

# Ângulos e arcos na circunferência (9.º ano)

Propostas de resolução

Exercícios de Provas Nacionais e Testes Intermédios



1. Temos que:

- como as cordas  $[AB]$  e  $[CD]$  são paralelas e iguais, temos que  $\widehat{BA} = \widehat{DC} = 120^\circ$ ;
- como  $[AC]$  é um diâmetro da circunferência, porque  $[ABC]$  é um triângulo retângulo, então  $\widehat{CA} = 180^\circ$ ;
- e assim, temos que

$$\widehat{CB} + \widehat{BA} = \widehat{CA} \Leftrightarrow \widehat{CB} + 120 = 180 \Leftrightarrow \widehat{CB} = 180 - 120 \Leftrightarrow \widehat{CB} = 60^\circ$$

Como o arco  $BC$  é o arco relativo ao ângulo inscrito  $CAB$ , a amplitude do ângulo é metade da amplitude do arco, ou seja:

$$C\hat{A}B = \frac{\widehat{CB}}{2} = \frac{60}{2} = 30^\circ$$

Prova Final 3.º Ciclo – 2024, 2.ª fase

2. Como a soma dos ângulos internos do triângulo  $[ODE]$  é  $180^\circ$ , temos que:

$$D\hat{O}E + O\hat{D}E + O\hat{E}E = 180 \Leftrightarrow D\hat{O}E + 90 + 30 = 180 \Leftrightarrow D\hat{O}E = 180 - 90 - 30 \Leftrightarrow D\hat{O}E = 60^\circ$$

Como os ângulos  $COD$  e  $DOE$  são suplementares, então:

$$C\hat{O}D + D\hat{O}E = 180 \Leftrightarrow C\hat{O}D + 60 = 180 \Leftrightarrow C\hat{O}D = 180 - 60 \Leftrightarrow C\hat{O}D = 120^\circ$$

Como o arco  $DC$  é o arco relativo ao ângulo ao centro  $COD$ , tem a mesma amplitude e como o arco  $BD$ , é o arco relativo ao ângulo inscrito  $BAD$ , a amplitude do arco é o dobro da amplitude do ângulo, e assim, temos que:

$$\widehat{BC} = \widehat{BD} - \widehat{CD} = 2 \times B\hat{A}D - C\hat{O}D = 2 \times 80 - 120 = 160 - 120 = 40^\circ$$

Prova Final 3.º Ciclo – 2024, 1.ª fase

3. Como o triângulo  $[OAC]$  é isósceles porque  $\overline{OA} = \overline{OC}$ , então os ângulos opostos a lados iguais têm a mesma amplitude, ou seja,  $\widehat{OCA} = \widehat{OAC} = 28^\circ$ , e desta forma, temos que:

$$\widehat{AOC} + \widehat{OCA} + \widehat{OAC} = 180 \Leftrightarrow \widehat{AOC} + 28 + 28 = 180 \Leftrightarrow \widehat{AOC} = 180 - 56 \Leftrightarrow \widehat{AOC} = 124^\circ$$

Como o arco  $AC$  é o arco relativo ao ângulo ao centro  $AOC$ , tem a mesma amplitude e como o arco  $AC$  é o arco relativo ao ângulo inscrito  $CBA$ , a amplitude do ângulo é metade da amplitude do arco, ou seja:

$$\widehat{CBA} = \frac{\widehat{AC}}{2} = \frac{\widehat{AOC}}{2} = \frac{124}{2} = 62^\circ$$

Prova Final 3.º Ciclo - 2023, Época especial

4. Como o arco  $DE$  é o arco relativo ao ângulo inscrito  $ECD$ , a amplitude do arco é o dobro da amplitude do ângulo, ou seja:

$$\widehat{DE} = 2 \times \widehat{ECD} = 2 \times 70 = 140^\circ$$

E assim:

$$\widehat{ECD} = 360 - \widehat{DE} = 360 - 140 = 220^\circ$$

Como  $\overline{CD} = \overline{CE}$ , então  $\widehat{CD} = \widehat{CE}$ , pelo que:

$$\widehat{CD} = \frac{\widehat{ECD}}{2} = \frac{220}{2} = 110^\circ$$

Como  $\widehat{AOB}$  é um ângulo ao centro relativo ao arco  $AB$ , e como  $\widehat{BC} = \widehat{CA}$ , então:

$$\widehat{BC} = \frac{\widehat{AOB}}{2} = \frac{50}{2} = 25^\circ$$

E assim, temos que:

$$\widehat{BD} = \widehat{CD} - \widehat{BC} = 110 - 25 = 85^\circ$$

Prova Final 3.º Ciclo - 2023, 2.ª fase

5. Como  $D$  pertence à semirreta  $\hat{A}C$ , então  $\widehat{DCA} = 180^\circ$ , pelo que:

$$\widehat{BCA} = \widehat{DCA} - \widehat{BCD} = 180 - 100 = 80^\circ$$

Como o ângulo  $BAC$  é o ângulo inscrito relativo ao arco  $AB$ , a amplitude do arco é o dobro da amplitude do ângulo, ou seja:

$$\widehat{BA} = 2 \times \widehat{BCA} = 2 \times 80 = 160^\circ$$

E assim, temos que:

$$\widehat{BCA} = 360 - \widehat{BA} = 360 - 160 = 200^\circ$$

Prova Final 3.º Ciclo - 2023, 1.ª fase



6. Temos que:

- O ângulo  $ACB$  é o ângulo inscrito relativo ao arco  $AB$ , a amplitude do ângulo é metade da amplitude do arco, ou seja:

$$\widehat{ACB} = \frac{\widehat{AB}}{2} = \frac{60}{2} = 30^\circ$$

- Como  $\widehat{ECB} = \widehat{ACB}$  temos que  $\widehat{ECB} = 30^\circ$
- Como a soma dos ângulos internos de um triângulo é  $180^\circ$ , e  $\widehat{CED} = 90^\circ$  vem que:

$$\widehat{EBC} + \widehat{ECB} + \widehat{CEB} = 180 \Leftrightarrow \widehat{EBC} + 30 + 90 = 180 \Leftrightarrow \widehat{EBC} = 180 - 90 - 30 \Leftrightarrow \widehat{EBC} = 60^\circ$$

Como o ângulo  $\widehat{EBC} = \widehat{DBC}$  e o  $\widehat{DBC}$  é o ângulo inscrito relativo ao arco  $CD$ , a amplitude do arco é o dobro da amplitude do ângulo, ou seja:

$$\widehat{AD} = 2 \times \widehat{DBC} = 2 \times 60 = 120^\circ$$

Prova Final 3.º Ciclo – 2022, 2.ª fase

7. Temos que:

- Como  $[BD]$  é um diâmetro da circunferência, então  $\widehat{BD} = 180^\circ$
- $\widehat{BC} + \widehat{CD} = \widehat{BD} \Leftrightarrow \widehat{BC} + 110 = 180 \Leftrightarrow \widehat{BC} = 180 - 110 \Leftrightarrow \widehat{BC} = 70^\circ$

Desta forma, como o ângulo  $BDC$  é o ângulo inscrito relativo ao arco  $BC$ , a amplitude do ângulo é metade da amplitude do arco, ou seja:

$$\widehat{BDC} = \frac{\widehat{BC}}{2} = \frac{70}{2} = 35^\circ$$

Resposta: **Opção D**

Prova Final 3.º Ciclo – 2022, 1.ª fase

8. Temos que:

- Como os arcos  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$ ,  $DE$  e  $EA$  são iguais, cada um deles tem  $\frac{360}{5} = 72^\circ$  de amplitude;
- como o ângulo  $ECA$  é o ângulo inscrito relativo ao arco  $EA$ , a amplitude do ângulo é metade da amplitude do arco, ou seja,

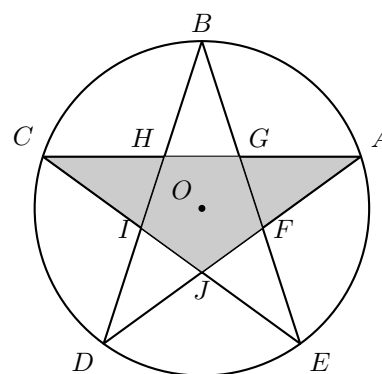
$$\widehat{ECA} = \frac{\widehat{EA}}{2} = \frac{72}{2} = 36^\circ$$

- e como o ângulo  $CAD$  é o ângulo inscrito relativo ao arco  $CD$ , a amplitude do ângulo é metade da amplitude do arco, ou seja,

$$\widehat{CAD} = \frac{\widehat{CD}}{2} = \frac{72}{2} = 36^\circ$$

Como a soma dos ângulos internos de um triângulo é  $180^\circ$ , vem que:

$$\widehat{AJC} + \widehat{ECA} + \widehat{CAD} = 180 \Leftrightarrow \widehat{AJC} + 36 + 36 = 180 \Leftrightarrow \widehat{AJC} = 180 - 36 - 36 \Leftrightarrow \widehat{AJC} = 108^\circ$$



Prova de Matemática, 9.º ano – 2021



9. Temos que:

- Como  $[CA]$  é um diâmetro da circunferência, então  $\widehat{CA} = 180^\circ$
- como o ângulo  $ABD$  é o ângulo ao centro relativo ao arco  $AD$ , temos que  $\widehat{AD} = 130^\circ$
- $\widehat{CD} + \widehat{DA} = \widehat{CA} \Leftrightarrow \widehat{CD} + 130 = 180 \Leftrightarrow \widehat{CD} = 180 - 130 \Leftrightarrow \widehat{CD} = 50^\circ$

Desta forma, como o ângulo  $DEC$  é o ângulo inscrito relativo ao arco  $CD$ , a amplitude do ângulo é metade da amplitude do arco, ou seja:

$$D\hat{E}C = \frac{\widehat{CD}}{2} = \frac{50}{2} = 25^\circ$$

Prova Final 3.º Ciclo – 2019, Época especial

10. Como o ângulo  $ACB$  é o ângulo inscrito relativo ao arco  $AB$ , a amplitude do arco é o dobro da amplitude do arco, ou seja:

$$\widehat{AB} = 2 \times \widehat{ACB} = 2 \times 30 = 60^\circ$$

Assim, considerando que o arco  $AB$  tem 5 centímetros de comprimento e estabelecendo a relação de proporcionalidade direta entre os comprimentos dos arcos e as respectivas amplitudes, calculamos o perímetro do círculo ( $P_o$ ), em centímetros, correspondente a um arco com  $360^\circ$  de amplitude:

$$\frac{P_o}{360} = \frac{5}{\widehat{AB}} \Leftrightarrow \frac{P_o}{360} = \frac{5}{60} \Leftrightarrow P_o = \frac{5 \times 360}{60} \Leftrightarrow P_o = 5 \times \frac{36}{6} \Leftrightarrow P_o = 5 \times 6 \Leftrightarrow P_o = 30 \text{ cm}$$

Prova Final 3.º Ciclo – 2019, 2.ª fase

11. Como  $[ABCD]$  é um papagaio e  $\overline{AB} = \overline{BC}$ , então  $\overline{CD} = \overline{AD}$  e também  $\widehat{CD} = \widehat{AD}$ . Assim, calculando a amplitude do arco  $CDA$ , temos:

$$\widehat{CDA} = \widehat{CD} + \widehat{AD} = 110 + 100 = 220^\circ$$

E desta forma a amplitude do arco  $AC$  é:

$$\widehat{AC} = 360 - \widehat{CDA} = 360 - 220 = 140^\circ$$

Desta forma, como o ângulo  $ADC$  é o ângulo inscrito relativo ao arco  $AC$ , a amplitude do ângulo é metade da amplitude do arco, ou seja:

$$A\hat{D}C = \frac{\widehat{AC}}{2} = \frac{140}{2} = 70^\circ$$

Prova Final 3.º Ciclo – 2019, 1.ª fase



12. Como o ângulo  $CBA$  é o ângulo inscrito relativo ao arco  $CA$ , a amplitude do arco é o dobro da amplitude do ângulo, ou seja:

$$\widehat{CA} = 2 \times \widehat{CBA} = 2 \times 85 = 170^\circ$$

Temos ainda que:

$$\widehat{BC} + \widehat{CA} + \widehat{AB} = 360 \Leftrightarrow \widehat{BC} + 170 + 110 = 360 \Leftrightarrow \widehat{BC} = 360 - 170 - 110 \Leftrightarrow \widehat{BC} = 80^\circ$$

Desta forma, como o ângulo  $BAC$  é o ângulo inscrito relativo ao arco  $BC$ , a amplitude do ângulo é metade da amplitude do arco, ou seja:

$$\widehat{BAC} = \frac{\widehat{BC}}{2} = \frac{80}{2} = 40^\circ$$

Prova Final 3.º Ciclo – 2018, Época especial

13. Temos que:

- Como  $[CD]$  é um diâmetro da circunferência, então  $\widehat{CD} = 180^\circ$
- $\widehat{CA} + \widehat{AD} = \widehat{CD} \Leftrightarrow 110 + \widehat{AD} = 180 \Leftrightarrow \widehat{AD} = 180 - 110 \Leftrightarrow \widehat{AD} = 70^\circ$

Como o ângulo  $ACD$  é o ângulo inscrito relativo ao arco  $AD$ , a amplitude do ângulo é metade da amplitude do arco, ou seja:

$$\widehat{ACB} = \widehat{ACD} = \frac{\widehat{AD}}{2} = \frac{70}{2} = 35^\circ$$

Como a soma dos ângulos internos de um triângulo é  $180^\circ$ , e  $\widehat{ACB} = \widehat{ACD}$  vem que:

$$\begin{aligned} \widehat{ABC} + \widehat{ACB} + \widehat{BAC} &= 180 \Leftrightarrow \widehat{ABC} + 35 + 25 = 180 \Leftrightarrow \widehat{ABC} = 180 - 35 - 25 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \widehat{ABC} = 180 - 60 \Leftrightarrow \widehat{ABC} = 120^\circ \end{aligned}$$

Prova Final 3.º Ciclo – 2018, 2.ª fase

14. Como o ângulo  $ABD$  é o ângulo inscrito relativo ao arco  $AD$ , a amplitude do ângulo é metade da amplitude do arco, ou seja:

$$\widehat{ABD} = \frac{\widehat{AD}}{2} = \frac{56}{2} = 28^\circ$$

Como os ângulos  $OEB$  e  $BEC$  são Ângulos suplementares e  $\widehat{BEC} = 72^\circ$ , temos que:

$$\widehat{OEB} + \widehat{BEC} = 180 \Leftrightarrow \widehat{OEB} + 72 = 180 \Leftrightarrow \widehat{OEB} = 180 - 72 \Leftrightarrow \widehat{OEB} = 108^\circ$$

Como a soma dos ângulos internos de um triângulo é  $180^\circ$ , e  $\widehat{ABD} = \widehat{OBE}$  vem que:

$$\widehat{OBE} + \widehat{OEB} + \widehat{BOE} = 180 \Leftrightarrow 28 + 108 + \widehat{BOE} = 180 \Leftrightarrow \widehat{BOE} = 180 - 108 - 28 \Leftrightarrow \widehat{BOE} = 44^\circ$$

Prova Final 3.º Ciclo – 2018, 1.ª fase



15. Como o trapézio é isósceles, então  $\overline{BC} = \overline{AD}$ , pelo que também  $\widehat{BC} = \widehat{AD}$ , e como  $[CD]$  é um diâmetro, vem que:

$$\begin{aligned}\widehat{CD} = 180 &\Leftrightarrow \widehat{BC} + \widehat{AB} + \widehat{AD} = 180 \Leftrightarrow \widehat{BC} + 80 + \widehat{BC} = 180 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 2 \times \widehat{BC} = 180 - 80 \Leftrightarrow \widehat{BC} = \frac{100}{2} \Leftrightarrow \widehat{BC} = 50^\circ\end{aligned}$$

E assim, vem que:

$$\widehat{BCD} = \widehat{BC} + \widehat{CD} = 50 + 180 = 230^\circ$$

Como o ângulo  $DAB$  é o ângulo inscrito relativo ao arco  $BCD$ , a amplitude do ângulo é metade da amplitude do arco, ou seja:

$$D\hat{A}B = \frac{\widehat{BCD}}{2} = \frac{230}{2} = 115^\circ$$

Prova Final 3.º Ciclo – 2017, Época especial

16. Como o ângulo  $BDA$  é o ângulo inscrito relativo ao arco  $AB$ , a amplitude do ângulo é metade da amplitude do arco, ou seja:

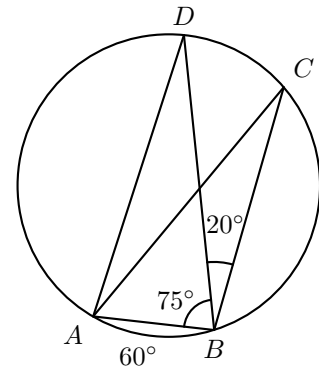
$$B\hat{D}A = \frac{\widehat{AB}}{2} = \frac{60}{2} = 30^\circ$$

Como, num triângulo a lados iguais se opõem ângulos com a mesma amplitude e  $\overline{AD} = \overline{BD}$  então  $D\hat{B}A = B\hat{A}D$ , e como a soma dos ângulos internos de um triângulo é  $180^\circ$ , vem que:

$$\begin{aligned}D\hat{B}A + B\hat{A}D + B\hat{D}A &= 180 \Leftrightarrow D\hat{B}A + D\hat{B}A + 30 = 180 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 2D\hat{B}A = 180 - 30 \Leftrightarrow D\hat{B}A = \frac{150}{2} \Leftrightarrow D\hat{B}A = 75^\circ\end{aligned}$$

Desta forma, como  $C\hat{B}D = 20^\circ$ , vem que:

$$A\hat{B}C = D\hat{B}A + C\hat{B}D = 75 + 20 = 95^\circ$$



Prova Final 3.º Ciclo – 2017, 2.ª fase



17. Como o ângulo  $ACB$  é o ângulo inscrito relativo ao arco  $AB$ , a amplitude do ângulo é metade da amplitude do arco, ou seja:

$$A\hat{C}B = \frac{\widehat{AB}}{2} = \frac{120}{2} = 60^\circ$$

Assim, podemos determinar a amplitude do ângulo  $ABC$  (porque a soma das amplitudes dos ângulos internos de um triângulo é  $180^\circ$ ):

$$B\hat{A}C + A\hat{C}B + A\hat{B}C = 180 \Leftrightarrow 40 + 60 + A\hat{B}C = 180 - 40 - 60 \Leftrightarrow A\hat{B}C = 180 - 100 \Leftrightarrow A\hat{B}C = 80^\circ$$

Prova Final 3.º Ciclo – 2017, 1.ª fase

18. Como o ângulo  $BDA$  é reto (porque está inscrito numa semicircunferência), então temos que:

$$B\hat{D}A = E\hat{D}A = 90^\circ$$

Assim, podemos determinar a amplitude do ângulo  $DAC$  (porque a soma das amplitudes dos ângulos internos de um triângulo é  $180^\circ$ ):

$$D\hat{A}C + A\hat{E}D + E\hat{D}A = 180 \Leftrightarrow D\hat{A}C + 70 + 90 = 180 \Leftrightarrow D\hat{A}C = 180 - 90 - 70 \Leftrightarrow D\hat{A}C = 20^\circ$$

Assim, como o ângulo  $DAC$  é o ângulo inscrito relativo ao arco  $DC$ , a amplitude do arco é o dobro da amplitude do ângulo. ou seja:

$$\widehat{DC} = 2 \times D\hat{A}C \Leftrightarrow \widehat{DC} = 2 \times 20 \Leftrightarrow \widehat{DC} = 40^\circ$$

Prova Final 3.º Ciclo – 2016, Época especial

19. Como  $[PC]$  é um diâmetro da circunferência a amplitude do arco respetivo é  $180^\circ$

Assim podemos determinar a amplitude do arco  $CD$  como a diferença de amplitudes dos arcos  $PC$  e  $PD$ :

$$\widehat{CD} = \widehat{PC} - \widehat{PD} = 180 - 110 = 70^\circ$$

Como o ângulo  $CPD$  é o ângulo inscrito relativo ao arco  $CD$ , a amplitude do ângulo é igual a metade da amplitude do arco:

$$A\hat{P}B = C\hat{P}D = \frac{70}{2} = 35^\circ$$

Prova Final 3.º Ciclo – 2016, 2.ª fase

20. Como a reta  $MN$  é tangente à circunferência no ponto  $P$ , o raio  $[OP]$  é perpendicular à reta  $MN$

Desta forma, o triângulo  $[OPM]$  é retângulo em  $P$ , ou seja  $O\hat{P}M = 90^\circ$ , e assim, como  $O\hat{M}N = O\hat{M}P = 15^\circ$ , temos que:

$$\begin{aligned} M\hat{O}P + O\hat{M}P + O\hat{P}M &= 180 \Leftrightarrow M\hat{O}P + 15 + 90 = 180 - 90 - 15 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow M\hat{O}P = 180 - 90 - 15 \Leftrightarrow M\hat{O}P = 75^\circ \end{aligned}$$

Como o ângulo  $MOP$  é o ângulo ao centro relativo ao arco  $QP$ , a amplitude do arco é igual à amplitude do ângulo:

$$\widehat{QP} = 75^\circ$$

Resposta: **Opção B**

Prova Final 3.º Ciclo – 2016, 1.ª fase



21. Sabendo que  $C\hat{A}D = B\hat{A}O = 25^\circ$ , e como o ângulo  $CAD$  é o ângulo inscrito relativo ao arco  $CB$ , temos que

$$\widehat{CD} = 2 \times C\hat{A}D \Leftrightarrow \widehat{CD} = 2 \times 25 \Leftrightarrow \widehat{CD} = 50^\circ$$

Como  $AD$  é o arco de uma semicircunferência,  $\widehat{AD} = 180^\circ$ , e assim, vem que

$$\widehat{AD} = \widehat{AC} + \widehat{CD} \Leftrightarrow 180 = \widehat{AC} + 50 \Leftrightarrow 180 - 50 = \widehat{AC} \Leftrightarrow \widehat{AC} = 130^\circ$$

Prova Final 3.º Ciclo – 2015, 2.ª fase

22. Como o triângulo  $[ABC]$  é isósceles,  $\overline{AB} = \overline{BC}$ .

Como, num triângulo a lados iguais se opõem ângulos iguais, temos que  $B\hat{C}A = A\hat{C}B$ , e como estes são ângulos inscritos, os respectivos arcos também são iguais, ou seja  $\widehat{CB} = \widehat{BA}$

Como  $\widehat{AC} = 100^\circ$  e  $\widehat{AC} + \widehat{CB} + \widehat{BA} = 360^\circ$ , temos que

$$\widehat{AC} + \widehat{CB} + \widehat{BA} = 360 \Leftrightarrow 100 + 2 \times \widehat{CB} = 360 \Leftrightarrow 2 \times \widehat{CB} = 360 - 100 \Leftrightarrow \widehat{CB} = \frac{260}{2} \Leftrightarrow \widehat{CB} = 130$$

Como o ângulo  $CAB$  é o ângulo inscrito relativo ao arco  $CB$ , temos que  $2 \times C\hat{A}B = \widehat{CB}$ , pelo que

$$C\hat{A}B = \frac{\widehat{CB}}{2} \Leftrightarrow C\hat{A}B = \frac{130}{2} \Leftrightarrow C\hat{A}B = 65^\circ$$

Prova Final 3.º Ciclo – 2015, 1.ª fase

23. Como  $[CDA]$  é um triângulo, e a reta  $CD$  é tangente à circunferência no ponto  $C$  e por isso perpendicular ao diâmetro  $[CA]$ , então a amplitude, em graus, do ângulo  $DAC$ , pode ser calculada como

$$D\hat{A}C + A\hat{C}D + C\hat{D}A = 180 \Leftrightarrow D\hat{A}C + 90 + 50 = 180 \Leftrightarrow D\hat{A}C = 180 - 140 \Leftrightarrow D\hat{A}C = 40^\circ$$

Como o ângulo  $DAC$  é o ângulo inscrito relativo ao arco  $CB$ , temos que:

$$\widehat{CB} = 2 \times D\hat{A}C \Leftrightarrow \widehat{CB} = 2 \times 40 \Leftrightarrow \widehat{CB} = 80^\circ$$

Resposta: **Opção C**

Prova Final 3.º Ciclo – 2014, 2.ª chamada

24. Como o ângulo  $BOC$  é o ângulo ao centro que, para o mesmo arco, corresponde ao ângulo inscrito  $BAC$  temos que  $B\hat{O}C = 2 \times B\hat{A}C$

Assim, vem que  $B\hat{O}C = 2 \times 65 = 130^\circ$

Resposta: **Opção C**

Prova Final 3.º Ciclo – 2014, 1.ª chamada





25. Como o ângulo  $EAF$  é um ângulo inscrito, o arco correspondente tem o dobro da amplitude, ou seja,  $\widehat{EF} = 60 \times 2 = 120^\circ$

Como  $[BD]$  é um diâmetro,  $\widehat{BD} = 180^\circ$ , e temos que

$$\widehat{BD} = \widehat{BE} + \widehat{EF} + \widehat{FD} \Leftrightarrow \widehat{BE} = \widehat{BD} - \widehat{EF} - \widehat{FD}$$

Assim, substituindo os valores conhecidos na igualdade anterior, temos:

$$\widehat{BE} = 180 - 120 - 20 \Leftrightarrow \widehat{BE} = 40^\circ$$

Teste Intermédio 9.º ano – 21.03.2014

26. Como o ângulo  $AOC$  é um ângulo ao centro, o arco correspondente tem a mesma amplitude, logo:

$$\widehat{AC} = \widehat{AOC} = 72^\circ$$

Como o ângulo  $ABC$  é um ângulo inscrito, tem metade da amplitude do arco correspondente, ou seja,

$$\widehat{ABC} = \frac{\widehat{AC}}{2} = \frac{72}{2} = 36^\circ$$

Prova Final 3.º Ciclo – 2013, 2.ª chamada

27. Como o ângulo  $ACB$  é um ângulo inscrito, o arco correspondente tem o dobro da amplitude, ou seja,

$$\widehat{AB} = 2 \times \widehat{ACB} = 2 \times 36 = 72^\circ$$

Resposta: **Opção D**

Prova Final 3.º Ciclo – 2013, 1.ª chamada

28. Como os vértices dos dois pentágonos são vértices de um decágono regular, a região de interseção dos pentágonos também é um decágono regular, e assim o ângulo  $\alpha$  é um ângulo interno de um decágono regular.

Como a soma dos ângulos internos de um polígono regular de  $n$  lados é  $S_I = 180 \times (n - 2)$ , temos que a soma dos ângulos internos do decágono regular é

$$S_I = 180 \times (10 - 2) = 180 \times 8 = 1440^\circ$$

Como os ângulos internos de um polígono regular têm a mesma amplitude, cada um dos 10 ângulos tem de amplitude

$$\alpha = \frac{1440}{10} = 144^\circ$$

Teste Intermédio 9.º ano – 12.04.2013



29. Como o arco  $HFI$  tem  $128^\circ$  de amplitude, o arco  $HI$  (assinalado a tracejado) tem  $360 - 128 = 232^\circ$  de amplitude.

Como o ângulo  $HFI$  é o ângulo inscrito relativo ao arco  $HI$  tem metade da amplitude do arco, ou seja

$$H\hat{F}I = \frac{\widehat{BD}}{2} = \frac{232}{2} = 116^\circ$$

Como o trapézio é isósceles, o triângulo  $[AFD]$  também é isósceles, pelo que  $D\hat{A}F = A\hat{D}F$ , e também  $H\hat{F}I = A\hat{F}D$

Logo, a amplitude, em graus, do ângulo  $ADF$  pode ser calculada como

$$\begin{aligned} A\hat{D}F + D\hat{A}F + A\hat{F}D &= 180 \Leftrightarrow A\hat{D}F + A\hat{D}F + 116 = 180 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 2 \times A\hat{D}F &= 180 - 116 \Leftrightarrow A\hat{D}F = \frac{64}{2} \Leftrightarrow A\hat{D}F = 32^\circ \end{aligned}$$

Teste Intermédio 9.º ano – 12.04.2013

30.

- 30.1. Como o ângulo  $AOC$  é um ângulo ao centro, e o ângulo  $ABC$  é um ângulo inscrito com o mesmo arco correspondente, temos que:

$$A\hat{B}C = \frac{A\hat{O}C}{2} = \frac{140}{2} = 70^\circ$$

Resposta: **Opção B**

- 30.2. Como as retas  $AD$  e  $CD$  são tangentes à circunferência nos pontos  $A$  e  $C$ , respetivamente temos que os ângulos  $OAD$  e  $OCD$  são retos.

Como a soma dos ângulos internos de um quadrilátero é  $360^\circ$ , considerando o quadrilátero  $[OADC]$  temos que

$$\begin{aligned} A\hat{D}C + O\hat{C}D + A\hat{O}C + O\hat{A}D &= 360 \Leftrightarrow A\hat{D}C + 90 + 140 + 90 = 360 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow A\hat{D}C + 320 &= 360 \Leftrightarrow A\hat{D}C = 360 - 320 \Leftrightarrow A\hat{D}C = 40^\circ \end{aligned}$$

Como os ângulos  $ADE$  e  $ADC$  são suplementares, vem que

$$A\hat{D}E + A\hat{D}C = 180 \Leftrightarrow A\hat{D}E + 40 = 180 \Leftrightarrow A\hat{D}E = 180 - 40 \Leftrightarrow A\hat{D}E = 140^\circ$$

Prova Final 3.º Ciclo – 2012, 2.ª chamada

31. Como  $C\hat{A}B = D\hat{A}E = 37^\circ$  e  $A\hat{B}C = 90^\circ$ , temos que

$$A\hat{C}B + C\hat{A}B + A\hat{B}C = 180 \Leftrightarrow A\hat{C}B + 37 + 90 = 180 \Leftrightarrow A\hat{C}B = 180 - 90 - 37 \Leftrightarrow A\hat{C}B = 53^\circ$$

Como o ângulo  $ACB$  é o ângulo inscrito na circunferência relativo ao arco  $PQ$ , temos que

$$P\hat{Q} = 2 \times 53 = 106^\circ$$

Como a soma das amplitudes dos arcos  $PQ$  e  $PCQ$  é  $360^\circ$  podemos calcular a amplitude, em graus, do arco  $PCQ$  :

$$P\hat{C}Q + P\hat{Q} = 360 \Leftrightarrow P\hat{C}Q + 106 = 360 \Leftrightarrow P\hat{C}Q = 360 - 106 \Leftrightarrow P\hat{C}Q = 254^\circ$$

Prova Final 3.º Ciclo – 2012, 1.ª chamada



32.

32.1. Designando por  $r$  o raio da circunferência, como  $[AD]$  é um diâmetro, vem que  $\overline{BC} = \overline{AD} = 2r$ , e  $\overline{AB} = \overline{CD} = r$

Assim, temos que o perímetro do retângulo  $[ABCD]$  é

$$P_{[ABCD]} = 2 \times \overline{AD} + 2 \times \overline{AB} = 2 \times 2r + 2 \times r = 4r + 2r = 6r$$

Como sabemos que o perímetro é igual a 30 cm, podemos determinar o valor do raio, em centímetros:

$$P_{[ABCD]} = 30 \Leftrightarrow 6r = 30 \Leftrightarrow r = \frac{30}{6} \Leftrightarrow r = 5$$

Pelo que calculando o comprimento da circunferência (ou o perímetro), em centímetros, arredondado às décimas, vem

$$P_o = 2\pi r = 2\pi \times 5 = 10\pi \approx 31,4 \text{ cm}$$

32.2. Como o ângulo  $DEF$  é o ângulo inscrito na circunferência correspondente ao arco  $DE$  e  $\hat{DEF} = 30^\circ$ , temos que

$$\widehat{DF} = 2 \times \hat{DEF} = 2 \times 30 = 60^\circ$$

Como  $[AD]$  é um diâmetro, temos que  $\widehat{AD} = 180^\circ$ , pelo que podemos calcular a amplitude, em graus, do arco  $FA$ :

$$\widehat{AD} = \widehat{DF} + \widehat{FA} \Leftrightarrow 180 = 60 + \widehat{FA} \Leftrightarrow 180 - 60 = \widehat{FA} \Leftrightarrow 120 = \widehat{FA}$$

Assim a amplitude de uma rotação de centro em  $O$  que transforme o ponto  $F$  no ponto  $A$  é a amplitude do ângulo ao centro  $FOA$ , cujo arco correspondente é o arco  $FA$ , pelo que

$$F\hat{O}A = \widehat{FA} = 120^\circ$$

Teste Intermédio 9.º ano – 10.05.2012

33. Como o ângulo  $CAD$  é o ângulo inscrito na circunferência relativo ao arco  $CD$ , e  $\hat{CAD} = 36^\circ$  temos que

$$\widehat{CD} = 2 \times 36 = 72^\circ$$

Resposta: **Opção C**

Exame Nacional 3.º Ciclo – 2011, Ép. especial

34. Como o ângulo  $BDC$  é o ângulo inscrito relativo ao arco  $BC$ , temos que  $B\hat{D}C = \frac{\widehat{BC}}{2} = \frac{80}{2} = 40^\circ$

Como o ângulo  $BDC$  e o ângulo  $PDC$  são o mesmo ângulo e como a soma dos ângulos internos de um triângulo é  $180^\circ$ , podemos calcular a amplitude do ângulo  $DCP$ :

$$D\hat{C}P + D\hat{P}C + P\hat{D}C = 180 \Leftrightarrow D\hat{C}P + 85 + 40 = 180 \Leftrightarrow D\hat{C}P = 180 - 85 - 40 \Leftrightarrow D\hat{C}P = 55^\circ$$

Como o ângulo  $DCP$  e o ângulo  $DCA$  são o mesmo ângulo e como os ângulos  $DCA$  e  $DBA$  são ambos ângulos inscritos relativos ao arco  $DA$ , então

$$D\hat{B}A = D\hat{C}A = D\hat{C}P = 55^\circ$$

Exame Nacional 3.º Ciclo – 2011, 2.ª chamada



35. Como o ângulo  $CAD$  é o ângulo inscrito relativo ao arco  $AC$ , temos que  $\widehat{CD} = 2 \times C\hat{A}D = 2 \times 40 = 80^\circ$

Como  $\widehat{AD} = 180^\circ$ , porque  $[AD]$  é um diâmetro da circunferência, e  $\widehat{AC} + \widehat{CD} = \widehat{AD}$ , vem que

$$\widehat{AC} + \widehat{CD} = \widehat{AD} \Leftrightarrow \widehat{AC} + 80 = 180 \Leftrightarrow \widehat{AC} = 180 - 80 \Leftrightarrow \widehat{AC} = 100^\circ$$

Exame Nacional 3.º Ciclo – 2011, 1.ª chamada

36. Designado por  $D$  o ponto simétrico ao ponto  $B$  relativamente ao centro da circunferência, temos que como o ângulo  $ABD$  é o ângulo inscrito relativo ao arco  $AD$ , vem que  $\widehat{AD} = 2 \times A\hat{B}D = 2 \times 36 = 72^\circ$

Como  $\widehat{BD} = 180^\circ$ , porque  $[BD]$  é um diâmetro da circunferência, e  $\widehat{AB} + \widehat{AD} = \widehat{BD}$ , vem que

$$\widehat{AB} + \widehat{AD} = \widehat{BD} \Leftrightarrow \widehat{AB} + 72 = 180 \Leftrightarrow \widehat{AB} = 180 - 72 \Leftrightarrow \widehat{AB} = 108^\circ$$

Teste Intermédio 9.º ano – 17.05.2011

37.

37.1. Como  $[ACEG]$  é um quadrado, temos que  $B\hat{A}H = 90^\circ$ , e a amplitude do ângulo ao centro  $BAH$ , cujo arco correspondente é o arco  $BH$ , pelo que

$$\widehat{BH} = 90^\circ$$

E como o ângulo  $BIH$  é o ângulo inscrito relativo ao arco  $BH$ , a sua amplitude é metade da amplitude do arco:

$$B\hat{I}H = \frac{\widehat{BH}}{2} = \frac{90}{2} = 45^\circ$$

37.2. Como  $[ACEG]$  é um quadrado de lado 4, a sua área é

$$A_{[ACEG]} = 4^2 = 16$$

Como as circunferências têm raio lado 2, a área de cada uma é

$$A_o = \pi \times 2^2 = \pi \times 4 = 4\pi$$

Como os centros das circunferências são os vértices do quadrado, a área de cada uma das circunferências que está no interior do quadrado é  $\frac{1}{4}$  do total. Como são 4 quartos de circunferência que estão no interior do quadrado, a área do quadrado que não está sombreada corresponde a área de uma circunferência, e assim, a área sombreada,  $A_S$ , pode ser calculada como a diferença das áreas do quadrado e de uma circunferência:

$$A_S = A_{[ACEG]} - 4 \times \frac{1}{4} \times 4\pi = A_{[ACEG]} - 4\pi = 16 - 4\pi \approx 3,4$$

Exame Nacional 3.º Ciclo – 2010, 2.ª chamada

38. Como o ângulo  $BDA$  é o ângulo inscrito relativo ao arco  $AB$ , a amplitude do arco é o dobro da amplitude do ângulo:

$$\widehat{AB} = 2 \times B\hat{D}A = 2 \times 70 = 140^\circ$$

Exame Nacional 3.º Ciclo – 2010, 1.ª chamada



39.

39.1. Como qualquer hexágono regular pode ser decomposto em 6 triângulos equiláteros, o triângulo  $[DOC]$  é equilátero, pelo que os seus ângulos são todos iguais.

Assim, temos que

$$3 \times D\hat{O}C = 180 \Leftrightarrow D\hat{O}C = \frac{180}{3} \Leftrightarrow D\hat{O}C = 60^\circ$$

39.2. Como a circunferência tem raio 4, temos que a área do círculo correspondente, é

$$A_o = \pi \times 4^2 = 16\pi$$

Como o hexágono pode ser dividido em 6 triângulos congruentes com o triângulo  $[DOC]$ , temos que área do hexágono  $[ABCDEF]$  é

$$A_{[ABCDEF]} = 6 \times A_{[DOC]} = 6 \times 4\sqrt{3} = 24\sqrt{3}$$

E assim, calculando a área da região sombreada,  $A_S$ , como a diferença das áreas do círculo e do hexágono, e arredondando o resultado às unidades temos

$$A_o - A_{[ABCDEF]} = 16\pi - 24\sqrt{3} \approx 9$$

Teste Intermédio 9.º ano – 11.05.2010

40. Como o diâmetro  $[BD]$  é perpendicular ao diâmetro  $[AC]$ , o ângulo  $AOB$  é reto, e como é um ângulo ao centro, o arco correspondente tem a mesma amplitude, ou seja,

$$\widehat{AB} = A\hat{O}B = 90^\circ$$

Como o ângulo  $ACB$  é o ângulo inscrito relativo ao arco  $AB$ , a amplitude do ângulo é metade da amplitude do arco:

$$A\hat{C}B = \frac{\widehat{AB}}{2} = \frac{90}{2} = 45^\circ$$

Exame Nacional 3.º Ciclo – 2009, 2.ª chamada

41. Como o ângulo  $ABC$  é o ângulo inscrito relativo ao arco  $AC$ , a amplitude do arco é o dobro da amplitude do ângulo:

$$\widehat{AC} = 2 \times A\hat{B}C = 2 \times 28 = 56^\circ$$

Exame Nacional 3.º Ciclo – 2009, 1.ª chamada

42. Como  $[AC]$  é um diâmetro da circunferência, o arco  $AC$  tem amplitude  $180^\circ$

Como o ângulo  $ABC$  é o ângulo inscrito relativo ao arco  $AC$ , a amplitude do ângulo é metade da amplitude do arco:

$$A\hat{B}C = \frac{\widehat{AC}}{2} = \frac{180}{2} = 90^\circ$$

Pelo que o ângulo  $ABC$  é reto, e assim, o triângulo  $[ABC]$  é um triângulo retângulo em  $B$

Teste Intermédio 9.º ano – 11.05.2009



43. Como os ângulos  $AOC$  e  $\beta$  são suplementares, e  $\beta = 60^\circ$ , então temos que:

$$\widehat{AOC} + \beta = 180 \Leftrightarrow \widehat{AOC} = 180 - \beta \Leftrightarrow \widehat{AOC} = 180 - 60 \Leftrightarrow \widehat{AOC} = 120^\circ$$

Como o triângulo  $[AOC]$  é isósceles, porque ambos os lados  $[AO]$  e  $[OC]$  são raios da circunferência, então  $\overline{AO} = \overline{OC}$ ; e num triângulo a lados com a mesma medida opõem-se ângulos com a mesma amplitude, pelo que  $\widehat{OAC} = \alpha$

Sabendo que a soma dos ângulos internos de um triângulo é  $180^\circ$ , então, calculando a amplitude em graus do ângulo  $\alpha$ , vem que:

$$\widehat{OAC} + \alpha + \widehat{AOC} = 180 \Leftrightarrow \alpha + \alpha + 120 = 180 \Leftrightarrow 2\alpha = 180 - 120 \Leftrightarrow 2\alpha = 60 \Leftrightarrow \alpha = \frac{60}{2} \Leftrightarrow \alpha = 30^\circ$$

Exame Nacional 3.º Ciclo - 2008, 2.ª chamada

44.

44.1. Como a área do círculo é dada por  $A = \pi r^2$ , temos que:

$$A = \pi r^2 \Leftrightarrow \frac{A}{r^2} = \pi$$

E como  $P = 2\pi r$  e  $2\pi = d$ , vem que:

$$P = 2\pi r \Leftrightarrow \frac{P}{2r} = \pi \Leftrightarrow \frac{P}{d} = \pi$$

Pelo que, de entre as igualdades apresentadas,  $\frac{A}{2r} = \pi$  é a única que não é verdadeira.

Resposta: **Opção B**

Exame Nacional 3.º Ciclo - 2008, 2.ª chamada

45.

45.1. Como  $[PQRST]$  é um pentágono regular, os vértices dividem a circunferência em 5 arcos com a mesma amplitude, pelo que a amplitude do arco  $TQ$  pode ser calculada como:

$$\widehat{TQ} = 3 \times \frac{360}{5} = 216^\circ$$

Como o ângulo  $TPQ$  é o ângulo inscrito relativo ao arco  $TP$ , a amplitude do ângulo é metade da amplitude do arco:

$$\widehat{TPQ} = \frac{\widehat{TQ}}{2} = \frac{216}{2} = 108^\circ$$

45.2. Como a circunferência tem raio 5, a área do círculo pode ser calculada por:

$$A_o = \pi r^2 = \pi 5^2 = 25\pi$$

Como o triângulo  $[SOR]$  tem área 12, a área do pentágono é

$$A_{[PQRST]} = 5 \times A_{[SOR]} = 5 \times 12 = 60$$

Assim, calculando a área sombreada,  $A_S$ , como a diferença da área do círculo e do pentágono e arredondando o resultado às décimas, temos que:

$$A_S = A_o - A_{[PQRST]} = 25\pi - 60 \approx 18,5$$

Teste Intermédio 9.º ano - 07.05.2008



46. Como o arco  $AB$  tem  $180^\circ$  de amplitude, então o lado  $[AB]$  do triângulo é um diâmetro da circunferência, pelo que, independentemente da posição do vértice  $C$ , o triângulo  $[ABC]$  é um triângulo retângulo. Assim como o triângulo  $[ABC]$  tem um ângulo reto não é um triângulo equilátero, pois para o ser, todos os ângulos internos teriam amplitude de  $60^\circ$

Exame Nacional 3.º Ciclo - 2007, 2.ª chamada

47.

- 47.1. Como o ângulo  $CAD$  é o ângulo inscrito relativo ao arco  $CD$ , a amplitude do arco é o dobro da amplitude do ângulo:

$$\widehat{CD} = 2 \times \widehat{CAD} = 2 \times 30 = 60^\circ$$

- 47.2. Como o triângulo  $[ADE]$  é retângulo em  $E$ , o ângulo  $ADE$  é reto, e assim o ângulo  $CDE$  também é reto (porque  $ADE$  e  $CDE$  são ângulos suplementares).

Como o segmento de reta  $[BD]$  é um diâmetro, é um eixo de simetria da circunferência, e assim a reflexão do ponto  $A$ , relativamente à reta  $BD$  é o ponto  $C$  (porque as retas  $AC$  e  $BD$  são perpendiculares), e assim vem que o ponto  $E$  é o ponto médio da corda  $[AC]$ , pelo que  $\overline{AE} = \overline{EC}$

Como o lado  $[DE]$  é comum aos dois triângulos, temos que os dois triângulos têm dois pares de lados com o mesmo comprimento e o ângulo por eles formado tem a mesma amplitude, pelo que os triângulos são geometricamente iguais (critério LAL).

Exame Nacional 3.º Ciclo - 2007, 1.ª chamada

48. Como o ângulo  $DOC$  é o ângulo ao centro relativo ao arco  $DC$ , a amplitude do arco é igual à amplitude do ângulo:

$$\widehat{DC} = 60^\circ$$

Como o ângulo  $DAB$  é o ângulo inscrito relativo ao arco  $DB$ , a amplitude do arco é o dobro da amplitude do ângulo:

$$\widehat{DB} = 2 \times \widehat{DAB} = 2 \times 50 = 100^\circ$$

E a amplitude do arco  $CB$  é a diferença das amplitudes dos arcos  $DB$  e  $DC$ :

$$\widehat{CB} = \widehat{DB} - \widehat{DC} = 100 - 60 = 40^\circ$$

Exame Nacional 3.º Ciclo - 2006, 2.ª chamada

49.

- 49.1. Como o segmento de reta  $[AC]$  é um diâmetro, então:

$$\widehat{AC} = 180^\circ$$

Como o ângulo  $CAB$  é o ângulo inscrito relativo ao arco  $CB$ , a amplitude do arco é o dobro da amplitude do ângulo:

$$\widehat{CB} = 2 \times \widehat{CAB} = 2 \times \widehat{OAB} = 2 \times 30 = 60^\circ$$

E a amplitude do arco  $AB$  é a diferença das amplitudes dos arcos  $AC$  e  $BC$ :

$$\widehat{AB} = \widehat{AC} - \widehat{BC} = 180 - 60 = 120^\circ$$

- 49.2. Como a reta é tangente à circunferência no ponto  $A$ , é perpendicular ao diâmetro  $[AD]$ , ou seja, o ângulo  $CAD$  é reto.

Assim, como os ângulos  $CAB$  e  $BAD$  são complementares, ou seja  $\widehat{CAB} + \widehat{BAD} = \widehat{CAD}$ , temos que:

$$30 + \widehat{BAD} = 90 \Leftrightarrow \widehat{BAD} = 90 - 30 \Leftrightarrow \widehat{BAD} = 60^\circ$$

Exame Nacional 3.º Ciclo - 2005, 2.ª chamada



50. Como os segmentos  $[BF]$  e  $[DH]$  são ambos diâmetros da circunferência, temos que:

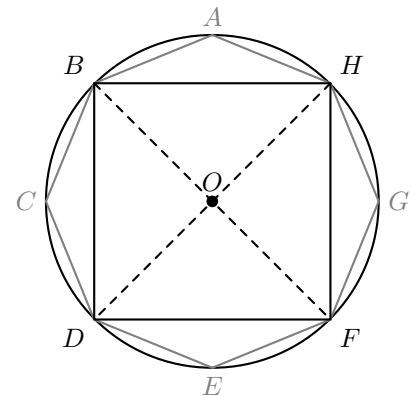
$$\overline{BF} = \overline{DH}$$

Como o octógono é regular, os arcos definidos por dois vértices consecutivos têm a mesma amplitude. Calculando a amplitude do arco  $BC$  (por exemplo), temos que:

$$\widehat{BC} = \frac{360}{8} = 45^\circ$$

E assim, os arcos definidos por vértices consecutivos do quadriláteros, também têm a mesma amplitude. Calculando a amplitude do arco  $BD$  (por exemplo), temos que:

$$\widehat{BD} = \widehat{BC} + \widehat{CD} = 2 \times \widehat{BC} = 2 \times 45 = 90^\circ$$

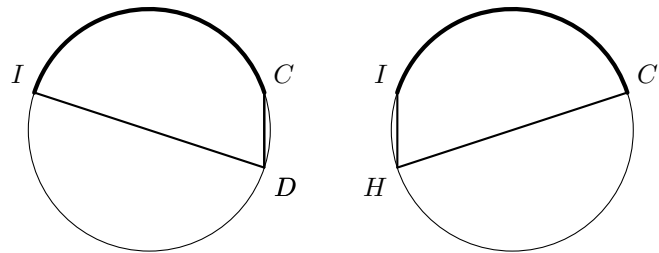


Desta forma temos que o ângulo  $BOD$ , que é o ângulo ao centro relativo ao arco  $BD$  (e por isso tem a mesma amplitude), é um ângulo reto.

Assim, os segmentos  $[BF]$  e  $[DH]$ , que são as diagonais do quadrilátero  $[BDFH]$  são perpendiculares e têm o mesmo comprimento, pelo que o quadrilátero é um quadrado.

Exame Nacional 3.º Ciclo – 2005, 2.ª chamada

51. Como os ângulos  $CDI$  e  $CHI$  são ângulos inscritos, relativos ao mesmo arco de circunferência (arco  $CI$ ), então têm a mesma amplitude.



Exame Nacional 3.º Ciclo – 2005, 1.ª chamada

52. Como o perímetro de um círculo de raio  $r$  é  $P_o = 2\pi r$ . Como neste caso o diâmetro é de 10 cm, temos que raio é  $r = \frac{10}{2} = 5$  cm. E assim o perímetro do círculo, em centímetros, é dado por:

$$P_o = 2\pi \times 5 = 10\pi \approx 31,416 \text{ cm}$$

Desta forma, observando todas as aproximações apresentadas podemos verificar que a melhor aproximação é 31,42, ou seja a aproximação do João.

Resposta: **Opção C**

Exame Nacional 3.º Ciclo – 2005, 1.ª chamada

53.

53.1. Como o perímetro de um círculo de raio  $r$  é  $P_o = 2\pi r$ . Como neste caso o diâmetro é de 10 m, temos que raio é  $r = \frac{10}{2} = 5$  m. E assim o perímetro do círculo, em metros, é dado por:

$$P_o = 2\pi \times 5 = 10\pi \text{ m}$$

Como o comprimento total corresponde a 6 voltas completas, o comprimento total do percurso, em metros, arredondado às unidades, é:

$$C_T = 6 \times 10\pi = 60\pi \approx 188 \text{ m}$$





53.2. Como existem 12 cadeiras igualmente espaçadas sobre a circunferência, os 12 ângulos ao centro têm a mesma amplitude.

Assim, temos que a amplitude de cada um destes ângulos, e o ângulo  $DOF$  em particular, é:

$$D\hat{O}F = \frac{360}{12} = 30^\circ$$

Prova de Aferição – 2004

