Exercícios de Exames Nacionais (Prova 435)

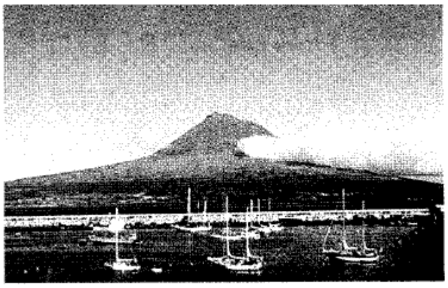
Função Exponencial

A pressão atmosférica de cada local da Terra depende da altitude a que este se encontra. Admita que a pressão atmosférica P (medida em quilopascal) é dada, em função da altitude h (em **quilómetros**), por

$$P(h) = 101\ e^{-0{,}12\,h}$$

- A montanha mais alta de Portugal é o Pico, na ilha do Pico - Açores. A altitude do cume do Pico é 2350 metros.

  Qual é o valor da pressão atmosférica, nesse local? Apresente o resultado em quilopascal, arredondado às unidades.



- Determine x tal que, para qualquer h, $P(h+x) = \frac{1}{2}\,P(h)$. Apresente o resultado arredondado às décimas.

  Interprete o valor obtido, no contexto do problema.

2000 –2ª Fase

Um petroleiro, que navegava no oceano Atlântico, encalhou numa rocha e sofreu um rombo no casco. Em consequência disso, começou a derramar crude. Admita que, às t horas do dia a seguir ao do acidente, a área, em km^2, de crude espalhado sobre o oceano é dada por

$$A(t) = 16\,e^{0{,}1\,t} \quad , \quad t \in [0, 24]$$

- Verifique que, para qualquer valor de t, $\dfrac{A(t+1)}{A(t)}$ é constante.

  Determine um valor aproximado dessa constante (arredondado às décimas) e interprete esse valor, no contexto da situação descrita.

- Admita que a mancha de crude é circular, com centro no local onde o petroleiro encalhou. Sabendo que esse local se encontra a sete quilómetros da costa, determine a que horas, do dia a seguir ao do acidente, a mancha de crude atingirá a costa.

  Apresente o resultado em horas e minutos (minutos arredondados às unidades).

Nota: sempre que, nos cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, três casas decimais.

2001 – 2ª Fase

Doses terapêuticas iguais de um certo antibiótico são administradas, pela primeira vez, a duas pessoas: a Ana e o Carlos.
Admita que, durante as doze primeiras horas após a tomada simultânea do medicamento pela Ana e pelo Carlos, as concentrações de antibiótico, medidas em miligramas por litro de sangue, são dadas, respectivamente, por

$$A(t)=4t^3\, e^{-t} \quad \text{e} \quad C(t)=2t^3\, e^{-0{,}7\,t}$$

A variável t designa o tempo, medido em **horas**, que decorre desde o instante em que o medicamento é tomado $(t \in [0\,,12])$.

Recorrendo a métodos analíticos e utilizando a calculadora para efectuar cálculos numéricos, resolva as duas alíneas seguintes.

- Determine o valor da concentração deste antibiótico no sangue da Ana, quinze **minutos** depois de ela o ter tomado. Apresente o resultado, em miligramas por litro de sangue, arredondado às centésimas.
  Nota: sempre que, nos cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, três casas decimais.
- No instante em que as duas pessoas tomam o medicamento, as concentrações são iguais (por serem nulas). Determine quanto tempo depois as concentrações voltam a ser iguais. Apresente o resultado em horas e minutos (minutos arredondados às unidades).
  Nota: sempre que, nos cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, três casas decimais.

2002 – 1ª Fase, 1ª Chamada

Admita que, ao longo dos séculos XIX e XX e dos primeiros anos do século XXI, a população de Portugal Continental, em milhões de habitantes, é dada, aproximadamente, por

$$p(t) = 3{,}5 + \frac{6{,}8}{1+12{,}8\, e^{-0{,}036\,t}}$$

(considere que t é medido em anos e que o instante $t=0$ corresponde ao **início** do ano 1864).

- De acordo com este modelo, qual será a população de Portugal Continental no **final** do presente ano (2003)?
  Apresente o resultado em milhões de habitantes, arredondado às décimas.
  Nota: sempre que, nos cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, três casas decimais.
- **Sem recorrer à calculadora** (a não ser para efectuar eventuais cálculos numéricos), resolva o seguinte problema:
  De acordo com este modelo, em que ano a população de Portugal Continental foi de $3{,}7$ milhões de habitantes?
  Nota: sempre que, nos cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, três casas decimais.

2003 –2ª Fase

Admita que o número de elementos de uma população de aves, t anos após o início de 1970, é dado aproximadamente por

$$P(t) = 5{,}2 \times 10^7 \times e^{(N-M)\,t} \;, \qquad t \geq 0,$$

em que N e M são duas constantes, denominadas, respectivamente, *taxa de natalidade* e *taxa de mortalidade* da população.

Sem recorrer à calculadora, a não ser para efectuar eventuais cálculos numéricos, resolva as duas alíneas seguintes:

- Sabendo que $N < M$, calcule $\lim_{t\to+\infty} P(t)$ e interprete o resultado obtido, no contexto do problema.
- No início de 2000, a população era metade da que existia no início de 1970.
  Sabendo que a *taxa de natalidade* é $7{,}56$, determine a *taxa de mortalidade*.
  Apresente o resultado arredondado às centésimas.

  Nota: sempre que, nos cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, três casas decimais.

2005 – 1ª Fase