta tangente ao gráfico da função f no ponto de abcissa -1

E assim, o simétrico do inverso de p , ou seja, o valor de q , é o declive de uma reta perpendicular à reta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa -1



5.2. Para estudar o sentido das concavidades do gráfico e a existência de pontos de inflexão, começamos por determinar a expressão da segunda derivada:




$$\begin{aligned} f''(x) &= (f'(x))' = (e^x (x^2 + x + 1))' = (e^x)' (x^2 + x + 1) + e^x (x^2 + x + 1)' = \\ &= e^x (x^2 + x + 1) + e^x (2x + 1) = e^x (x^2 + x + 1 + 2x + 1) = e^x (x^2 + 3x + 2) \end{aligned}$$

Como os pontos de inflexão são zeros da segunda derivada, vamos determiná-los:

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow e^x (x^2 + 3x + 2) = 0 \Leftrightarrow \underbrace{e^x = 0}_{\text{Eq. Imp.}} \vee x^2 + 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4(1)(2)}}{2} \Leftrightarrow x = -2 \vee x = -1$$

Assim, estudando o sinal da segunda derivada para relacionar com o sentido das concavidades, vem:

x	$-\infty$	-2		-1	$+\infty$
e^x	+	+	+	+	+
$x^2 + 3x + 2$	+	0	-	0	+
$f''(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$		Pt. I.		Pt. I.	

Logo, podemos concluir que o gráfico de f :

- tem a concavidade voltada para baixo no intervalo $]-2,1[$
- tem a concavidade voltada para cima no intervalo $]-\infty, -2[$ e no intervalo $]-1, +\infty[$
- tem dois pontos de inflexão cujas abcissas são, respetivamente, -2 e -1

6.

6.1. Como f é uma função contínua em $]-\infty, -1[$ e em $]1, +\infty[$ (porque resulta de operações entre funções contínuas neste domínio), então as retas definidas pelas equações $x = -1$ e $x = 1$ são as únicas retas verticais que podem ser assíntotas do gráfico de f .

Para averiguar se estas retas são assíntotas do gráfico de f , de acordo com o domínio da função, vamos calcular:

- $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \left(\ln \left(\frac{x-1}{x+1} \right) \right) = \ln \left(\frac{-1^- - 1}{-1^- + 1} \right) = \ln \left(\frac{-2}{0^-} \right) = \ln(+\infty) = +\infty$
- $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\ln \left(\frac{x-1}{x+1} \right) \right) = \ln \left(\frac{1^+ - 1}{1^+ + 1} \right) = \ln \left(\frac{0^+}{2} \right) = \ln(0^+) = -\infty$

Como ambos os limites são infinitos, as duas retas são assíntotas do gráfico de f e não existem outras assíntotas verticais.



6.2. Determinando o declive da reta que contém os pontos de abcissas $-a$ e a , vem que:

$$\begin{aligned}
 m &= \frac{f(a) - f(-a)}{a - (-a)} = \frac{\ln\left(\frac{a-1}{a+1}\right) - \ln\left(\frac{-a-1}{-a+1}\right)}{a+a} = \frac{\ln\left(\frac{a-1}{a+1}\right) - \ln\left(\frac{-(a+1)}{-(a-1)}\right)}{2a} = \\
 &= \frac{\ln\left(\frac{a-1}{a+1}\right) - \ln\left(\frac{a+1}{a-1}\right)}{2a} = \frac{\ln\left(\frac{a-1}{a+1}\right) - \ln\left(\left(\frac{a-1}{a+1}\right)^{-1}\right)}{2a} = \frac{\ln\left(\frac{a-1}{a+1}\right) - (-1)\ln\left(\frac{a-1}{a+1}\right)}{2a} = \\
 &= \frac{\ln\left(\frac{a-1}{a+1}\right) + \ln\left(\frac{a-1}{a+1}\right)}{2a} = \frac{2\ln\left(\frac{a-1}{a+1}\right)}{2a} = \frac{\ln\left(\frac{a-1}{a+1}\right)}{a} = \frac{f(a)}{a}
 \end{aligned}$$

Logo a equação da reta é da forma $y = \frac{f(a)}{a} \times x + b$

Como o ponto de coordenadas $(a, f(a))$ pertence à reta, podemos substituir estas coordenadas e o valor do declive, na expressão geral de uma reta, para determinar o valor da ordenada na origem:

$$f(a) = \frac{f(a)}{a} \times a + b \Leftrightarrow f(a) = f(a) + b \Leftrightarrow f(a) - f(a) = b \Leftrightarrow 0 = b$$

Como a ordenada na origem é zero, podemos concluir que a reta passa na origem do referencial.

