Exercícios de Exames Nacionais (Prova 435)

Função Logarítmica

Considere a função f, de domínio $\mathbb{R}\backslash\{1\}$, definida por $f(x) = \frac{e^x}{x-1}$

Recorrendo exclusivamente a processos analíticos (ou seja, **sem** utilização da calculadora), resolva as alíneas seguintes:

Resolva a equação $\ln\left[\, f(x)\,\right] = x$ ($\ln$ designa *logaritmo* de base e)

2000 – 1ª Fase, 2ª Chamada

Considere que a altura A (em metros) de uma criança do sexo masculino pode ser expressa, aproximadamente, em função do seu peso p (em quilogramas), por

$$A(p) = -0{,}52 + 0{,}55 \ln(p) \qquad (\ln \text{ designa logaritmo de base } e)$$

Recorrendo a métodos analíticos e utilizando a calculadora para efectuar cálculos numéricos, resolva as duas alíneas seguintes.

- O Ricardo tem $1{,}4\ \mathrm{m}$ de altura. Admitindo que a altura e o peso do Ricardo estão de acordo com a igualdade referida, qual será o seu peso?
  Apresente o resultado em quilogramas, arredondado às unidades.
  Nota: sempre que, nos cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, duas casas decimais.
- Verifique que, para qualquer valor de p, a diferença $A(2p) - A(p)$ é constante.
  Determine um valor aproximado dessa constante (com duas casas decimais) e interprete esse valor, no contexto da situação descrita.

2001 – 1ª Fase, 2ª Chamada

O **nível** N de um som, medido em decibéis, é função da sua **intensidade** I, medida em watt por metro quadrado, de acordo com a igualdade

$$N = 10 \log_{10}\left(10^{12} I\right), \quad \text{para} \quad I > 0$$

Utilizando métodos exclusivamente analíticos, resolva as duas alíneas seguintes.

- Verifique que $N = 120 + 10 \log_{10} I$
- Admita que o nível de ruído de um avião a jacto, ouvido por uma pessoa que se encontra na varanda de um aeroporto, é de 140 decibéis.
  Determine a intensidade desse som, em watt por metro quadrado.

2002 – 1ª Fase, 2ª Chamada

Num laboratório, foi colocado um purificador de ar.
Num determinado dia, o purificador foi ligado às zero horas e desligado algum tempo depois.
Ao longo desse dia, o nível de poluição do ar **diminuiu**, enquanto o purificador esteve ligado.
Uma vez o purificador desligado, o nível de poluição do ar **começou de imediato a aumentar**.
Admita que o nível de poluição do ar no laboratório, medido em mg/l de ar, às t horas desse dia, pode ser dado por

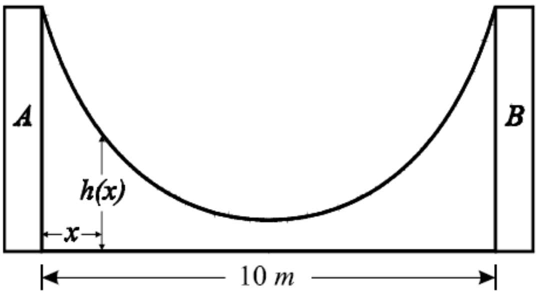
$$P(t) = 1 - \frac{\ln(t+1)}{t+1} \,, \quad t \in [\,0, 24] \qquad (\ln \text{ designa logaritmo de base } e)$$

sempre que, nos cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, três casas decimais.

Qual é o nível de poluição à uma hora e trinta minutos **da tarde**?
Apresente o resultado na unidade considerada, arredondado às décimas.

2003 – 1ª Fase, 1ª Chamada

Uma rampa de desportos radicais foi construída entre duas paredes, A e B, distanciadas de 10 metros, como se mostra na figura.



Considere a função h definida por

$$h(x) = 15 - 4\ln(-x^2 + 10x + 11) \qquad (\ln \text{ designa logaritmo de base } e)$$

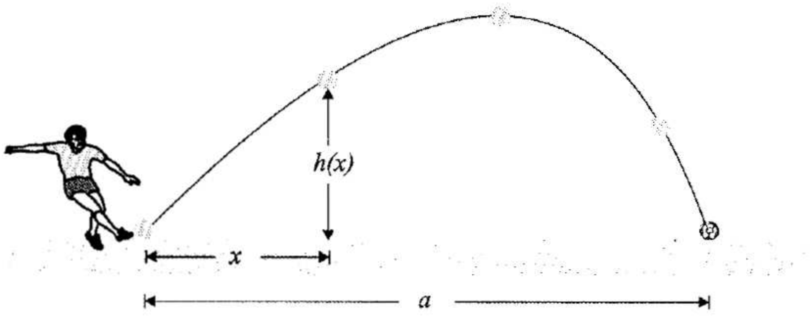
Admita que $h(x)$ é a altura, em metros, do ponto da rampa situado x metros à direita da parede A.

- Determine a altura da parede A. Apresente o resultado em metros, arredondado às décimas.
  Nota: se, nos cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, três casas decimais.

- Mostre, analiticamente, que $h(5-x) = h(5+x)$.
  Interprete esta igualdade no contexto da situação descrita.

2003 – 1ª Fase, 2ª Chamada

Na figura está representada a trajectória de uma bola de futebol, depois de ter sido pontapeada por um jogador da selecção portuguesa, durante um treino de preparação para o EURO-2004.



Designou-se por a a distância, em metros, entre o ponto onde a bola foi pontapeada e o ponto onde ela caiu.

Considere a função h definida em $[0, a]$ por

$$h(x) = 2\,x + 10\ln(1 - 0{,}1\,x) \qquad \left(\ln \text{ designa logaritmo de base } e\right)$$

Admita que $h(x)$ é a distância, em metros, da bola ao solo, no momento em que a sua projecção no solo se encontra a x metros do local onde foi pontapeada.

- **Recorrendo à calculadora**, determine o valor de a, arredondado às centésimas. **Explique como procedeu, apresentando todos os elementos recolhidos na utilização da calculadora.**
- **Sem utilizar a calculadora**, mostre que a taxa de variação média da função h, no intervalo $[1, 3]$, é

$$\ln\left[e^2\left(\frac{7}{9}\right)^5\right]$$

2005 – 2ª Fase

Considere a função f, de domínio $\mathbb{R}\backslash\{0\}$, definida por $f(x) = 1 - \ln(x^2)$

Recorrendo a métodos exclusivamente analíticos:

Determine os pontos de intersecção do gráfico de f com o eixo Ox.

2007 – 2ª Fase

Sejam as funções f e h, de domínios $]1, +\infty[$ e $]-\infty, 2[$, respectivamente, definidas por $f(x) = \log_2(x - 1)$ e por $h(x) = \log_2(2 - x)$.

Determine, **recorrendo a métodos exclusivamente analíticos**, o conjunto solução da condição $f(x) \geq 1 + h(x)$.

Apresente o resultado sob a forma de intervalo real.

2009 – 1ª Fase

Numa certa zona de cultivo, foi detectada uma doença que atinge as culturas. A área afectada pela doença começou por alastrar durante algum tempo, tendo depois começado a diminuir.

Admita que a área, em hectares, afectada pela doença, é dada, em função de t, por

$$A(t) = 2 - t + 5\ \ln(t+1)$$

sendo $t\,(0 \leq t < 16)$ o tempo, em semanas, decorrido após ter sido detectada essa doença.

Resolva, **recorrendo a métodos exclusivamente analíticos**, os dois itens seguintes.

Quando a doença foi detectada, já uma parte da área de cultivo estava afectada. Passada uma semana, a área de cultivo afectada pela doença aumentou.

De quanto foi esse aumento?

Apresente o resultado em hectares, arredondado às centésimas.

2009 – 2ª Fase

Considere a função f, de domínio $]0, +\infty[$, definida por $f(x) = \dfrac{1-\ln x}{x}$

$(\ln$ designa logaritmo de base $e)$.

Sem recorrer à calculadora, resolva

Mostre que $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = \ln\left(4\,e^2\right)$

2005/2006 – 2º Teste Intermédio

A acidez de uma solução é medida pelo valor do seu pH, que é dado por

$$pH = -\log_{10}(x)$$

onde x designa a concentração de iões H_3O^+, medida em mol/dm^3.

Sem recorrer à calculadora, a não ser para efectuar eventuais cálculos numéricos, resolva as duas alíneas seguintes:

- Admita que o pH do sangue arterial humano é $7{,}4$.
  Qual é a concentração (em mol/dm^3) de iões H_3O^+, no sangue arterial humano?
  Escreva o resultado em notação científica, isto é, na forma $a \times 10^b$, com b inteiro e a entre 1 e 10. Apresente o valor de a arredondado às unidades.

- A concentração de iões H_3O^+ no café é tripla da concentração de iões H_3O^+ no leite.
  Qual é a diferença entre o pH do leite e o pH do café? Apresente o resultado arredondado às décimas.
  Sugestão: comece por designar por l a concentração de iões H_3O^+ no *leite* e por exprimir, em função de l, a concentração de iões H_3O^+ no café.

2006/2007 – 2º Teste Intermédio

Determine, sem recorrer à calculadora, o conjunto dos números reais que são soluções da inequação

$$\log_2 (x-1) + \log_2 (13-x) \leq 5$$

Apresente a sua resposta na forma de união de intervalos de números reais.

2008/2009 – 2º Teste Intermédio