

Prova Escrita de MATEMÁTICA A - 12º Ano
2016 - 2ª Fase

Proposta de resolução

GRUPO I

1. Como $P(\overline{A \cap B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B)$, temos que:

$$P(\overline{A \cap B}) = 0,6 \Leftrightarrow 1 - P(A \cup B) = 0,6 \Leftrightarrow P(A \cup B) = 1 - 0,6 \Leftrightarrow P(A \cup B) = 0,4$$

Como $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$, temos que:

$$P(A \cap B) = 0,2 + 0,3 - 0,4 = 0,1$$

E assim, vem que:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0,1}{0,3} = \frac{1}{3}$$

Resposta: **Opção A**

2. Como a experiência se repete várias vezes, de forma independente, a distribuição de probabilidades segue o modelo binomial ($P(X = k) = {}^n C_k p^k q^{n-k}$).

Temos que:

- $n = 5$ (o Carlos vai executar uma série de cinco lances livres).
- $p = 0,4$ (em cada lance livre, a probabilidade de o Carlos encestar é 0,4)
- $q = 0,6$ (a probabilidade do insucesso pode ser calculada como $q = 1 - 0,4 = 0,6$)

Assim, calculando a probabilidade de o Carlos encestar exatamente quatro vezes, temos:

$$P(X = 4) = {}^5 C_4 \times 0,4^4 \times 0,6^{5-4} = 0,0768$$

Resposta: **Opção C**

3. Usando as propriedades dos logaritmos, temos que:

$$\log_a (ab^3) = \log_a a + \log_a (b^3) = 1 + 3 \log_a b$$

E assim, vem que:

$$\log_a (ab^3) = 5 \Leftrightarrow 1 + 3 \log_a b = 5 \Leftrightarrow \log_a b = \frac{5-1}{3} \Leftrightarrow \log_a b = \frac{4}{3}$$

Logo, vem que:

$$\log_b a = \frac{\log_a a}{\log_a b} = \frac{1}{\log_a b} = \frac{1}{\frac{4}{3}} = \frac{3}{4}$$

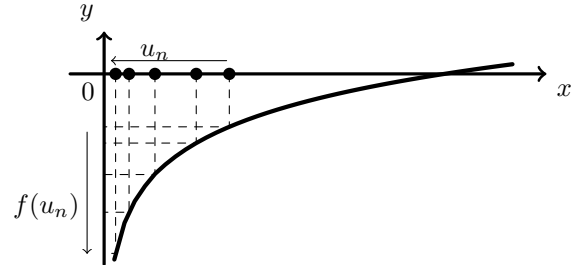
Resposta: **Opção B**



4. Como $\lim u_n = \lim \frac{n}{e^n} = \lim \frac{1}{\frac{e^n}{n}} = \frac{\lim 1}{\underbrace{\lim \frac{e^n}{n}}_{\text{Lim. Notável}}} = \frac{1}{+\infty} = 0^+$, então:

$$\lim f(u_n) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (\ln x) = \ln(0^+) = -\infty$$

Graficamente, na figura ao lado, estão representados alguns termos de (u_n) como objetos, e alguns termos da sucessão das imagens $f(u_n)$, que tendem para $-\infty$, quando o valor de n aumenta.



Resposta: **Opção A**

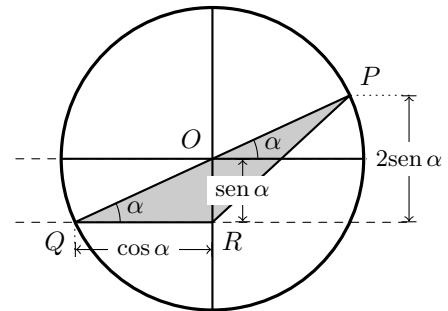
5. Observando que os ângulos AOP e RQO têm a mesma amplitude (porque são ângulos de lados paralelos), relativamente ao triângulo $[PQR]$, vem que:

- $\overline{QR} = \cos \alpha$
- $\overline{OR} = \text{sen } \alpha$
- a altura do triângulo, relativa ao lado $[QR]$ é

$$h = 2 \times \overline{OR} = 2 \text{sen } \alpha$$

Desta forma, a área do triângulo é:

$$A_{[PQR]} = \frac{\overline{QR} \times h}{2} = \frac{\cos \alpha \times 2 \text{sen } \alpha}{2} = \frac{2 \text{sen } \alpha \cos \alpha}{2} = \frac{\text{sen}(2\alpha)}{2}$$



Resposta: **Opção D**

6. O polígono cujos vértices são as imagens geométricas das raízes de índice 6 de um qualquer número complexo, é um hexágono regular.

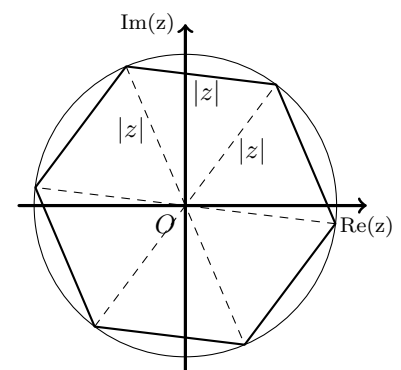
Como qualquer hexágono regular pode ser decomposto em 6 triângulos equiláteros, temos que, o comprimento do lado do hexágono é igual ao raio da circunferência em que o hexágono está inscrito.

Assim, podemos determinar o raio da circunferência como a distância à origem do ponto que é a representação geométrica do número complexo z , ou seja $|z|$

Desta forma vem que o perímetro do hexágono regular é:

$$P_H = 6 \times |z| = 6 \times \sqrt{3^2 + 4^2} = 6 \times \sqrt{25} = 6 \times 5 = 30$$

Resposta: **Opção C**



7. Representando o quadrado definido pela condição dada, podemos verificar que o centro da circunferência é o ponto médio de uma das diagonais, ou seja o ponto :

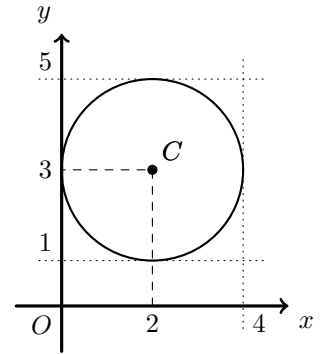
$$C(2,3)$$

Da mesma forma, o raio da circunferência é metade do comprimento do lado:

$$r = \frac{4}{2} = 2$$

E assim, temos que a equação da circunferência inscrita no quadrado é:

$$(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 2^2 \Leftrightarrow (x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 4$$



Resposta: **Opção C**

8. Como (u_n) é progressão geométrica (u_n) , designado por r a razão, temos que o termo de ordem n é

$$u_n = u_1 \times r^{n-1}$$

Assim, temos que

- $u_4 = 32 \Leftrightarrow u_1 \times r^{4-1} = 32 \Leftrightarrow u_1 \times r^3 = 32 \Leftrightarrow u_1 = \frac{32}{r^3}$
- $u_8 = 8192 \Leftrightarrow u_1 \times r^{8-1} = 8192 \Leftrightarrow u_1 \times r^7 = 8192 \Leftrightarrow u_1 = \frac{8192}{r^7}$

Desta forma, e como a progressão é monótona crescente, temos que a razão é positiva ($r > 0$), pelo que podemos calcular o valor da razão:

$$\frac{32}{r^3} = \frac{8192}{r^7} \Leftrightarrow \frac{r^7}{r^3} = \frac{8192}{32} \Leftrightarrow r^4 = 256 \Leftrightarrow r = \sqrt[4]{256} \underset{r>0}{\Rightarrow} r = 4$$

Logo, obtemos o quinto termo, multiplicando o quarto termo pela razão:

$$u_5 = u_4 \times r = 32 \times 4 = 128$$

Resposta: **Opção B**

GRUPO II

1.

- 1.1. No contexto da situação descrita $P(B|A)$ é a probabilidade de que, retirando uma ficha da caixa U e uma ficha da caixa V, o produto dos números das fichas retiradas seja ímpar, sabendo que a soma dos números das fichas retiradas é igual a 10.

Como se retira uma bola de cada caixa, o número de casos possíveis é 4 e correspondem a pares de bolas (em que cada uma é retirada de uma caixa) cuja soma é 10, ou seja:

$$(1,9); (2,8); (3,7) \text{ e } (4,6)$$

De entre estes pares os que correspondem a produtos ímpares são (1,9), porque $1 \times 9 = 9$ e (3,7), porque $3 \times 7 = 21$; (os restantes pares de números, por serem constituídos por números pares resultam num produto par).

Assim, existem 2 casos favoráveis, e, recorrendo à Regra de Laplace para o cálculo da probabilidade, e escrevendo o resultado na forma de fração irredutível, vem:

$$P(B|A) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$



- 1.2. Considerando uma única fila horizontal, existem 4 posições que devem ser ocupadas por 4 elementos (fichas com número par) diferentes e por isso cuja ordem de colocação é relevante, ou seja, são ${}^4A_4 = P_4 = 4!$ as formas de colocar os números pares numa única fila horizontal. Como existem 4 filas horizontais, o número de formas que existem para dispor as fichas com números pares no tabuleiro, ocupando uma única fila horizontal é $4 \times 4!$

Após a colocação das fichas com um número par, restam $16 - 4 = 12$ posições disponíveis no tabuleiro que podem ser ocupadas por uma fichas com um número ímpar (que são diferentes e por isso é relevante a ordem de colocação), ou seja, existem ${}^{12}A_5$ formas de dispor as fichas com os números ímpares.

Assim o número de maneiras diferentes é possível dispor as nove fichas, de tal forma que as que têm número par ocupem uma única fila horizontal é:

$$4 \times 4! \times {}^{12}A_5 = 9\,123\,840$$

2. Escrevendo $-1 + i$ na f.t. temos $-1 + i = \gamma \operatorname{cis} \alpha$, onde:

- $\gamma = |-1 + i| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2}$
- $\operatorname{tg} \alpha = \frac{-1}{1} = -1$; como $\operatorname{sen} \alpha > 0$ e $\operatorname{cos} \alpha < 0$, α é um ângulo do 2º quadrante, logo

$$\alpha = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{4\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$$

Assim temos que $-1 + i = \sqrt{2} \operatorname{cis} \frac{3\pi}{4}$, pelo que podemos simplificar a expressão do número complexo z :

$$z = \frac{\sqrt{2} \operatorname{cis} \frac{3\pi}{4}}{(\rho \operatorname{cis} \theta)^2} = \frac{\sqrt{2} \operatorname{cis} \frac{3\pi}{4}}{\rho^2 \operatorname{cis} (2\theta)} = \frac{\sqrt{2}}{\rho^2} \operatorname{cis} \left(\frac{3\pi}{4} - 2\theta \right)$$

Escrevendo w na f.t. temos $w = -\sqrt{2}i = \sqrt{2} \operatorname{cis} \frac{3\pi}{2}$

Como $z = w$, então temos que:

- $|z| = |w| \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{\rho^2} = \sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{\rho^2 \neq 0} = \rho^2 \Leftrightarrow 1 = \rho^2 \Rightarrow_{\rho > 0} \rho = 1$
- $\operatorname{Arg} z = \operatorname{Arg} w + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \frac{3\pi}{4} - 2\theta = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow 2\theta = \frac{3\pi}{4} - \frac{3\pi}{2} - 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 2\theta = -\frac{3\pi}{4} - 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \theta = -\frac{3\pi}{8} - k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Como $\theta \in]0, \pi[$, determinamos o valor de θ , atribuindo valores a k :

- Se $k = 0$, então $\theta = -\frac{3\pi}{8}$ ($\theta \notin]0, \pi[$)
- Se $k = -1$, então $\theta = -\frac{3\pi}{8} - (-\pi) = -\frac{3\pi}{8} + \frac{8\pi}{8} = \frac{5\pi}{8}$ ($\theta \in]0, \pi[$)
- Se $k = -2$, então $\theta = -\frac{3\pi}{8} - (-2\pi) = -\frac{3\pi}{8} + \frac{16\pi}{8} = \frac{13\pi}{8}$ ($\theta \notin]0, \pi[$)

Assim, se $z = w$, $\rho > 0$ e $\theta \in]0, \pi[$, temos que $\rho = 1$ e $\theta = \frac{5\pi}{8}$



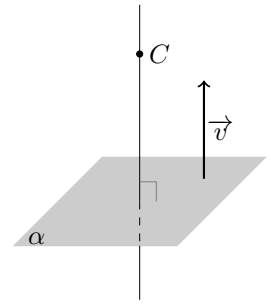
3.

- 3.1. Como um vetor normal de um plano define uma direção perpendicular ao plano, um destes vetores é também um vetor diretor de qualquer reta perpendicular ao plano.

Assim, como $\vec{v} = (3,2,4)$ é um vetor normal do plano α , também é um vetor diretor da reta perpendicular ao plano α e que contém o ponto $C(2,1,4)$

Assim, uma equação vetorial da reta, é:

$$(x,y,z) = (2,1,4) + \lambda(3,2,4), \lambda \in \mathbb{R}$$



- 3.2. Como a reta OD contém a origem e o ponto D , um vetor diretor da reta OD , é:

$$\vec{OD} = D - O = (4,2,2) - (0,0,0) = (4,2,2)$$

E assim, como a reta contém o ponto $O(0,0,0)$, umas equações cartesianas desta reta, são:

$$\frac{x}{4} = \frac{y}{2} = \frac{z}{2}$$

Desta forma, as coordenadas do ponto de intersecção da reta OD com o plano α , verificam simultaneamente a equação do plano e as equações da reta, ou seja, podem ser calculadas resolvendo o sistema seguinte:

$$\begin{aligned} \begin{cases} 3x + 2y + 4z - 12 = 0 \\ \frac{x}{4} = \frac{y}{2} \\ \frac{y}{2} = \frac{z}{2} \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 2y + 4z - 12 = 0 \\ x = 2y \\ y = z \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 3(2y) + 2y + 4(y) - 12 = 0 \\ x = 2y \\ y = z \end{cases} &\Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 6y + 2y + 4y = 12 \\ x = 2y \\ y = z \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 12y = 12 \\ x = 2y \\ y = z \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ x = 2 \\ z = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Logo o plano α e a reta OD intersectam-se no ponto de coordenadas $(2,1,1)$



- 3.3. Como o ponto A pertence ao semieixo positivo Ox , tem ordenada e cota nulas, ou seja as suas coordenadas são: $A(x_A, 0, 0)$, $x_A \in \mathbb{R}^+$
 Analogamente, como o ponto B pertence ao semieixo positivo Oy , que tem abcissa e cota nulas e as coordenadas são $B(0, y_B, 0)$, $y_B \in \mathbb{R}^+$
 Da mesma forma, como o ponto P pertence ao eixo Oz , e tem abcissa e ordenadas nulas e ainda cota não nula, as coordenadas são $P(0, 0, z_P)$, $z_P \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Como um ângulo é agudo se o produto escalar dos vetores que formam esse ângulo for positivo, então o ângulo APB é agudo se

$$\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} > 0$$

Determinando as coordenadas dos vetores \overrightarrow{PA} e \overrightarrow{PB} , temos:

- $\overrightarrow{PA} = A - P = (x_A, 0, 0) - (0, 0, z_P) = (x_A, 0, -z_P)$
- $\overrightarrow{PB} = B - P = (0, y_B, 0) - (0, 0, z_P) = (0, y_B, -z_P)$

Logo, o produto escalar dos dois vetores, expressos nas suas coordenadas, é:

$$\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = (x_A, 0, -z_P) \cdot (0, y_B, -z_P) = x_A \times 0 + 0 \times y_B + (-z_P) \times (-z_P) = 0 + 0 + z_P^2 = z_P^2$$

Como z_P é um número real, então $z_P^2 > 0$

Como $z_P^2 = \overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}$, então $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} > 0$, logo o ângulo APB é agudo.

4.

- 4.1. Como o domínio da função é $\left] -\frac{\pi}{2}, +\infty \right[$, só poderá existir uma assíntota oblíqua quando $x \rightarrow +\infty$. Assim, vamos averiguar a existência de uma assíntota de equação $y = mx + b$:

$$\begin{aligned} m &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - \ln x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{x} - \frac{\ln x}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{\ln x}{x} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - \underbrace{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x}}_{\text{Lim. Notável}} = 1 - 0 = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 1 \times x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \ln x - x) = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (-\ln x) = -\lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln x) = -(+\infty) = -\infty \end{aligned}$$

Assim, como $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - mx)$ não é um valor finito, não existe qualquer assíntota oblíqua do gráfico de f .



4.2. Começamos por determinar a expressão da derivada da função f , para $x \in]-\frac{\pi}{2}, 0[$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{2 + \operatorname{sen} x}{\cos x} \right)' = \frac{(2 + \operatorname{sen} x)' \cos x - (2 + \operatorname{sen} x)(\cos x)'}{(\cos x)^2} = \\ &= \frac{(0 + \cos x) \cos x - (2 + \operatorname{sen} x)(-\operatorname{sen} x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + 2 \operatorname{sen} x + \operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} = \\ &= \frac{\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x + 2 \operatorname{sen} x}{\cos^2 x} = \frac{1 + 2 \operatorname{sen} x}{\cos^2 x} \end{aligned}$$

Calculando os zeros da derivada, para $x \in]-\frac{\pi}{2}, 0[$, vem:

$$\frac{1 + 2 \operatorname{sen} x}{\cos^2 x} = 0 \Leftrightarrow 1 + 2 \operatorname{sen} x = 0 \wedge \underbrace{\cos^2 x \neq 0}_{(1)} \Leftrightarrow 2 \operatorname{sen} x = -1 \Leftrightarrow \operatorname{sen} x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{sen} x = \operatorname{sen} \left(-\frac{\pi}{6} \right) \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee x = \pi - \left(-\frac{\pi}{6} \right) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Para $k = 0$, vem $x = -\frac{\pi}{6} \vee x = \pi + \frac{\pi}{6}$, e como $x \in]-\frac{\pi}{2}, 0[$ podemos verificar que a única solução da equação é $x = -\frac{\pi}{6}$

(1) Como $\cos x > 0, \forall x \in]-\frac{\pi}{2}, 0[$, então $\cos^2 x \neq 0, \forall x \in]-\frac{\pi}{2}, 0[$

Estudando a variação do sinal da derivada e relacionando com a monotonia da função, vem:

x	$-\frac{\pi}{2}$		$-\frac{\pi}{6}$		0
$1 + 2 \operatorname{sen} x$		-	0	+	
$\cos^2 x$		+	+	+	
$f'(x)$	n.d.	.-	0	+	n.d.
$f(x)$	n.d.	\searrow	min	\nearrow	n.d.

Assim, podemos concluir que a função f :

- é decrescente no intervalo $]-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{6}[$;
- é crescente no intervalo $]-\frac{\pi}{6}, 0[$;
- tem um mínimo relativo para $x = -\frac{\pi}{6}$



- 4.3. Para calcular o declive da reta tangente, no ponto de abcissa $\frac{1}{2}$ começamos por determinar a expressão da derivada da função, para $x > 0$:

$$f'(x) = (x - \ln x)' = (x)' - (\ln x)' = 1 - \frac{(x)'}{x} = 1 - \frac{1}{x}$$

Assim, temos que o declive da reta tangente no ponto de abcissa $\frac{1}{2}$ é:

$$m = f' \left(\frac{1}{2} \right) = 1 - \frac{1}{\frac{1}{2}} = 1 - 2 = -1$$

Logo a equação da reta tangente é da forma $y = -x + b$

Como $f \left(\frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2} - \ln \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - (\ln 1 - \ln 2) = \frac{1}{2} - (0 - \ln 2) = \frac{1}{2} + \ln 2$, sabemos que o ponto

$P \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \ln 2 \right)$ pertence ao gráfico da função e também à reta tangente.

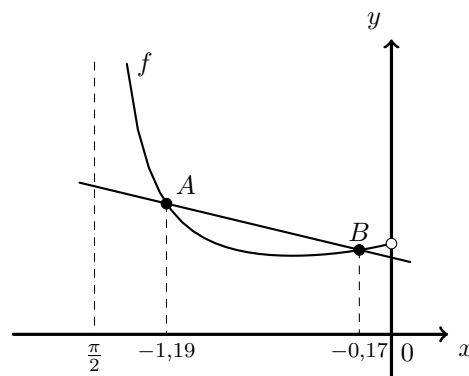
Assim, substituindo as coordenadas do ponto de tangência na equação da reta, podemos calcular o valor de b :

$$\frac{1}{2} + \ln 2 = -\frac{1}{2} + b \Leftrightarrow \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \ln 2 = b \Leftrightarrow 1 + \ln 2 = b$$

Pelo que a equação da reta tangente é: $y = -x + 1 + \ln 2$

Como as abcissas dos pontos A e B pertencem ao intervalo $\left] -\frac{\pi}{2}, 0 \right[$, representando na calculadora gráfica o gráfico da função f e a reta tangente ao gráfico em $x = \frac{1}{2}$, numa janela coerente com o intervalo $\left] -\frac{\pi}{2}, 0 \right[$, (reproduzido na figura ao lado) e determinando a interseção das duas, obtemos os valores aproximados (às centésimas) das coordenadas dos pontos A e B :

$$x_A \approx -1,19 \text{ e } x_B \approx -0,17$$



5.

- 5.1. Temos que $x = 0,003$ e como o empréstimo será pago em prestações mensais de 24 euros então $p = 24$

Substituindo estes valores na expressão conhecida, e resolvendo a equação, vem:

$$24 = \frac{600(0,003)}{1 - e^{-n \times 0,003}} \Leftrightarrow \underset{(1)}{24 - 24e^{-0,003n} = 1,8} \Leftrightarrow -24e^{-0,003n} = 1,8 - 24 \Leftrightarrow e^{-0,003n} = \frac{-22,2}{-24} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^{-0,003n} = 0,925 \Leftrightarrow -0,003n = \ln 0,925 \Leftrightarrow n = \frac{\ln 0,925}{-0,003}$$

(1) Como $n \in \mathbb{N}, n \neq 0$, então $1 - e^{-0,003n} \neq 0$

Como $\frac{\ln 0,925}{-0,003} \approx 26$, concluímos que o José irá demorar 26 meses a pagar o empréstimo.



5.2. Calculando o valor do limite, em função de n , vem que:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{600x}{1 - e^{-nx}} &= \frac{600(0)}{1 - e^{-n(0)}} = \frac{0}{1 - e^0} = \frac{0}{1 - 1} = \frac{0}{0} \text{ (Indeterminação)} \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{600x}{1 - e^{-nx}} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{-n}{-n} \times \frac{600x}{1 - e^{-nx}} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{600}{-n} \times \frac{-nx}{1 - e^{-nx}} \right) = \\ &\text{(fazendo } y = -nx, \text{ temos que se } x \rightarrow 0, \text{ então } y \rightarrow 0) \\ &= \lim_{y \rightarrow 0} \left(\frac{600}{-n} \times \frac{y}{1 - e^y} \right) = \lim_{y \rightarrow 0} \left(\frac{600}{-n} \times \frac{y}{-(e^y - 1)} \right) = \lim_{y \rightarrow 0} \left(\frac{600}{n} \times \frac{y}{e^y - 1} \right) = \\ &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{600}{n} \times = \frac{600}{n} \times \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{e^y - 1}{y}} = \frac{600}{n} \times \underbrace{\frac{\lim_{y \rightarrow 0} 1}{\lim_{y \rightarrow 0} \frac{e^y - 1}{y}}}_{\text{Lim. Notável}} = \frac{600}{n} \times \frac{1}{1} = \frac{600}{n} \end{aligned}$$

Desta forma, se $x \rightarrow 0$, o que corresponde a uma taxa de juro arbitrariamente próxima de zero, então a prestação mensal será arbitrariamente próxima de $\frac{600}{n}$ o que corresponde a pagar o montante do empréstimo (600 euros) em n parcelas iguais, durante n meses.

6. Começamos por notar que: $g(x) = x + 1 \Leftrightarrow g(x) - x - 1 = 0$

Assim, considerando $f(x) = g(x) - x - 1$, temos que:

- provar que a equação $g(x) = x + 1$ é possível no intervalo $]a, g(a)[$, é equivalente a,
- provar que a equação $f(x) = 0$ é possível no intervalo $]a, g(a)[$

Como, a função g é contínua em \mathbb{R} , então a função f também é contínua \mathbb{R} , porque resulta de operações sucessivas de funções contínuas, e, em particular é contínua no intervalo $]a, g(a)[$.

Cálculos auxiliares:

- $f(a) = g(a) - a - 1 = g(a) - (a + 1)$
Como $g(a) > a + 1$, então:

$$g(a) > a + 1 \Leftrightarrow g(a) - (a + 1) > a + 1 - (a + 1) \Leftrightarrow g(a) - (a + 1) > 0 \Leftrightarrow f(a) > 0 \Leftrightarrow 0 < f(a)$$

- Como $(g \circ g)(x) = x, \forall x \in \mathbb{R}$, então, $(g \circ g)(a) = a$, e assim:

$$f(g(a)) = g(g(a)) - g(a) - 1 = (g \circ g)(a) - g(a) - 1 = a - g(a) - 1 = -g(a) + a - 1$$

Como $g(a) > a + 1$, então:

$$\begin{aligned} g(a) > a + 1 &\Leftrightarrow -g(a) < -(a + 1) \Leftrightarrow -g(a) + (a + 1) < 0 \Leftrightarrow -g(a) + a + 1 - 2 < -2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow -g(a) + a - 1 < -2 \Leftrightarrow f(g(a)) < -2 \Rightarrow f(g(a)) < 0 \end{aligned}$$

Como $-1 < 0 < f(a)$, ou seja, $f(g(a)) < 0 < f(a)$, então, podemos concluir, pelo Teorema de Bolzano, que existe $c \in]a, g(a)[$ tal que $f(c) = 0$, ou seja, que a equação $f(x) = 0$ tem, pelo menos, uma solução em $]a, g(a)[$, ou, de forma equivalente, que a equação $g(x) = x + 1$ é possível no intervalo $]a, g(a)[$

