Exercícios de Exames Nacionais (Prova 435)

Funções – Demonstrações

Considere uma função f de domínio $\mathbb{R}^+$. Admita que f é positiva e que o eixo Ox é assimptota do gráfico de f. Mostre que o gráfico da função $\frac{1}{f}$ não tem assimptota horizontal.

2001 –1ª Fase, 1ª Chamada

De uma função g, de domínio $\mathbb{R}^+$, sabe-se que a bissectriz dos quadrantes ímpares é uma assimptota do seu gráfico.

Seja h a função, de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por $h(x) = \frac{g(x)}{x^2}$

Prove que o eixo Ox é uma assimptota do gráfico de h.

2001 –1ª Fase, 2ª Chamada

De uma função g, contínua em $\mathbb{R}$, sabe-se que:

- 1 é zero de g;
- $g(3) > 0$.

Prove que a equação $g(x) = \frac{g(3)}{2}$ tem, pelo menos, uma solução no intervalo $]1, 3[$

2001 –2ª Fase

Seja f uma função contínua, de domínio $[0,5]$ e contradomínio $[3,4]$.

Seja g a função, de domínio $[0,5]$, definida por $g(x) = f(x) - x$.

Prove que a função g tem, pelo menos, um zero.

2002 – 1ª Fase, 2ª Chamada

Seja f uma função de domínio $\mathbb{R}$, com derivada finita em todos os pontos do domínio, e **crescente**.

Sejam a e b dois quaisquer números reais. Considere as rectas r e s, tangentes ao gráfico de f nos pontos de abcissas a e b, respectivamente.

Prove que as rectas r e s **não** podem ser perpendiculares.

2002 – 2ª Fase

Prove que, para qualquer função quadrática g, existe um e um só ponto do gráfico onde a recta tangente é paralela à bissectriz dos quadrantes ímpares.

2003 –1ª Fase, 1ª Chamada

Considere, para cada $\alpha \in]0,1[$, a função, de **domínio** $\mathbb{R}^+$, definida por $f(x) = x^\alpha$

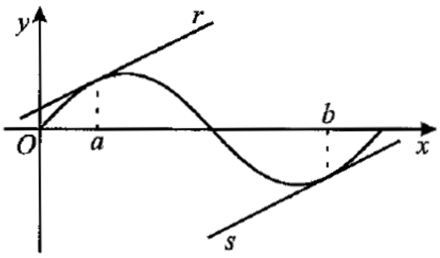
Prove que, qualquer que seja o valor de $\alpha \in]0,1[$, o gráfico da função f tem a concavidade voltada para baixo.

2004 – 2ª Fase

Seja f a função, **de domínio** $[0, 2\pi]$, definida por $f(x) = \operatorname{sen} x$

Na figura junta estão representados:

- o gráfico da função f;
- duas rectas, r e s, tangentes ao gráfico de f, nos pontos de abcissas a e b, respectivamente.



Prove que, se $a + b = 2\pi$, então as rectas r e s são paralelas.

2005 – 2ª Fase

De uma certa função f, de domínio $\mathbb{R}$, sabe-se que:

- f é contínua;
- a recta de equação $y = x$ é assimptota do gráfico de f, quer quando $x \to +\infty$, quer quando $x \to -\infty$.

Mostre que o gráfico da função g, definida, em $\mathbb{R}$, por $g(x) = x\,f(x)$, não tem qualquer assimptota.

2006 – 1ª Fase

Seja $f : [0,2] \to \mathbb{R}$ uma função contínua tal que $f(0) = f(2) = 0$ e $f(1) > 0$

Prove que existe pelo menos um número real c no intervalo $]0,1[$ tal que $f(c) = f(c+1)$

Sugestão: considere a função $g : [0,1] \to \mathbb{R}$, definida por $g(x) = f(x) - f(x+1)$

2006 – 2ª Fase
