



M.A.C.S. (10.º ano)

## Teoria da partilha (divisão justa)

Exercícios de Provas Nacionais



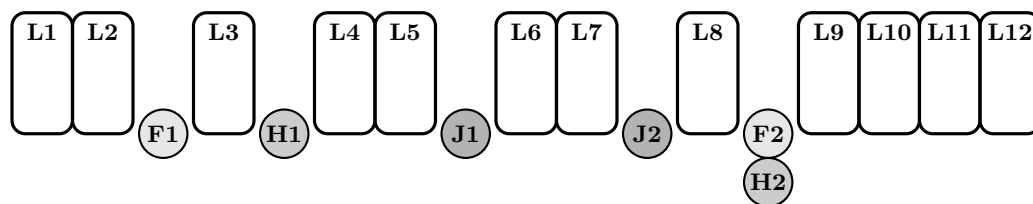
1. As levadas são canais de água cuja função original era o transporte de água do norte da ilha da Madeira, onde o clima é mais húmido, para o sul da ilha, onde o clima é mais seco. Atualmente, os percursos pedestres ao longo das levadas são uma das atrações turísticas da Madeira.

Uma empresa pretende oferecer aos seus clientes a exploração de percursos pedestres ao longo de 12 levadas diferentes. Cada um dos três guias, o Fernando, a Helena e a Joana, funcionários da empresa, ficará responsável pelo acompanhamento dos clientes na exploração de determinados percursos pedestres.

Para definir as levadas a atribuir a cada guia, foi utilizado o método a seguir descrito.

- Atribui-se um código a cada uma das levadas, L1, L2, L3, ... , L12, e anota-se o código de cada levada num cartão. De seguida, dispõem-se os doze cartões em linha, por ordem crescente de numeração.
- Cada guia dispõe de dois marcadores para dividir em três partes, de forma secreta e que considera justa, a linha de cartões. Os marcadores do Fernando designam-se F1 e F2, os da Helena designam-se H1 e H2, e os da Joana designam-se J1 e J2.
- Depois de se revelarem quais os marcadores de cada guia, percorre-se a linha de cartões, partindo do cartão mais à esquerda, até se encontrar o primeiro marcador. Ao guia que colocou esse marcador serão atribuídas as levadas cujos códigos estão registados nos cartões à esquerda do mesmo. Esse guia já tem a sua parte.
- De seguida, percorre-se a linha de cartões, sempre da esquerda para a direita, até se encontrar o segundo marcador de um dos outros dois guias. Ao guia que colocou esse marcador serão atribuídas as levadas cujos códigos estão registados nos cartões compreendidos entre os seus primeiro e segundo marcadores.
- Ao guia que resta, serão atribuídas as levadas cujos códigos estão registados nos cartões situados à direita do seu segundo marcador.
- Se sobrirem cartões, as levadas cujos códigos estão registados nesses cartões serão atribuídas por sorteio.

Na figura seguinte, está representada a linha de cartões, já ordenada, a distribuir pelos três guias, com os respetivos marcadores colocados.



Complete o texto seguinte, selecionando a opção adequada a cada espaço.

Escreva na folha de respostas cada um dos números, **I**, **II**, **III** e **IV**, seguido da opção **a)**, **b)** ou **c)** que lhe corresponde. A cada espaço corresponde uma só opção.

Antes do sorteio de atribuição das levadas que restaram, à Joana serão atribuídas as levadas **I** , à Helena serão atribuídas **II** levadas e, ao Fernando, **III** levadas. As levadas **IV** serão duas das atribuídas por sorteio aos três guias.

<b>I</b>	<b>II</b>	<b>III</b>	<b>IV</b>
<b>a)</b> L1, L2, L3, L4 e L5	<b>a)</b> três	<b>a)</b> duas	<b>a)</b> L3 e L8
<b>b)</b> L6 e L7	<b>b)</b> quatro	<b>b)</b> quatro	<b>b)</b> L3 e L6
<b>c)</b> L8, L9, L10, L11 e L12	<b>c)</b> cinco	<b>c)</b> oito	<b>c)</b> L8 e L9

Exame – 2024, Ép. especial



2. Dois amigos, o Augusto e o Joaquim, todos os anos compram, a meias, um conjunto de rifas. Num certo ano, ganharam os prémios  $X$ ,  $Y$  e  $Z$ .

Como não chegaram a acordo sobre a divisão dos três prémios, resolveram aplicar o método a seguir descrito.

- Cada um dos amigos atribui, secretamente, um certo número de pontos a cada um dos três prémios, num total de 100 pontos.
- Cada prémio é destinado, temporariamente, ao amigo que mais o valoriza.
- Determina-se o total de pontos do(s) prémio(s) temporariamente destinado(s) a cada um dos amigos. Se o total de pontos for igual, a partilha está concluída. Caso contrário, procede-se ao ajuste da partilha, de modo que os dois amigos fiquem com número igual de pontos, no total, através da partilha de um dos prémios.
- Para se efetuar o ajuste da partilha, o prémio a partilhar pelos amigos será, de entre os atribuídos ao amigo com total de pontos mais elevado, aquele que tiver menor diferença de pontos atribuídos.
  - Seja  $A$  o amigo com o total de pontos mais elevado e seja  $B$  o outro amigo. O total final de pontos a atribuir ao amigo  $A$  corresponde à diferença entre o total temporário dos seus pontos e  $x$  por cento dos pontos por ele atribuídos ao prémio a partilhar.
  - O total final de pontos a atribuir ao amigo  $B$  corresponde à soma do total temporário dos seus pontos com  $x$  por cento dos pontos por ele atribuídos ao prémio a partilhar.
  - Igualam-se os dois totais finais, de modo a determinar o valor de  $x$ , com o qual a partilha ficará equilibrada.
  - O amigo  $B$  fica com o(s) prémio(s) a si destinado(s) e  $x$  por cento do prémio a partilhar, e o amigo  $A$  fica com o restante.

Na tabela seguinte, apresenta-se o número de pontos atribuído aos três prémios por cada um dos amigos.

	$X$	$Y$	$Z$
Augusto	32	38	30
Joaquim	24	51	25

Complete o texto seguinte, selecionando a opção adequada a cada espaço.

Escreva na folha de respostas cada um dos números, **I**, **II**, **III** e **IV**, seguido da opção **a)**, **b)** ou **c)** que lhe corresponde. A cada espaço corresponde uma só opção.

O prémio temporariamente destinado ao Joaquim foi o prémio **I**, sendo o total de pontos dos prémios temporariamente destinados ao Augusto igual a **II**. O prémio a utilizar no ajuste da partilha é o prémio **III**. Na partilha final dos prémios, o Augusto terá direito a **IV** desse prémio.

<b>I</b>	<b>II</b>	<b>III</b>	<b>IV</b>
a) $X$	a) 32	a) $X$	a) 15%
b) $Y$	b) 62	b) $Y$	b) 20%
c) $Z$	c) 68	c) $Z$	c) 80%



3. A Célia e o Guilherme são os dois funcionários da agência de viagens Ir&Voltar que apresentaram melhores resultados no ano de 2021. Pelo seu desempenho, ganharam três viagens, X, Y e Z.

Para a distribuição das três viagens, a Célia e o Guilherme acordaram utilizar o método seguinte.

- Cada funcionário atribui, secretamente, um valor monetário a cada uma das três viagens e coloca o registo dessas licitações dentro de um envelope fechado. Em seguida, os envelopes são abertos e os valores das licitações são registados numa tabela.
- Determina-se o valor global atribuído às viagens por cada funcionário e o valor que cada um considera justo receber. Assume-se que o valor que cada funcionário considera justo receber é igual a metade do valor global que ele atribuiu ao conjunto das três viagens.
- Cada viagem é destinada ao funcionário que mais a valoriza, considerando-se que o funcionário recebe o equivalente ao valor monetário que atribuiu à respetiva viagem.
- Caso, por aplicação do procedimento anterior, um funcionário não receba qualquer viagem, considera-se, para efeito dos cálculos seguintes, que o valor monetário recebido por esse funcionário é zero euros.
- Caso o valor das viagens recebidas por um funcionário ultrapasse o valor que tinha considerado justo receber, esse funcionário disponibiliza, em dinheiro, o respetivo excedente. Caso contrário, esse funcionário deverá receber, em dinheiro, do montante à disposição, o valor em falta.
- Após os procedimentos anteriores, caso ainda reste dinheiro, este é distribuído em partes iguais pelos dois funcionários.

Na tabela seguinte, estão parcialmente registados os valores, em euros, atribuídos por cada funcionário nas licitações secretas, em que  $a$  representa o valor atribuído pela Célia à viagem Z.

Viagem	X	Y	Z
Célia	1000	1500	$a$
Guilherme	1400	1000	550

Por aplicação do método acima descrito, a Célia considerava justo receber 1550 euros.

Determine, de acordo com o método acima descrito, a(s) viagem(ns) atribuída(s) ao Guilherme e o valor monetário que pagou ou recebeu após a inclusão do dinheiro que possa ter restado, de modo que nenhum deles tenha razão para reclamar.

Exame – 2022, 1.<sup>a</sup> Fase



4. A rádio OnOff é uma rádio local que transmite através da Internet, com recurso a tecnologia de transmissão de áudio e de vídeo em tempo real.

No dia em que a rádio OnOff comemorou o seu quinto aniversário, foi organizado um concurso cujo prémio era um conjunto promocional da Banda YY. O conjunto promocional era constituído por um bilhete para um concerto, uma camisola autografada pelos elementos da banda e um CD.

O vencedor do concurso, dono de uma pequena empresa, ofereceu o prémio aos seus três funcionários, a Dora, a Elsa e o Fernando, e, atendendo à antiguidade dos mesmos na empresa, decidiu que o prémio seria repartido entre eles da seguinte forma: a Dora ficaria com 50% do prémio, a Elsa com 30% e o Fernando com 20%.

Como não chegavam a acordo quanto à forma de distribuir os bens do prémio, os três funcionários decidiram partilhá-los utilizando o método seguinte.

- 1.<sup>a</sup> etapa: Cada funcionário atribui um valor monetário a cada um dos bens do prémio, colocando o registo dos valores das suas licitações dentro de um envelope fechado. No final, são abertos os envelopes e são registados, numa tabela, os valores das licitações dos três funcionários.
- 2.<sup>a</sup> etapa: Determina-se a soma das licitações atribuídas ao prémio por cada funcionário, designada valor global, e o valor que cada funcionário considera justo receber, designado porção justa. A porção justa obtém-se, para cada funcionário, através de uma proporção direta entre a percentagem que lhe coube na repartição do prémio e o valor global.
- 3.<sup>a</sup> etapa: Cada bem é atribuído ao funcionário que mais o valoriza, e considera-se que ele recebe o valor que atribui a esse bem. Se um funcionário não receber qualquer bem, considera-se, para efeitos de cálculo, que o valor dos bens recebidos por esse funcionário é zero.
- 4.<sup>a</sup> etapa: Se o valor dos bens recebidos por um funcionário for superior à porção justa por si determinada, apura-se o excedente. Caso contrário, apura-se o défice.
- 5.<sup>a</sup> etapa: (Só é aplicada quando existe dinheiro em excesso.) O excesso irá corresponder à diferença entre o valor total do excedente e o valor total do défice. Este excesso é distribuído a cada funcionário na proporção direta que lhe coube na repartição do prémio.

Na tabela seguinte, estão registados os valores monetários atribuídos, nas licitações secretas, por cada um dos funcionários a cada um dos bens.

	Dora	Elsa	Fernando
Bilhete	40 €	34 €	36 €
Camisola	20 €	22 €	26 €
CD	26 €	34 €	28 €

Determine a partilha final do prémio pelos funcionários, aplicando o método descrito, de modo que nenhum dos funcionários tenha razão para reclamar.

Na sua resposta, apresente:

- o valor global atribuído ao prémio por cada funcionário;
- a porção justa para cada funcionário;
- a atribuição dos bens aos funcionários;
- o valor a pagar ou a receber por cada funcionário;
- o valor que cada funcionário receberá do excesso, caso exista valor em excesso;
- a partilha final do prémio.



5. Para distinguir os três trabalhadores com melhores resultados operacionais, a administração da ParaPagar atribuiu como prémio de produtividade três telemóveis de modelos diferentes.

Como os três trabalhadores não chegaram a acordo quanto à distribuição dos telemóveis, decidiram que iriam distribuí-los entre si utilizando o método seguinte.

- Cada trabalhador atribui, secretamente, um valor monetário a cada um dos três telemóveis e introduz o registo dessas licitações num envelope fechado. Em seguida, os envelopes são abertos e os valores das licitações são registados numa tabela.
- Determina-se o valor global atribuído aos telemóveis por cada trabalhador e o valor que cada um considera justo receber. Assume-se que o valor que cada trabalhador considera justo receber é igual a um terço do valor global que ele atribuiu ao conjunto dos três telemóveis.
- Cada telemóvel é entregue ao trabalhador que mais o valoriza, considerando-se que o trabalhador recebe o valor monetário que lhe atribuiu.
- Caso, por aplicação do procedimento anterior, um trabalhador não receba qualquer telemóvel, considera-se, para efeito dos cálculos seguintes, que o valor monetário recebido por esse trabalhador é zero euros.
- Caso o valor dos telemóveis recebidos por um trabalhador ultrapasse o valor que tinha considerado justo receber, o trabalhador disponibiliza, em dinheiro, o respetivo excedente. Caso contrário, o trabalhador recebe, em dinheiro, do montante à disposição, o valor em falta.
- Após os procedimentos anteriores, caso ainda reste dinheiro, este é distribuído em partes iguais pelos três trabalhadores.

Na tabela seguinte, estão registados os valores, em euros, atribuídos por cada trabalhador nas licitações secretas.

Telemóveis Trabalhadores	A	B	C
Mariana	370	480	230
Pedro	330	500	205
Tiago	290	480	190

Determine, de acordo com o método acima descrito, como serão distribuídos os telemóveis pelos trabalhadores e o valor monetário a pagar ou a receber após a inclusão do dinheiro que possa ter sido distribuído, para que nenhum deles tenha razão para reclamar.

Exame – 2021, 1.ª Fase

6. Dois irmãos, a Elsa e o Manuel, receberam de presente seis bilhetes, B1, B2, B3, B4, B5 e B6, para seis festivais diferentes.

A Elsa valoriza três vezes mais o bilhete B2 do que qualquer um dos outros bilhetes, sendo todos os outros bilhetes valorizados da mesma forma.

Qual das seguintes opções pode representar um conjunto de bilhetes que a Elsa valoriza em 50% do valor global dos bilhetes?

- (A) B1; B4; B6      (B) B2; B3; B5      (C) B1; B3; B5; B6      (D) B2; B3; B4; B5

Exame – 2020, 1.ª Fase



7. Dois amigos, a Elsa e o Gaspar, partilharam um fogão de campismo (F), uma mesa de campismo (M) e uma tenda (T) durante alguns anos; porém, sendo cada vez mais difícil conciliar a partilha dos bens, decidiram distribuí-los entre os dois.

Como não chegaram a acordo sobre a divisão dos três bens, os amigos resolveram aplicar o método a seguir descrito.

- Cada um dos amigos atribui, secretamente, um certo número de pontos a cada um dos bens, num total de 100 pontos.
- Cada bem é destinado, temporariamente, ao amigo que mais o valoriza.
- Determina-se o total de pontos do(s) bem(ns) temporariamente destinado(s) a cada um dos amigos. Seja A o amigo com o total de pontos mais elevado e seja B o outro amigo.
- Procede-se ao ajuste da partilha, de modo que os dois amigos fiquem com número igual no total de pontos, através da partilha de um dos bens. Os outros bens ficam definitivamente atribuídos a cada um dos amigos.
  - Representa-se o total final de pontos a atribuir ao amigo A pela diferença entre o total temporário dos seus pontos e  $x$  por cento dos pontos por ele atribuídos ao bem a partilhar.
  - Representa-se o total final de pontos a atribuir ao amigo B pela soma do total temporário dos seus pontos com  $x$  por cento dos pontos por ele atribuídos ao bem a partilhar.
  - Igualam-se os dois totais finais, de modo a determinar o valor de  $x$  com o qual a partilha ficará equilibrada.
- O amigo B fica com o(s) bem(ns) a si destinado(s) e  $x$  por cento da utilização do bem a partilhar, e o amigo A fica com o restante.

Na tabela seguinte, apresenta-se o número de pontos atribuídos aos três bens por cada um dos amigos.

	F	M	T
Elsa	19	26	55
Gaspar	35	5	60

Atendendo aos dados apresentados na tabela anterior, os amigos concluíram que o bem a partilhar seria a tenda.

Assim, após a aplicação do método descrito, determinaram o número de dias em que, num ano, cada um deles poderia utilizar a tenda.

Admita que, até agosto, num ano com 365 dias, o Gaspar já tinha utilizado a tenda durante 146 dias.

Será que ainda a poderá utilizar durante os cinco dias do festival de verão a que pretende ir?

Na sua resposta:

- apresente a partilha temporária dos bens pelos dois amigos;
- determine o total de pontos dos bens temporariamente destinados a cada amigo;
- apresente a equação que traduz o equilíbrio da partilha e resolva-a;
- apresente a partilha final dos bens pelos dois amigos;
- determine o número de dias em que o Gaspar pode utilizar a tenda.



8. O Clube de Colecionadores dispõe de três espaços (E1, E2 e E3), de diferentes dimensões, que aluga para a exposição de coleções.

Três sócios, A, B e C, pretendem alugar os três espaços durante o mesmo período de tempo. Como não chegam a acordo sobre a distribuição dos espaços, o Clube decide aplicar o método seguinte, tanto para a distribuição dos espaços como para o apuramento do valor a pagar pelo seu aluguer.

- Cada sócio propõe, secretamente, o valor a pagar pelo aluguer de cada um dos espaços, colocando o registo dos valores das suas licitações dentro de um envelope fechado. Em seguida, os envelopes são abertos e os valores das licitações dos três sócios são registados numa tabela.
- Determina-se o valor global atribuído por cada sócio aos espaços e o valor que cada um considera justo pagar pelo aluguer, considerando-se que este valor é igual a um terço do valor global que ele atribuiu aos três espaços.
- Cada espaço é destinado ao sócio que mais o valoriza, e considera-se que o valor do aluguer é, provisoriamente, o valor monetário que o sócio atribuiu ao respetivo espaço.
- Se o valor que o sócio se propõe pagar pelo aluguer do espaço ultrapassar o que ele considera justo pagar, apura-se o excedente. Caso contrário, apura-se o défice.
- Após os procedimentos anteriores, o valor correspondente à diferença entre o valor total do excedente e o valor total do défice é descontado, em partes iguais, ao valor que cada sócio considera justo pagar, apurando-se assim o valor final a pagar por cada um dos três sócios pelo aluguer do espaço que lhe é destinado.

Na tabela seguinte, estão registados os valores, em euros, atribuídos por cada um dos sócios aos espaços E1, E2 e E3, nas licitações secretas.

Sócios \ Espaços	Espaços		
	E1	E2	E3
A	150	211	158
B	249	252	120
C	200	258	145

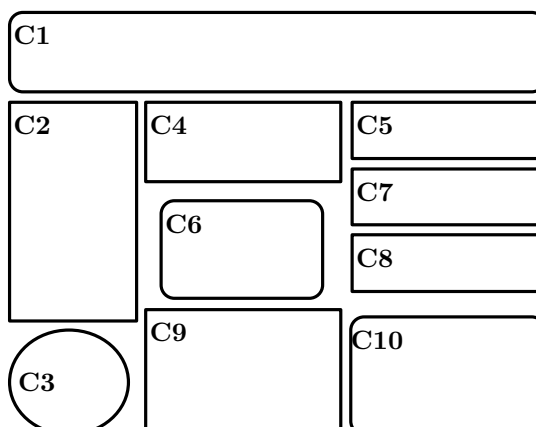
Determine o valor de aluguer que cada um dos sócios terá de pagar pelo espaço que lhe é destinado, de acordo com o método acima descrito.

Exame – 2019, 2.<sup>a</sup> Fase





9. Três amigos, a Laura (L), o Paulo (P) e a Rita (R), pretendem criar um blogue. A primeira página do blogue, composta por dez caixas, C1, C2, C3, C4, C5, C6, C7, C8, C9 e C10, terá um aspeto gráfico semelhante ao da figura seguinte.

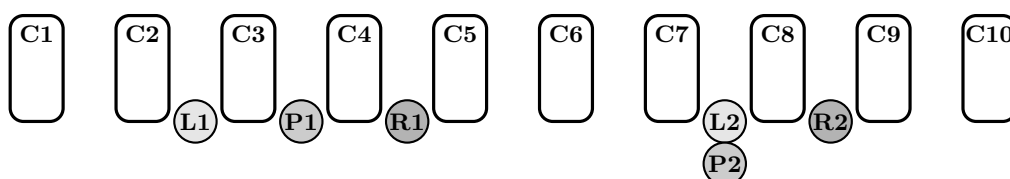


Cada amigo ficará responsável pelo conteúdo a apresentar num conjunto destas caixas.

Para as distribuir entre eles, decidiram utilizar o método a seguir descrito.

- Dispõem-se as caixas em linha, por ordem crescente de numeração.
- Cada amigo dispõe de dois marcadores para dividir, de forma justa e secreta, a linha de caixas em três segmentos. Os marcadores da Laura designam-se L1 e L2, os do Paulo designam-se P1 e P2, e os da Rita designam-se R1 e R2.
- Depois de se revelarem quais os marcadores de cada amigo, percorre-se a linha de caixas, partindo da caixa mais à esquerda, até se encontrar o primeiro marcador. O amigo que colocou esse marcador fica responsável por todas as caixas à esquerda do mesmo. Esse amigo já tem a sua parte.
- De seguida, percorre-se a linha de caixas, sempre da esquerda para a direita, até se encontrar o segundo marcador de um dos outros dois amigos. O amigo que colocou esse marcador fica responsável pelas caixas compreendidas entre os seus primeiro e segundo marcadores.
- O amigo que resta fica responsável por todas as caixas situadas à direita do seu segundo marcador.
- Se sobrarem caixas, estas serão atribuídas por sorteio.

Na figura seguinte, está representada a linha de caixas, já ordenadas, a distribuir pelos três amigos, com os respetivos marcadores colocados.



Distribua as caixas pelos amigos, aplicando o método anteriormente descrito, e indique, se for o caso, quais as caixas que serão sorteadas entre eles.

Exame – 2019, 1.ª Fase



10. O principal patrocinador da festa de comemoração dos 200 anos do município de Fonte Melo, que comercializa alfaías agrícolas, ofereceu ao município uma enfardadeira (E), um motocultivador (M) e um trator (T).

Para se proceder à distribuição destes bens pelas freguesias A, B e C, utiliza-se o método a seguir descrito.

- Cada presidente de junta de freguesia atribui, secretamente, um valor monetário a cada um dos três bens e coloca o registo dessas licitações dentro de um envelope fechado. Em seguida, os envelopes são abertos e os valores das licitações são registados numa tabela.
- Determina-se o valor global atribuído aos bens por cada presidente de junta e o valor que cada um considera justo receber. Assume-se que o valor que cada presidente de junta considera justo receber é igual a um terço do valor global que ele atribuiu aos três bens.
- Cada bem é destinado à freguesia cujo presidente mais o valoriza, considerando-se que a freguesia recebe o valor monetário que o seu presidente atribuiu ao respetivo bem.
- Caso, por aplicação do procedimento anterior, uma freguesia não receba qualquer bem, considera-se, para efeito dos cálculos seguintes, que o valor dos bens recebidos por essa freguesia é zero euros.
- Caso o valor dos bens recebidos por uma freguesia ultrapasse o valor que o seu presidente tinha considerado justo receber, a freguesia disponibiliza, em dinheiro, o respetivo excedente. Caso contrário, a freguesia recebe, em dinheiro, do montante à disposição, o valor em falta.
- Após os procedimentos anteriores, caso ainda reste dinheiro, este é distribuído em partes iguais pelas três juntas de freguesia.

Na tabela seguinte, estão registados os valores, em euros, atribuídos por cada presidente de junta, nas licitações secretas.

Presidente da Junta de Freguesia	Bem		
	E	M	T
A	224	2050	4950
B	182	2000	5003
C	226	1800	6005

De acordo com o método acima descrito, determine como serão distribuídos os bens por cada uma das freguesias e o valor monetário a pagar ou a receber, de forma a que nenhum dos presidentes de junta tenha razão para reclamar.

Exame – 2018, Ép. especial



11. Os guias Mary e Paul que acompanharam os alunos na visita de estudo receberam do grupo de alunos três presentes: um CD de fado (C), uma embalagem de doces regionais (D) e uma bandeira de Portugal (P).

Como não chegaram a acordo sobre a divisão dos três presentes, os guias resolveram aplicar o método a seguir descrito.

- Cada um dos guias atribui, secretamente, um certo número de pontos a cada um dos presentes, num total de 100 pontos.
- Cada presente é destinado, temporariamente, ao guia que mais o valoriza.
- Determina-se o total de pontos do(s) presente(s) temporariamente destinado(s) a cada um dos guias. Seja A o guia com o total de pontos mais elevado e B o outro guia.
- Procede-se ao ajuste da partilha, de modo a que os dois guias fiquem com número igual no total de pontos. O presente que tiver menor diferença de pontos atribuídos será utilizado para se proceder ao ajuste, sendo esse o presente a partilhar pelos guias.
- Representa-se o total final de pontos a atribuir ao guia A pela diferença entre o total temporário dos seus pontos e  $x$  por cento dos pontos por ele atribuído ao presente a partilhar.
- Representa-se o total final de pontos a atribuir ao guia B pela soma do total temporário dos seus pontos com  $x$  por cento dos pontos por ele atribuído ao presente a partilhar.
- Igualam-se os dois totais finais, de modo a determinar o valor de  $x$  com o qual a partilha ficará equilibrada.
- O guia B fica com o(s) presente(s) a si destinado(s) temporariamente e  $x$  por cento do presente a partilhar e o guia A fica com o restante.

Na tabela seguinte, apresenta-se o número de pontos atribuído aos três presentes por cada um dos guias.

	C	D	P
Mary	33	20	47
Paul	56	24	20

Proceda à partilha dos presentes, aplicando o método acima descrito.

Na sua resposta:

- apresente a partilha temporária dos presentes pelos guias;
- determine o total de pontos dos presentes temporariamente destinados a cada guia;
- selecione o presente a utilizar no ajuste da partilha;
- apresente a equação que traduz o equilíbrio da partilha e resolva-a;
- apresente a partilha final dos presentes.

Exame – 2018, 1.ª Fase



12. A direção da escola atribuiu um prémio a três projetos, o Jornal da Escola (J), o Clube da Ciência (C) e o Clube de Teatro (T). O prémio é constituído por um computador, uma impressora e uma máquina fotográfica.

Como os coordenadores dos projetos não chegaram a acordo quanto à divisão do prémio, a direção estabeleceu que o prémio seria partilhado utilizando o método seguinte.

- Cada um dos coordenadores dos projetos atribui, secretamente, um valor monetário a cada um dos bens, colocando o registo dos valores das suas licitações dentro de um envelope fechado. Em seguida, os envelopes são abertos e os valores das licitações dos três coordenadores são registados numa tabela.
- Determina-se o valor global atribuído aos bens por cada coordenador e o valor que cada um considera justo receber. Assume-se que o valor que cada coordenador considera justo receber é igual a um terço do valor global que ele atribuiu aos três bens.
- Cada bem é atribuído ao projeto coordenado por quem mais o valoriza, e considera-se que o projeto recebe o valor monetário que o seu coordenador atribui ao respetivo bem.
- Caso, por aplicação do procedimento anterior, um projeto não receba qualquer bem, considera-se, para efeito dos cálculos seguintes, que o «valor dos bens recebidos» por esse projeto é zero euros.
- Seguidamente, caso o valor dos bens recebidos por um projeto ultrapasse o valor que o seu coordenador considera justo receber, o coordenador paga em dinheiro, dos fundos do seu projeto, o respetivo excedente. Caso contrário, o projeto recebe, em dinheiro, do montante disponibilizado pelos coordenadores que pagaram, o valor em falta.
- Após os procedimentos anteriores, caso sobre dinheiro, este é distribuído em partes iguais pelos três projetos.

Na tabela seguinte, estão registados os valores, em euros, atribuídos por cada um dos coordenadores aos bens, nas licitações secretas.

Bens \ Projetos	Projetos		
	J	C	T
Computador	350	400	304
Impressora	400	380	168
Máquina Fotográfica	201	252	302

Como será distribuído o prémio pelos três projetos?

Na sua resposta, apresente os valores monetários a pagar ou a receber por cada coordenador.

Exame – 2017, 2.<sup>a</sup> Fase



13. O concurso Ganha Sempre é um dos programas com maior audiência do TPT.

Numa das suas emissões, a equipa vencedora, formada por Constança e Deodato, ganhou um carro, uma estada de 15 dias num hotel e uma *scooter*. Os dois decidiram negociar os prémios entre si, utilizando o método que a seguir se descreve.

- Cada elemento da equipa atribui, secretamente, pontos a cada um dos prémios, de modo que o total dos seus pontos atribuídos seja 100.
- Cada prémio é destinado, temporariamente, ao elemento da equipa que mais o valoriza.
- Determina-se o total de pontos dos prémios temporariamente destinados a cada elemento da equipa. Seja A o elemento da equipa com o total de pontos mais elevado e B o outro elemento da equipa.
- Procede-se ao ajuste da partilha, de modo que os elementos da equipa fiquem com igual total de pontos. O prémio que tiver menor diferença de pontos atribuídos é o usado para fazer o ajuste, sendo esse o prémio a partilhar pelos elementos da equipa.
- Representa-se o total final de pontos a atribuir ao elemento A pela diferença entre o total temporário dos seus pontos e  $x$  por cento do valor por ele atribuído ao prémio a partilhar.
- Representa-se o total final de pontos a atribuir ao elemento B pela soma do total temporário dos seus pontos com  $x$  por cento do valor por este atribuído ao prémio a partilhar.
- Igualam-se os dois totais finais, de modo a determinar o valor de  $x$  para o qual a partilha fica equilibrada.

A tabela seguinte apresenta os pontos atribuídos aos prémios por cada um dos elementos da equipa.

Prémios	Elementos da equipa	
	Constança	Deodato
Carro	30	50
Estada	60	35
<i>Scooter</i>	10	15

Proceda à partilha dos prémios, aplicando o método acima descrito. Na sua resposta:

- apresente a partilha temporária dos prémios pelos elementos da equipa;
- determine o total de pontos dos prémios temporariamente destinados a cada elemento da equipa;
- selecione o prémio a utilizar no ajuste da partilha;
- apresente a equação que traduz o equilíbrio da partilha e resolva-a;
- prove que, com a solução encontrada, ambos os elementos da equipa ficam com igual total de pontos;
- apresente a partilha final dos prémios.

Exame – 2016, Ép. especial



14. A companhia de aviação ASA5 opera nos aeroportos nacionais.

No avião que faz a viagem entre Lisboa e Faro, há seis tipos de lugares: *Ago*, *Behind*, *Extra-legroom*, *Normal*, *Up-front* e *XL*. Os bilhetes para esta viagem são vendidos, exclusivamente, por duas agências: a NETVOA e a VOARSEMPRE. As duas agências negociam entre si os tipos de lugares que cada uma pode vender.

Na negociação, usa-se o método seguinte.

- Cada agência distribui, confidencialmente, 100 pontos pelos diferentes tipos de lugares, de acordo com as suas preferências.
- Cada tipo de lugar é atribuído, temporariamente, à agência que mais o valoriza. Em caso de empate, o tipo de lugar é atribuído à agência que tiver menos pontos.
- Com esta distribuição temporária, somam-se os pontos de cada uma das agências. Se as duas agências tiverem o mesmo número de pontos, a distribuição temporária torna-se definitiva; se não, a agência que tiver mais pontos transfere um tipo de lugar, ou parte dos lugares desse tipo, para a outra agência, até ficarem ambas com o mesmo número de pontos. Para fazer a transferência, calculam-se os quocientes referentes aos tipos de lugares atribuídos à agência que ficou com mais pontos:

$$\frac{\text{número de pontos atribuídos ao tipo de lugar pela agência vencedora inicial}}{\text{número de pontos atribuídos ao tipo de lugar pela agência perdedora inicial}}$$

Os quocientes são alinhados pela ordem crescente da sua grandeza.

- Faz-se a transferência do tipo de lugar a que corresponde o menor quociente e somam-se, novamente, os pontos de cada uma das agências, de acordo com os pontos distribuídos confidencialmente. Caso esta transferência dê vantagem à agência que a recebe, terá de se efetuar a transferência de apenas uma percentagem dos lugares desse tipo, de modo a igualar o número de pontos.
- No final, obtêm-se os lugares de cada tipo que cada uma das agências pode vender.

A tabela seguinte apresenta os pontos atribuídos por cada agência aos diferentes tipos de lugares.

Agência \ Tipo de lugar	NETVOA	VOARSEMPRE
<i>Ago</i>	22	18
<i>Behind</i>	26	21
<i>Extra-legroom</i>	6	1
<i>Normal</i>	33	55
<i>Up-front</i>	8	1
XL	5	4

Determine, aplicando o método descrito, como serão distribuídos os tipos de lugares que cada agência pode vender.

Caso proceda a arredondamentos nos cálculos intermédios, conserve, no mínimo, duas casas decimais.

Exame – 2015, Ép. especial



15. Os dois sócios da PTM, David e Tomás, estão em conflito e pretendem partilhar os bens da empresa. Decidem negociá-los entre si, utilizando o método que a seguir se descreve.

- Cada sócio atribui, secretamente, pontos a cada um dos bens, de modo que o total dos seus pontos seja 100.
- Cada bem é destinado, temporariamente, ao sócio que mais o valoriza. Determina-se o total de pontos dos bens temporariamente destinados a cada sócio. Seja A o sócio com o total de pontos mais elevado e B o outro sócio.
- Procede-se ao ajuste da partilha, pois os sócios devem ficar com igual total de pontos. Será o bem que tiver menor diferença de pontos atribuídos o usado para fazer o ajuste, sendo esse o bem a partilhar pelos sócios.
- Representa-se o total final de pontos a atribuir ao sócio A pela diferença entre o total temporário dos seus pontos e  $x$  por cento do valor por ele atribuído ao bem a partilhar.
- Representa-se o total final de pontos a atribuir ao sócio B pela soma do total temporário dos seus pontos com  $x$  por cento do valor por este atribuído ao bem a partilhar.
- Igualam-se os dois totais finais de modo a determinar o valor de  $x$  para o qual a partilha fica equilibrada.

A tabela seguinte apresenta os pontos atribuídos por cada um dos sócios aos bens da empresa.

Sócios Bens	David	Tomás
Frota de motos	20	25
Frota de automóveis	45	25
Avião	35	50

Proceda à partilha dos bens, aplicando o método acima descrito. Na sua resposta:

- apresente a partilha temporária dos bens pelos sócios;
- determine o total de pontos dos bens temporariamente destinados a cada sócio;
- selecione o bem a utilizar no ajuste da partilha;
- apresente a equação que traduz o equilíbrio da partilha e resolva-a;
- prove que, com a solução encontrada (valor arredondado às centésimas), ambos os sócios ficam com igual total de pontos;
- apresente a partilha final dos bens.

Exame – 2015, 2.<sup>a</sup> Fase



16. Uma agência de viagens, sediada no concelho de Avelares, organiza e vende, através da Internet, percursos de autocarro entre várias cidades europeias.

No final do ano, o diretor da agência de viagens atribuiu um prémio a três dos funcionários, Alice, Bernardo e Camila, por terem atingido os objetivos estabelecidos pela empresa. O prémio é constituído por um computador, um *tablet* e uma viagem.

Para dividirem o prémio, de modo que nenhum dos funcionários tenha razão para reclamar, acordaram utilizar o método de licitação secreta a seguir descrito.

- Cada funcionário atribui, secretamente, um valor monetário a cada um dos três bens e coloca o registo dos valores das suas licitações dentro de um envelope fechado. Em seguida, os envelopes são abertos e os valores das licitações dos três funcionários são registados numa tabela.
- Determina-se o valor global atribuído aos bens por cada funcionário e o valor que cada um considera justo receber. Assume-se que o valor que cada funcionário considera justo receber é igual a um terço do valor global que ele atribuiu aos três bens.
- Cada bem é atribuído ao funcionário que mais o valoriza, considerando-se que ele recebe o valor monetário que atribuiu ao respetivo bem.
- Caso, por aplicação do procedimento anterior, um funcionário não receba qualquer bem, considera-se, para efeito dos cálculos seguintes, que o valor dos bens recebidos por esse funcionário é zero euros.
- Caso o valor dos bens recebidos por um funcionário ultrapasse o valor que este tinha considerado justo receber, o funcionário disponibiliza, em dinheiro, o respetivo excedente. Caso contrário, o funcionário recebe, em dinheiro, do montante à disposição, o valor em falta.
- Após os procedimentos anteriores, caso ainda sobre dinheiro este é distribuído em partes iguais pelos três funcionários.

Na tabela seguinte, estão registados os valores, em euros, atribuídos por cada funcionário aos bens, nas licitações secretas.

<b>Funcionários</b>	<b>Alice</b>	<b>Bernardo</b>	<b>Camila</b>
<b>Bens</b>			
Computador	600	950	750
<i>Tablet</i>	350	300	300
Viagem	850	1000	810

De acordo com o método acima descrito, determine como será distribuído o prémio por cada um dos funcionários e o valor monetário a pagar ou a receber, de forma que nenhum deles tenha razão para reclamar.

Exame – 2015, 1.<sup>a</sup> Fase





17. Em dezembro de 2012, no Grupo Desportivo de Pontes de Cima (GDP), realizaram-se eleições para a direção. O método aplicado para a conversão de votos em mandatos foi o método de Hondt.

Na tabela seguinte, estão indicados os números de votos, validamente expressos, obtidos pelas quatro listas concorrentes.

Os votos em branco ou nulos não foram considerados como votos validamente expressos.

Lista	A	B	C	D
Número de votos	1232	1035	613	555

Nessa eleição, foram atribuídos 8 mandatos, correspondentes aos lugares da direção.

O número de votos obtidos por cada uma das listas condiciona o acesso aos bens que são propriedade do GDP.

As listas vão fazer a partilha do acesso aos bens, e o método utilizado é o seguinte.

- Cada lista atribui um valor monetário a cada um dos bens, colocando o registo dos valores das suas licitações dentro de um envelope fechado. No final, são abertos os envelopes e são registados, numa tabela, os valores das licitações de todas as listas.
- Determina-se o valor global atribuído aos bens por cada lista e o valor que cada lista considera justo receber, designado por porção justa. A porção justa obtém-se, para cada lista, multiplicando-se a percentagem de votos, arredondada às unidades, que a lista obteve pela soma das licitações feitas por essa lista.
- Cada bem é atribuído à lista que mais o valoriza, e considera-se que ela recebe o valor que atribui a esse bem. Se uma lista não receber qualquer bem, considera-se, para efeitos de cálculo, que o «valor dos bens recebidos» por essa lista é zero.
- Se o valor dos bens recebidos por uma lista for superior ou for inferior à porção justa por si determinada, então essa lista terá de pagar ou de receber a diferença, respetivamente.
- Caso exista excesso, este obtém-se subtraindo-se ao total do valor a pagar o total do valor que as listas têm a receber.
- O excesso, caso exista, é distribuído na proporção direta da percentagem de votos, arredondada às unidades, da lista em causa.

Na tabela seguinte, estão registados os valores monetários, em euros, atribuídos, nas licitações secretas, por cada lista a cada um dos bens.

Lista	A	B	C	D
Automóvel	10 000	15 000	12 500	12 000
Computador	1500	500	2000	2500

Determine a partilha dos dois bens, e o valor a receber ou a pagar por cada lista, aplicando o método descrito, de forma que nenhuma lista tenha razão para reclamar.

Exame – 2013, 2.<sup>a</sup> Fase



18. O Manuel, o José e o Paulo compraram, em conjunto, um certo número de rifas. Do dinheiro despendido na compra, o Manuel participou com 40%, e o José e o Paulo participaram com 30% cada um.

Um dos bilhetes que compraram permitiu-lhes receber um prémio constituído por três bens: uma máquina fotográfica, um televisor e uma consola de jogos.

Os três jovens vão fazer a partilha do prémio, e o método utilizado é o seguinte.

- Primeira etapa: cada jovem atribui um valor monetário a cada um dos bens do prémio, colocando o registo dos valores das suas licitações dentro de um envelope fechado. No final, são abertos os envelopes e são registados, numa tabela, os valores das licitações de todos os jovens.
- Segunda etapa: determina-se o valor global atribuído, por cada jovem, ao prémio e o valor que cada jovem considera justo receber, designado por porção justa. A porção justa obtém-se, para cada jovem, através de uma proporção direta entre a percentagem de participação de cada jovem na compra das rifas e a soma das licitações atribuídas por esse jovem.
- Terceira etapa: cada bem é atribuído ao jovem que mais o valoriza, e considera-se que ele recebe o valor que atribui a esse bem. Se um jovem não receber qualquer bem, considera-se, para efeitos de cálculo, que o «valor dos bens recebidos» por esse jovem é zero.
- Quarta etapa: se o valor dos bens recebidos por um jovem for superior ou for inferior à porção justa por si determinada, então esse jovem terá de pagar ou de receber a diferença, respetivamente.
- Quinta etapa (só é aplicada quando existe dinheiro em excesso): o excesso obtém-se subtraindo ao total do valor a pagar o total do valor que os jovens têm a receber. Este excesso é distribuído na proporção direta da participação de cada jovem na compra das rifas.

Na tabela seguinte, estão registados os valores monetários atribuídos, nas licitações secretas, por cada jovem a cada um dos bens, o que corresponde à primeira etapa.

	Manuel	José	Paulo
<b>Máquina fotográfica</b>	€140	€120	€180
<b>Televisor</b>	€800	€700	€600
<b>Consola de jogos</b>	€580	€700	€500

Determine a partilha dos três bens, aplicando o método descrito, de forma a nenhum jovem ter razão para reclamar.

Na sua resposta, deve:

- calcular o valor global atribuído ao prémio por cada jovem;
- determinar a porção justa para cada jovem;
- atribuir os bens aos jovens;
- apurar o valor a pagar ou a receber por cada jovem;
- apurar o excesso, caso exista;
- dividir o excesso, caso exista, pelos jovens;
- indicar o bem e o valor final a receber, ou a pagar, por cada jovem.

Exame – 2011, 2.<sup>a</sup> Fase



19. A Ana, a Berta, a Carla e a Daniela são as quatro herdeiras dos bens do senhor Francisco. Elas vão efetuar a partilha da herança deixada pelo senhor Francisco, herança essa constituída por um automóvel, um terreno e uma casa.

O método usado para a partilha é o seguinte:

- Primeira etapa: cada herdeira atribui um valor monetário a cada um dos bens da herança, colocando o registo dos valores das suas licitações dentro de um envelope fechado. No final, são abertos os envelopes e registados, numa tabela, os valores das licitações de todas as herdeiras;
- Segunda etapa: determina-se o valor global atribuído, por cada herdeira, à herança e o valor que cada herdeira considera justo receber, designado por porção justa. A porção justa obtém-se, para cada herdeira, através do quociente entre a soma das licitações atribuídas por essa herdeira e o número de herdeiras;
- Terceira etapa: cada bem é atribuído à herdeira que mais o valoriza, e considera-se que ela recebe o valor que atribui ao respetivo bem. Se uma herdeira não receber qualquer bem, considera-se, para efeitos de cálculo, que o «valor dos bens recebidos» por essa herdeira é zero;
- Quarta etapa: se o valor dos bens recebidos por uma herdeira for superior ou for inferior à porção justa por si determinada, então essa herdeira terá de pagar ou de receber a diferença, respetivamente;
- Quinta etapa (só é aplicada quando existe dinheiro em excesso): o excesso obtém-se subtraindo, do total do valor a pagar, o total do valor que as herdeiras têm a receber. Este excesso é dividido em partes iguais pelas herdeiras.

Na tabela seguinte, encontram-se registados os valores monetários atribuídos, nas licitações secretas, por cada herdeira a cada um dos bens, o que corresponde à primeira etapa.

	<b>ANA</b>	<b>BERTA</b>	<b>CARLA</b>	<b>DANIELA</b>
Automóvel	€15 000	€18 000	€15 600	€16 500
Terreno	€33 000	€20 000	€27 000	€30 000
Casa	€117 000	€150 000	€120 000	€180 000

Determine a partilha dos três bens, aplicando o método descrito, de forma que nenhuma herdeira possa ter razão para reclamar.

Na sua resposta, deve:

- calcular o valor global atribuído à herança por cada herdeira;
- determinar a porção justa de cada herdeira;
- atribuir os bens às herdeiras;
- apurar o valor a pagar ou a receber por cada herdeira;
- apurar o excesso, caso exista;
- dividir o excesso, caso exista, pelas herdeiras;
- indicar o valor total a receber por cada herdeira.

Exame – 2010, 1.<sup>a</sup> Fase



20. O clube desportivo «O Duelo» oferece aos seus sócios cinco modalidades desportivas: Basquetebol, Futebol, Ténis, Golfe e Râguebi. Cada candidato a praticante pode escolher, de entre as cinco, a modalidade que pretende praticar, mas só pode inscrever-se numa delas.

No quadro seguinte, está registado o número total de praticantes inscritos, distribuídos por cada uma dessas modalidades desportivas.

	Modalidade desportiva					TOTAL
	Basquetebol	Futebol	Ténis	Golfe	Râguebi	
<b>N.º praticantes</b>	186	218	91	45	191	<b>731</b>

O clube desportivo «O Duelo» recebeu um subsídio da Câmara Municipal, no valor de €10 965.

A direção decidiu repartir esse dinheiro pelas várias modalidades desportivas, na proporção do respetivo número de praticantes.

Determine o valor, em euros, recebido por cada uma das modalidades.

Na sua resposta deve:

- escrever a fração a que cada modalidade desportiva teve direito;
- indicar a quantia, em euros, que foi atribuída a cada modalidade.

Exame – 2009, 2.ª Fase



21. O senhor Silvino deixou uma herança, a ser distribuída, equitativamente, pelos seus únicos herdeiros: os filhos Pedro, Rita e Sofia. A herança é constituída por um apartamento e um terreno.

Pelo valor sentimental que nutrem pelos bens, os irmãos não os querem colocar à venda. Assim, decidem distribuir os bens, utilizando o seguinte método:

- cada herdeiro atribui, secretamente, um valor a cada um dos bens;
- seguidamente, são divulgados esses valores (que se apresentam na tabela abaixo).

Bens	Herdeiros		
	Pedro	Rita	Sofia
Apartamento	€200 000	€210 000	€190 000
Terreno	€100 000	€90 000	€80 000

Tendo em conta os valores que cada herdeiro atribui a cada um dos bens, o método prossegue da seguinte forma:

- determina-se o valor global atribuído à herança por cada herdeiro e o valor da mesma que cada um considera justo receber ( $\frac{1}{n}$  do valor atribuído à herança pelo herdeiro, sendo  $n$  o número de herdeiros);
- cada bem é atribuído ao herdeiro que mais o valoriza, e considera-se que ele recebe o valor que atribui ao respetivo bem;
- caso, por aplicação do procedimento anterior, um herdeiro não receba qualquer bem, considera-se, para efeito dos cálculos seguintes, que «valor dos bens recebidos» por esse herdeiro é zero euros;
- seguidamente, caso o valor dos bens recebidos por um herdeiro:
  - ultrapasse o valor da parte que este considera justo receber, o herdeiro disponibiliza, em dinheiro, o respetivo excedente;
  - não atinja o valor da parte que este considera justo receber, o herdeiro recebe, em dinheiro, do montante à disposição, o valor em falta;
- após este procedimento, caso sobre dinheiro, este é distribuído em partes iguais por todos os herdeiros.

De acordo com o método acima descrito:

21.1. Indique quanto vale a herança para cada um dos herdeiros, bem como o valor que cada um deles considera justo receber.



21.2. Num pequeno texto, indique, justificando, se algum dos herdeiros pode ter razão para reclamar do resultado final da divisão, face ao que considerava justo receber.

O texto deve, obrigatoriamente, contemplar os pontos que a seguir se indicam:

- o valor da herança que cada herdeiro efetivamente recebeu;
- a comparação entre o valor da herança que cada um dos herdeiros considerava justo receber e o que efetivamente recebeu;
- a conclusão quanto à razão para algum herdeiro reclamar, ou não, do resultado final da divisão.

Comece por calcular como ficou distribuída a herança pelos três irmãos, determinando:

- a quem foi atribuído cada um dos bens;
- o valor, em dinheiro, que cada um dos herdeiros recebeu ou pagou, após a atribuição dos bens;
- o valor, em dinheiro, que cada um dos herdeiros efetivamente recebeu ou pagou, no final de todo o processo.

Na resposta a este item, quando for necessário proceder a arredondamentos, utilize duas casas decimais.

Caso não tenha respondido à questão anterior, e somente neste caso, considere que o valor da herança que o Pedro, a Rita e a Sofia consideram justo receber é de €100 000, €99 000 e €91 000, respetivamente.

Exame – 2008, 1.ª Fase

