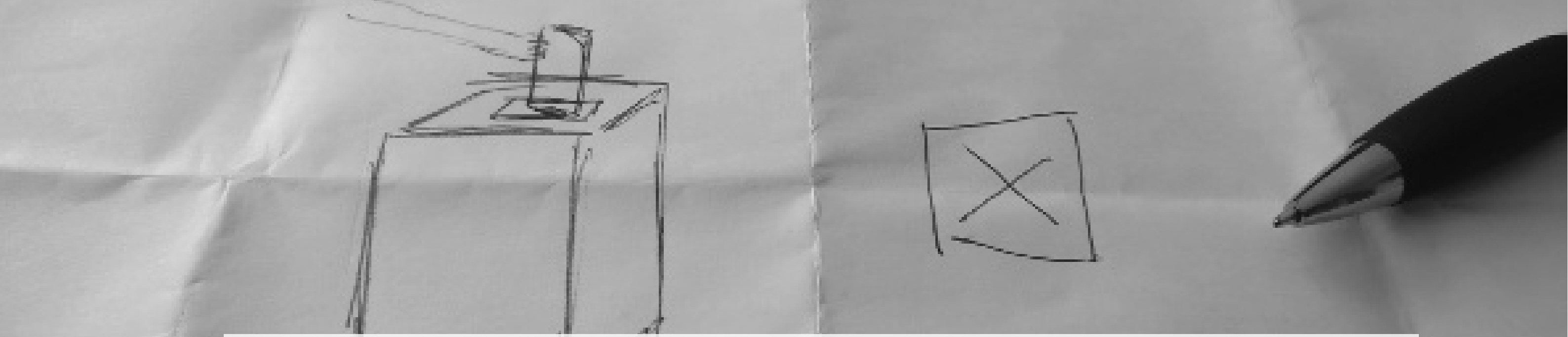


M.A.C.S. (10.º ano)

Teoria de eleições

Exercícios de Provas Nacionais - Propostas de resolução

1. Efetuando a soma dos atribuídos a cada local, temos:

	Cabo Girão	Pico do Areeiro	Porto Moniz	Santana
Soma	$2+4+1+3=10$	$1+5+4+1=11$	$3+1+3+4=11$	$4+0+2+2=10$

Como no total existem 40 pontos, nenhum dos locais obteve os 21 pontos necessários para atingir a maioria absoluta. Verifica-se ainda que Santana foi o local menos pontuado, pelo que deve ser eliminado da tabela.

Assim, criando a nova tabela, de acordo com o método descrito, e obtendo a soma das pontuações decorrente desta tabela, temos:

	Cabo Girão	Pico do Areeiro	Porto Moniz
António	2	1	$3+4=7$
Camila	4	$5+0=5$	1
Dora	1	$4+2=6$	3
Francisco	3	1	$4+2=6$
Soma	10	13	17

Continua a verificar-se que nenhum dos locais obteve os 21 pontos necessários para atingir a maioria absoluta. Verifica-se ainda que o Cabo Girão foi agora o local menos pontuado, pelo que também deve ser eliminado da tabela.

Assim, criando ainda outra tabela, e obtendo as somas, de acordo com o método descrito, temos:

	Pico do Areeiro	Porto Moniz
António	1	$7+2=9$
Camila	$5+4=9$	1
Dora	$6+1=7$	3
Francisco	1	$6+3=9$
Soma	18	22

Assim, como Porto Moniz obteve a maioria absoluta dos pontos (mais de 21), este será o primeiro local a visitar pela família Antunes.

Exame – 2024, Ép. especial

2. Aplicando o método descrito, sem contemplar o voto da Daniela, ou seja, apenas com os dados da tabela, temos:

   - Pontuação do Artur: $3 \times 5 + 2 \times 3 + 3 \times 1 + 1 \times 5 = 15 + 6 + 3 + 5 = 29$
   - Pontuação do Bruno: $3 \times 3 + 2 \times 1 + 3 \times 5 + 1 \times 1 = 9 + 2 + 15 + 1 = 27$
   - Pontuação do César: $3 \times 1 + 2 \times 5 + 3 \times 3 + 1 \times 3 = 3 + 10 + 9 + 3 = 25$

   Como existem seis possibilidades de ordenação do voto da Daniela, podemos verificar qual delas verifica as constatações que se apuraram:

Ordenação	Total **A**	Total **B**	Total **C**	Análise e justificação
A>B>C	$29 + 5 = 34$	$27 + 3 = 30$	$25 + 1 = 26$	Impossível, porque o César não ficaria em segundo lugar.
A>C>B	$29 + 5 = 34$	$27 + 1 = 28$	$25 + 3 = 28$	Impossível, porque haveriam candidatos com o mesmo número de pontos.
B>A>C	$29 + 3 = 32$	$27 + 5 = 32$	$25 + 1 = 26$	Impossível, porque haveriam candidatos com o mesmo número de pontos.
B>C>A	$29 + 1 = 30$	$27 + 5 = 32$	$25 + 3 = 28$	Impossível, porque o candidato escolhido não seria o Artur.
C>A>B	$29 + 3 = 32$	$27 + 1 = 28$	$25 + 5 = 30$	Todas as constatações se verificam.
C>B>A	$29 + 1 = 30$	$27 + 3 = 30$	$25 + 5 = 30$	Impossível, porque haveriam candidatos com o mesmo número de pontos.

   Assim, vem que:

   Antes de contabilizar o voto da Daniela, o candidato que estava em primeiro lugar tinha **29** pontos, e o candidato **B** estava em segundo lugar.
   Depois de contabilizados os 10 votos, o candidato vencedor obteve **32** pontos.
   Na lista de preferências da Daniela, o candidato **C** estava na primeira preferência.

   Logo, as correspondências corretas são:

   - **I $\rightarrow$ b)**
   - **II $\rightarrow$ b)**
   - **III $\rightarrow$ a)**
   - **IV $\rightarrow$ c)**

3. Aplicando o método descrito para a escolha do castelo, temos:

- Pontuação do castelo de Abrantes: $0+3+5+3=11$ pontos
- Pontuação do castelo de Lamego: $5+1+3+1=10$ pontos
- Pontuação do castelo de Montemor-o-Novo: $2+4+0+2=8$ pontos
- Pontuação do castelo de Viana do Alentejo: $3+2+2+4=11$ pontos

Como foram considerados $4\times 10=40$ pontos no total, a maioria absoluta do total de pontos corresponde a $\frac{40}{2}+1=20+1=21$, pelo que é possível observar que nenhum dos castelos registou esta soma (ou um valor superior) no total dos pontos.
Assim, criando uma nova a tabela de acordo com o método descrito, ou seja, eliminando a coluna relativa ao castelo de Montemor-o-Novo, temos:

	A	**L**	**V**
Carlos	0	$5+2=7$	3
Diana	$3+4=7$	1	2
Fausto	$5+0=5$	3	2
Matilde	3	1	$4+2=6$

Aplicando procedimento anterior para a escolha do castelo à nova tabela, temos:

- Pontuação do castelo de Abrantes: $0+7+5+3=15$ pontos
- Pontuação do castelo de Lamego: $7+1+3+1=12$ pontos
- Pontuação do castelo de Viana do Alentejo: $3+2+2+6=13$ pontos

Como o total de pontos é 40, é possível observar que nenhum dos castelos voltou a registar maioria absoluta (21 ou mais pontos).
Assim, criando uma nova a tabela em que se elimina a coluna relativa ao castelo de Lamego, temos:

	A	**V**
Carlos	0	$3+7=10$
Diana	$7+1=8$	2
Fausto	$5+3=8$	2
Matilde	3	$6+1=7$

Aplicando procedimento para a escolha do castelo a esta tabela, temos:

- Pontuação do castelo de Abrantes: $0+8+8+3=19$ pontos
- Pontuação do castelo de Viana do Alentejo: $10+2+2+7=21$ pontos

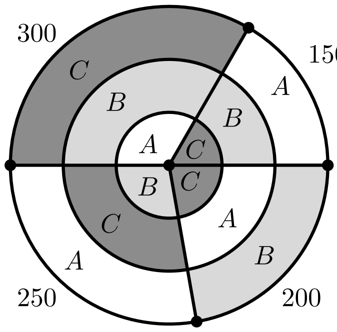
Como o total de pontos é 40, o castelo selecionado é o Viana por ter maioria absoluta (21 pontos).
E assim podemos afirmar que pela aplicação do método descrito, o primeiro castelo eliminado foi o de Montemor-o-novo, e o segundo foi o Lamego. De entre os restantes castelos, aquele que será visitado será o Viana do Alentejo, tendo o outro (o de Abrantes) totalizado 19 pontos.

Logo, as correspondências corretas são:

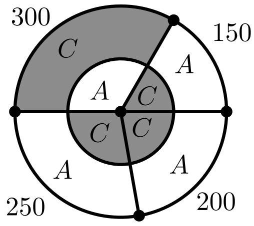
- **I $\rightarrow$ b)**
- **II $\rightarrow$ a)**
- **III $\rightarrow$ c)**
- **IV $\rightarrow$ b)**

4. Aplicando o método descrito, temos:

- Número de votos necessário para obter maioria absoluta: $\dfrac{900}{2} + 1 = 451$;
- observando o número de votos em cada empregado, como primeira preferência, verifica-se que nenhum deles obtém a maioria absoluta (o empregado mais votado foi a Ana com 300 votos);
- o empregado com menor número de votos foi a Diana com 150 votos;
- reestruturando o diagrama, eliminando a Diana, podemos verificar que:
  - observando o número de votos em cada empregado, como primeira preferência, verifica-se que nenhum deles obtém a maioria absoluta (o empregado mais votado foi o Carlos com $150 + 200 = 350$ votos);
  - o empregado com menor número de votos foi a Bernardo com 200 votos;



- reestruturando novamente o diagrama, eliminando o Bernardo, podemos verificar que o Carlos obtém a maioria absoluta com $150 + 250 + 200 = 600$ votos;



Logo, as correspondências corretas são:

- **I → a)**
- **II → c)**
- **III → b)**
- **IV → b)**

Exame – 2023, 2.ª Fase

5. De acordo com o método descrito, temos que a pontuação total do jogador P, é:

$$4 \times 200 + 3 \times 400 + 2 \times 600 = 3200$$

Como o jogador Q obteve um total de 1400 pontos, e sabemos que não ficou na 4.ª preferência da lista 1 (porque essa preferência foi dada ao jogador S), então ficou na 4.ª preferência das listas 2 e 3, e na 3.ª preferência da lista 1, porque é a única forma de somar apenas 1400 pontos:

$$2 \times 200 + 1 \times 400 + 1 \times 600 = 1400$$

Relativamente à pontuação do jogador S, sabemos que não ficou na primeira preferência da lista e, porque assim teria mais pontos que o jogador S: ($1 \times 200 + 2 \times 400 + 4 \times 600 = 3400$), e como também não ficou na 4.ª preferência (jogador Q) nem na 3.ª (jogador S), então a sua preferência é a 2.ª.

Assim o jogador R deve ocupar a 1.ª preferência da lista 3, por ser o único jogador e a única preferência ainda não determinados. Desta forma a ordenação dos jogadores na lista 3, é:

	1.ª Preferência	**2.ª Preferência**	**3.ª Preferência**	**4.ª Preferência**
Jogador	R	S	P	Q

Exame – 2022, Ép. especial

6. Da observação do diagrama podemos preencher a totalidade da tabela apresentada:

Votos / **Preferência**	3	4	4	6	6	7
1.ª	A	A	B	B	C	C
2.ª	B	C	A	C	B	A
3.ª	C	B	C	A	A	B

Aplicando o método descrito para determinar qual dos candidatos foi eleito como novo diretor do parque de campismo, começando por comparar as votações dos candidatos A e C, temos:

	N.º de votos	N.º de votos	Vencedor
Candidatos A e C	Candidato A $3+4+4=11$	Candidato C $6+6+7=19$	Candidato C
Candidatos C e B	Candidato C $4+6+7=17$	Candidato C $3+4+6=13$	Candidato C

Como o Carlos (candidato C) venceu em todas as comparações com os restantes, foi eleito como novo diretor do parque de campismo.

Exame – 2022, 2.ª Fase

7. Aplicando o método descrito para obter a composição da atual direção, temos:
   - Pontuação da Alice (4 pontos na competência C, 3 pontos na competência N, 3 pontos na competência T, 5 pontos na competência I e 4 pontos na competência P):
   $$4 \times 5 + 3 \times 4 + 3 \times 3 + 5 \times 2 + 4 \times 1 = 55$$
   - Pontuação do Bruno (4 pontos na competência C, 2 pontos na competência N, 3 pontos na competência T, 2 pontos na competência I e 2 pontos na competência P):
   $$4 \times 5 + 2 \times 4 + 3 \times 3 + 3 \times 2 + 3 \times 1 = 46$$
   - Pontuação da Carlota (3 pontos na competência C, 5 pontos na competência N, 5 pontos na competência T, 3 pontos na competência I e 4 pontos na competência P):
   $$3 \times 5 + 5 \times 4 + 5 \times 3 + 3 \times 2 + 4 \times 1 = 60$$
   - Pontuação do Delfim (5 pontos na competência C, 3 pontos na competência N, 3 pontos na competência T, 3 pontos na competência I e 3 pontos na competência P):
   $$5 \times 5 + 3 \times 4 + 3 \times 3 + 3 \times 2 + 3 \times 1 = 55$$

   Assim, na ordenação dos candidatos por ordem decrescente de pontuação, temos que a candidata com maior pontuação é a Carlota, pelo que será a primeira candidata admitida, mas como foram selecionados dois candidatos, e a Alice e o Delfim ficaram empatados com a segunda maior pontuação, foi necessário recorrer a uma entrevista a estes dois candidatos para selecionar o segundo candidato admitido.

   Exame – 2022, 1.ª Fase

8. Aplicando o método descrito para obter a composição da atual direção, temos:
   - Pontuação do António (124 votos na 1.ª preferência, 90 votos na 1.ª preferência e 160 votos na 3.ª preferência):
   $$125 \times 5 + 90 \times 3 + 160 \times 1 = 1055$$
   - Pontuação do Bernardo (160 votos na 1.ª preferência, 125 votos na 1.ª preferência e 90 votos na 3.ª preferência):
   $$160 \times 5 + 125 \times 3 + 90 \times 1 = 1265$$
   - Pontuação da Carla (90 votos na 1.ª preferência, 160 votos na 2.ª preferência e 125 votos na 3.ª preferência):
   $$90 \times 5 + 160 \times 3 + 125 \times 1 = 1055$$

   Como não existem candidatos empatados, os seus lugares na direção são decididos utilizando a idade como critério de desempate, e como a Carla é mais velha que o António, será ela a assumir o cargo de maior importância.

   Assim, a composição da direção da rádio OnOfff, é:
   - Diretor: Bernardo (1265 votos)
   - Vice-diretor: Carla (1055 votos - 29 anos)
   - Adjunto da direção: António (1055 votos - 27 anos)

   Exame – 2021, Ép. especial

9. Temos que:
   - O número total de votos que não eram válidos foi 96, correspondentes a 25% dos eleitores que votaram (porque 75% foram considerados válidos), pelo que o número votantes (NV), é:

$$\frac{NV}{96} = \frac{100}{25} \Leftrightarrow NV = \frac{96 \times 100}{25} \Leftrightarrow NV = 384$$

   - Como existiam 480 e votaram 384, o número de eleitores inscritos que não votou foi $480 - 384 = 96$, pelo que a taxa de abstenção (TA) corresponde à percentagem a que corresponde 96 eleitores que não votaram no total 480 eleitores inscritos, ou seja:

$$\frac{TA}{100} = \frac{96}{480} \Leftrightarrow TA = \frac{100 \times 96}{480} \Leftrightarrow TA = 20$$

Resposta: **Opção D**

Exame – 2021, Ép. especial

10. Como Barcelona foi a cidade vencedora, começamos por aplicar o método, escolhendo todos os pares que envolvem esta cidade:

N.º de votos / Pares	36	58	X	29	Totais
Barcelona e Cracóvia	B	B	C	C	Barcelona: $36 + 58 = 94$ Cracóvia: $X + 29$
Barcelona e Praga	B	P	B	P	Barcelona: $36 + X$ Praga: $58 + 29 = 87$
Barcelona e Roma	B	R	B	B	Barcelona: $36 + X + 29 = X + 65$ Roma: 58

Assim, como sabemos que Barcelona teve mais votos que qualquer uma das restantes cidades, podemos verificar que:

- $X + 29 < 94 \Leftrightarrow X < 94 - 29 \Leftrightarrow X < 65$
- $36 + X + > 87 \Leftrightarrow X > 87 - 36 \Leftrightarrow X > 51$
- $X + 65 > 58 \Leftrightarrow X > 58 - 65 \Leftrightarrow X > -7$

Como X é um número natural, Barcelona tem mais votos que Roma independentemente do valor de X, para que Barcelona tenha mais votos que Praga, X deve ser superior a 51, ou seja deve ser no mínimo 52, e para que Barcelona tenha mais votos que Cracóvia, X deve ser inferior a 65, ou seja, deve ser 64 no máximo, pelo que, X representa no mínimo 52 e no máximo 64.

Exame – 2021, 2.ª Fase

11. Temos que:
    - O número total de votos validamente expressos foi 7200, correspondentes a 96% dos votos apurados, pelo que o número de votos apurados (VA), é:

    $$\frac{VA}{7200} = \frac{100}{96} \Leftrightarrow VA = \frac{7200 \times 100}{96} \Leftrightarrow VA = 7500$$

    - Como a abstenção foi de 20%, o número de votos apurados (VA), corresponde a $100 - 20 = 80\%$ do número de acionistas da empresa que poderiam ter votado (NA), ou seja:

    $$\frac{NA}{7500} = \frac{100}{80} \Leftrightarrow NA = \frac{7500 \times 100}{80} \Leftrightarrow VA = 9375$$

    Resposta: **Opção C**

Exame – 2021, 1.ª Fase

12. Aplicando o método descrito, temos:
    - Número de votos necessário para obter maioria absoluta: 12 (porque $\frac{23}{2} = 11{,}5$)
    - Observando o número de votos em cada cidade, como primeira preferência, verifica-se que nenhuma delas obtém a maioria absoluta (a cidade mais votada foi Veneza com 8 votos)
    - Reestruturando novamente a tabela, de acordo com o método descrito, ou seja, eliminando a cidade que obteve o menor número de votos, como primeira preferência - Milão - temos:

Preferências \ Votos	8	7	5	3
1ª	Veneza	Florença	Milão	Veneza
2ª	Florença	Milão	Florença	Milão
3ª	Milão	Veneza	Veneza	Florença

    - Observando o número de votos em cada cidade, como primeira preferência na tabela reestruturada, verifica-se que nenhuma delas obtém a maioria absoluta novamente (a cidade mais votada é, de novo, Veneza com $8 + 3 = 11$ votos)
    - Reestruturando a tabela, de acordo com o método descrito, ou seja, eliminando a cidade que obteve o menor número de votos, como primeira preferência - Milão - temos:

Preferências \ Votos	8	7	5	3
1ª	Veneza	Florença	Florença	Veneza
2ª	Florença	Veneza	Veneza	Florença

    E assim, a cidade selecionada pelos amigos para visitar depois de Roma, ou seja a cidade com maioria absoluta de votos ($7 + 5 = 12$, ou seja, mais que 11,5), é Florença.

Exame – 2020, 2.ª Fase

13. Aplicando o método descrito antes de ser contabilizado o voto do Filipe, temos:
    - Pontuação do festival A (4 votos na 1.ª preferência e 5 votos na 3.ª preferência):

    $$4 \times 5 + 5 \times 1 = 20 + 5 = 25$$

    - Pontuação do festival B (3 votos na 1.ª preferência, 4 votos na 2.ª preferência e 2 votos na 3.ª preferência):

    $$3 \times 5 + 4 \times 3 + 2 \times 1 = 15 + 12 + 2 = 29$$

    - Pontuação do festival C (2 votos na 1.ª preferência, 5 votos na 2.ª preferência e 2 votos na 3.ª preferência:

    $$2 \times 5 + 5 \times 3 + 2 \times 1 = 10 + 15 + 2 = 27$$

    Como após a contabilização do votos do Filipe o festival C ficou em último lugar, e não se verificaram empates, o voto do Filipe colocou o festival C na 3.ª preferência, porque se fosse a 2.ª ou a 1.ª, mesmo com 5 pontos o festival A não iria obter um número de pontos superior).

    Relativamente à 1.ª preferência, o Filipe escolheu o festival A (porque se fosse a 2.ª alternativa iria totalizar o mesmo número de pontos do festival C, e é sabido que não se registou qualquer empate).

    Desta forma, o voto do Filipe indicou na 1.ª preferência o festival A, na 2.ª o festival B e na 3.ª o festival C.

    E assim, a pontuação de cada filme, após a contabilização do voto do Filipe, é:
    - Festival A: $25 + 5 = 30$
    - Festival B: $29 + 3 = 32$
    - Festival C: $27 + 1 = 28$

Exame – 2020, 1.ª Fase

14. De acordo com os estatutos do Clube, calculamos o número de votos que Ricardo obteve:

	Titular		**Efetivo**	
Anos como Sócio	Sócios	Votos	Sócios	Votos
[1,5[	4	$4 \times 2 = 8$	1	$1 \times 1 = 1$
[5,10[	6	$6 \times 3 = 18$	2	$2 \times 1 = 2$
[10,15[	30	$30 \times 4 = 120$	11	$11 \times 2 = 22$
[15,20[	12	$12 \times 5 = 60$	3	$3 \times 2 = 6$
Total	52	206	17	31
Total de sócios	$52 + 17 = 69$			
Total de votos	$206 + 31 = 237$			

Assim, a afirmação apresentada é verdadeira, porque o número de sócios que votaram no Ricardo (69) é menor do que o número de sócios que votaram na Teresa (71), mas o Ricardo venceu as eleições porque obteve mais votos (237) que a Teresa (210).

Exame – 2019, 2.ª Fase

15.

15.1. Como a escolha do país a visitar é feita considerando apenas a primeira preferência, temos que as votações foram:

- Bélgica: $X + 7$ votos
- Croácia: 15 votos
- Dinamarca: 12 votos

Como o segundo país mais votado para a visita de estudo era a Bélgica, temos que a votação da Bélgica deve ser maior que a da Dinamarca (12) e menor que a da Croácia (15). Assim, de entre as opções apresentadas, o único valor possível para o valor de X é 7, porque a soma correspondente, $7 + 7 = 14$, está compreendida entre 12 e 15 (e os restantes valores resultam numa soma superior a 15 ou inferior a 12).

Resposta: **Opção B**

15.2. Considerando que $X = 9$, e aplicando o método descrito, temos:

- Total de votos: $9 + 15 + 12 + 7 = 43$
- Número de votos necessário para obter maioria absoluta: 22 (porque $\frac{43}{2} = 21{,}5$)
- Fazendo a contagem do número de votos em cada país, como primeira preferência, verifica-se que nenhum deles obtém a maioria absoluta:
  - Bélgica: $9 + 7 = 16$
  - Croácia: 15
  - Dinamarca: 12
- Reestruturando a tabela, de acordo com o método descrito, ou seja, eliminando o país que obteve o menor número de votos, como primeira preferência - a Dinamarca - temos:

Nº. de votos / Preferência	9	15	12	7
1ª	Bélgica	Croácia	Croácia	Bélgica
2ª	Croácia	Bélgica	Bélgica	Croácia

E assim, o país escolhido pelos alunos, ou seja o país com maioria absoluta de votos ($15 + 12 = 27$, ou seja, mais que 22), como primeira preferência é a Croácia.

Exame – 2018, 1.ª Fase

16. Aplicando o método descrito aos 600 votos registados na tabela, temos:

- Pontuação do filme A (195 votos na 1.ª preferência, 180 votos na 3.ª preferência e 225 votos na 4.ª preferência:
$$4 \times 195 + 2 \times 180 + 1 \times 225 = 1365$$
- Pontuação do filme B (180 votos na 2.ª preferência e $225 + 195 = 420$ votos na 3.ª preferência:
$$3 \times 180 + 2 \times 420 = 1380$$
- Pontuação do filme C (180 votos na 1.ª preferência, 225 votos na 2.ª preferência e 195 votos na 4.ª preferência:
$$4 \times 180 + 3 \times 225 + 1 \times 195 = 1590$$
- Pontuação do filme D (225 votos na 1.ª preferência, 195 votos na 2.ª preferência e 195 votos na 4.ª preferência:
$$4 \times 225 + 1 \times 180 + 3 \times 195 = 1665$$

Como após a contabilização dos 750 votos, os filmes A e D tiveram a mesma pontuação e a diferença de pontos, após a contabilização dos 600 votos, é de:

$$1665 - 1365 = 300$$

Então podemos concluir que o filme A foi classificado pelos 150 votantes em falta 2 preferências acima do filme D (porque $2 \times 150 = 300$), ou seja o filme A foi classificado na 1.ª preferência e o filme D na 3.ª, ou então o filme A foi classificado na 2.ª preferência e o filme D na 4.ª.

Por outro lado como o filme B obteve a maior pontuação, e a diferença de pontos para o filme A, após a contabilização dos 600 votos, é de:
$$1380 - 1365 = 15$$

Se o filme A fosse classificado na 1.ª preferência para os 150 votantes em falta, seria o filme com maior pontuação, pelo que podemos concluir que o filme B foi o classificado na 1.ª preferência para os 150 votantes em falta.

Desta forma, temos que a ordenação dos 150 votantes em falta foi:

Filme	A	B	C	D
Preferência	2.ª	1.ª	3.ª	4.ª

E desta forma, aplicando o método descrito aos 750 votos, ou seja às pontuações calculadas anteriormente somamos a pontuação decorrente dos 150 votos falta, e assim, temos:

- Pontuação do filme A: $1365 + 3 \times 150 = 1815$
- Pontuação do filme B: $1380 + 4 \times 150 = 1980$
- Pontuação do filme C: $1590 + 2 \times 150 = 1890$
- Pontuação do filme D: $1665 + 1 \times 150 = 1815$

Exame – 2017, Ép. especial

17. Temos que:
    - O número total de votos validamente expressos é: $373 + 602 + 318 + 157 = 1450$
    - O número total de votos necessários para obter a maioria absoluta é: $\frac{1450}{2} + 1 = 726$

    Assim podemos verificar que a lista X, em coligação com qualquer outra lista obteria a maioria absoluta. Desta forma a coligação X com Z obteria uma votação de $602 + 157 = 759$, e portanto mais do que os 726 votos necessários para a maioria absoluta.

    Resposta: **Opção B**

Exame – 2017, 2.ª Fase

18. Aplicando o método descrito para determinar qual foi a ementa vencedora, começando por selecionar as ementas A e B, temos:

	N.º de votos	N.º de votos	Vencedor
Ementas A e B	Ementa A 309	Ementa B $602 + 727 = 1329$	Ementa B
Ementas B e C	Ementa B $309 + 727 = 1036$	Ementa C 602	Ementa B
Ementas B e D	Ementa B $602 + 309 = 911$	Ementa D 726	Ementa B

Como a ementa B venceu em todas as comparações com as restantes é a ementa vencedora.

Exame – 2017, 1.ª Fase

19. Aplicando o primeiro método para o apuramento do vencedor, temos:

	N°. de votos	**615**	**300**	**435**	**150**	Total de votos	Vencedor
Par V-A	1.ª preferência	A	V	V	V	V: $300 + 435 + 150 = 885$	V
	2.ª preferência	V	A	A	A	A: 615	
Par V-P	1.ª preferência	P	V	V	V	V: $300 + 435 + 150 = 885$	V
	2.ª preferência	V	P	P	P	P: 615	
Par V-R	1.ª preferência	V	V	R	R	V: $615 + 300 = 915$	V
	2.ª preferência	R	R	V	V	R: $435 + 150 = 585$	

Como o ator V (Vasco Silva) venceu na comparação com todos os restantes é o ator vencedor.

Aplicando o primeiro método para o apuramento do vencedor, temos:

- Pontuação do ator A: $3 \times 615 + 2 \times 300 + 2 \times 435 + 1 \times 150 = 3465$
- Pontuação do ator P: $4 \times 615 + 1 \times 300 + 1 \times 435 + 2 \times 150 = 3495$
- Pontuação do ator R: $1 \times 615 + 3 \times 300 + 4 \times 435 + 4 \times 150 = 3855$
- Pontuação do ator V: $2 \times 615 + 4 \times 300 + 3 \times 435 + 3 \times 150 = 4185$

Como o ator V (Vasco Silva) é o que tem maior número de pontos, também é o vencedor decorrente da aplicação deste método.

Exame – 2016, Ép. especial

20. Temos que o número total de votos necessários para obter a maioria absoluta é 24, porque $\frac{47}{2} = 23{,}5$

Aplicando o método descrito, temos que o número de primeiras preferências de cada candidato é:

- Candidato E: 7 votos
- Candidato F: $11 + 6 = 17$ votos
- Candidato G: 14 votos
- Candidato H: 9 votos

Como nenhum dos candidatos obteve a maioria absoluta, e o candidato menos votado é o candidato E, a tabela reestruturada é a seguinte:

Nº. de votos / **Preferência**	**11**	**14**	**7**	**6**	**9**
1ª	F	G	H	F	H
2ª	G	H	F	H	G
3ª	H	F	G	G	F

Voltando a calcular o número de primeiras preferências de cada candidato, temos:

- Candidato F: $11 + 6 = 17$ votos
- Candidato G: 14 votos
- Candidato H: $7 + 9 = 16$ votos

Como nenhum dos candidatos obteve a maioria absoluta, e o candidato menos votado é o candidato G, a tabela reestruturada é a seguinte:

Nº. de votos / **Preferência**	**11**	**14**	**7**	**6**	**9**
1ª	F	H	H	F	H
2ª	H	F	F	H	F

Voltando a calcular o número de primeiras preferências de cada candidato, temos:

- Candidato F: $11 + 6 = 17$ votos
- Candidato H: $14 + 7 + 9 = 30$ votos

Como o candidato H (Henrique) tem a maioria absoluta das primeiras preferências é o candidato eleito para ser o porta-estandarte.

Analisando a primeira contagem de votos na primeira preferência, podemos verificar que o candidato declarado vencedor, por aplicação do método descrito (H), não foi o que teve maior número de votos na primeira preferência (F).

Exame – 2016, 2.ª Fase

21. Aplicando o método descrito para os 900 votos conhecidos, temos:

- Pontuação da banda A: $4 \times 200 + 3 \times 400 + 1 \times 300 = 2300$
- Pontuação da banda B: $3 \times 200 + 4 \times 400 + 2 \times 300 = 2800$
- Pontuação da banda C: $2 \times 200 + 2 \times 400 + 4 \times 300 = 2400$
- Pontuação da banda D: $1 \times 200 + 1 \times 400 + 3 \times 300 = 1500$

Desta forma temos que a banda C não poderá atuar em primeiro lugar porque, mesmo na eventualidade dos 100 votos em falta escolherem a lista C na 1.ª preferência e a lista B na 4.ª preferência, a lista B obteria a maioria dos votos:

- Pontuação da banda B: $2800 + 1 \times 100 = 2900$
- Pontuação da banda C: $2400 + 4 \times 100 = 2800$

E em qualquer outro cenário a pontuação da banda B seria superior, ou a pontuação da banda C seria inferior.

Analisando os diferentes cenários, podemos calcular as diferentes pontuações finais de cada banda:

Preferência \ **Banda**	**A**	**B**	**C**	**D**
1ª	$2300 + 4 \times 100 = 2700$	$2800 + 4 \times 100 = 3200$	$2400 + 4 \times 100 = 2800$	$1500 + 4 \times 100 = 1900$
2ª	$2300 + 3 \times 100 = 2600$	$2800 + 3 \times 100 = 3100$	$2400 + 3 \times 100 = 2700$	$1500 + 3 \times 100 = 1800$
3ª	$2300 + 2 \times 100 = 2500$	$2800 + 2 \times 100 = 3000$	$2400 + 2 \times 100 = 2600$	$1500 + 2 \times 100 = 1700$
4ª	$2300 + 1 \times 100 = 2400$	$2800 + 1 \times 100 = 2900$	$2400 + 1 \times 100 = 2500$	$1500 + 1 \times 100 = 1600$

Assim, podemos verificar que existem cenários para os 100 votos em falta que originam pontuações iguais entre duas bandas, como por exemplo:

Preferência	**1.ª**	**2.ª**	**3.ª**	**4.ª**
Banda	A	C	B	D
Pontuação final	2700	2700	3000	1600

Exame – 2016, 1ª Fase

22. Aplicando o método A, temos:

<table>
<tr><th></th><th></th><th>150 votos</th><th>180 votos</th><th>100 votos</th><th>Pontuação</th><th>Vencedor</th></tr>
<tr><td>Castanho</td><td>1ª Pref.</td><td>Castanho</td><td>Amarelo</td><td>Castanho</td><td rowspan="2">Castanho
$150 + 100 = 250$
Amarelo
180</td><td rowspan="2">Castanho</td></tr>
<tr><td>Amarelo</td><td>2ª Pref.</td><td>Amarelo</td><td>Castanho</td><td>Amarelo</td></tr>
<tr><td>Castanho</td><td>1ª Pref.</td><td>Castanho</td><td>Vermelho</td><td>Castanho</td><td rowspan="2">Castanho
$150 + 100 = 250$
Vermelho
180</td><td rowspan="2">Castanho</td></tr>
<tr><td>Vermelho</td><td>2ª Pref.</td><td>Vermelho</td><td>Castanho</td><td>Vermelho</td></tr>
</table>

Como o castanho venceu as comparações com as restantes cores é a cor vencedora, usando o método A.

Aplicando o método B, temos:

- Pontuação da cor «Castanho»: $3 \times 150 + 1 \times 180 + 3 \times 100 = 930$
- Pontuação da cor «Amarelo»: $2 \times 150 + 3 \times 180 + 1 \times 100 = 1140$
- Pontuação da cor «Vermelho»: $1 \times 150 + 2 \times 180 + 2 \times 100 = 710$

Como o amarelo tem maior número de pontos é a cor escolhida, usando o método B, o que prova que o Manuel tem razão.

Exame – 2014, 2.ª Fase

23. Aplicando o método referido temos:

		votos					
		50	205	145	100	Pontuação	Vencedor
Par L-R	1ª Pref.	L	R	L	L	L:$50 + 145 + 100 = 295$	L
	2ª Pref.	R	L	R	R	R: 205	
Par L-S	1ª Pref.	L	S	L	L	L:$50 + 145 + 100 = 295$	L
	2ª Pref.	S	L	S	S	S: 205	
Par L-V	1ª Pref.	V	L	V	L	L:$205 + 100 = 305$	L
	2ª Pref.	L	V	L	V	V:$50 + 145 = 195$	

Como o tema L (Liberdade) venceu a comparação com todos os restantes temas, é o tema vencedor.

Se o vencedor fosse apurado por maioria simples, tendo em conta apenas os votos na primeira preferência, a votação seria:

- Votação no tema V: $50 + 145 = 195$, a que corresponde a 39%; $\left(\frac{195}{500} = 0{,}39\right)$
- Votação no tema S: 205, a que corresponde a 41%; $\left(\frac{205}{500} = 0{,}41\right)$
- Votação no tema L: 100, a que corresponde a 20%; $\left(\frac{100}{500} = 0{,}2\right)$

Pelo que o tema vencedor seria o tema S (sonhos), o que mostra que a afirmação da professora tem fundamento.

Exame – 2014, 1.ª Fase

24. Aplicando o método descrito, temos:

		1024 votos	**4328 votos**	**5152 votos**	Votação	Vencedor
jazz	**1ª linha**	*jazz*	*jazz*	*gospel*	*jazz* $1024 + 4328 = 5352$	*jazz*
gospel	**2ª linha**	*gospel*	*gospel*	*jazz*	*gospel*: 5152	
jazz	**1ª linha**	*jazz*	*pop*	*pop*	*jazz*: 1024	*pop*
pop	**2ª linha**	*pop*	*jazz*	*jazz*	*pop* $4328 + 5152 = 9480$	
pop	**1ª linha**	*pop*	*pop*	*gospel*	*pop* $1024 + 4328 = 5352$	*pop*
gospel	**2ª linha**	*gospel*	*gospel*	*pop*	*gospel*: 5152	

Assim, aplicando o método descrito, o tipo de música escolhido é *pop*, porque ganha quando comparado com os restantes tipos de música.

Exame – 2013, Ép. especial

25. Aplicando o método descrito, incluindo o tema Festas, temos:

- Pontuação do tema *Bulling*: $3 \times 415 + 1 \times 370 + 2 \times 200 = 2015$
- Pontuação do tema Solidariedade: $2 \times 415 + 3 \times 370 + 1 \times 200 = 2140$
- Pontuação do tema Festas: $1 \times 415 + 2 \times 370 + 3 \times 200 = 1755$

Excluindo o tema Festas, a tabela reorganizada, não alterando os números de votos nem a ordem de cada uma das preferências, é a seguinte:

	415 votos	**370 votos**	**200 votos**
1ª Preferência	*Bullying*	Solidariedade	*Bullying*
2ª Preferência	Solidariedade	*Bullying*	Solidariedade

E assim, aplicando o método descrito, excluindo o tema Festas, temos:

- Pontuação do tema *Bulling*: $2 \times 415 + 1 \times 370 + 2 \times 200 = 1600$
- Pontuação do tema Solidariedade: $1 \times 415 + 2 \times 370 + 1 \times 200 = 1355$

Assim, temos que com a inclusão do tema Festas, o tema escolhido é Solidariedade, porque tem a maior pontuação (2140 pontos) e, se o tema Festas for excluído, o tema escolhido é *Bulling* porque tem maior número de pontos (1600), pelo que podemos concluir que a exclusão do tema Festas altera a escolha do tema.

Exame – 2013, 1.ª Fase

26. Aplicando o método descrito, temos:

		votos					
		1500	**2100**	**1000**	**1500**	Votação	Vencedor
Maria	**1ª Linha**	M	F	F	F	M: 1500 F: $2100 + 1000 + 1500 =$ $= 4600$	Fernanda
Fernanda	**2ª Linha**	F	M	M	M		
Luísa	**1ª Linha**	L	L	F	F	L: $1500 + 2100 =$ $= 3600$ F: $1000 + 1500 =$ $= 2500$	Luísa
Fernanda	**2ª Linha**	F	F	L	L		
Luísa	**1ª Linha**	M	L	L	M	L: $2100 + 1000 =$ $= 3100$ M: $1500 + 1500 =$ $= 3000$	Luísa
Maria	**2ª Linha**	L	M	M	L		

Assim, aplicando o método descrito, a candidata escolhida para presidente da comissão organizadora, é a Luísa porque ganha quando comparada com as restantes candidatas.

Exame – 2012, 1.ª Fase

27. Aplicando o método de contagem de Borda, temos:

- Pontuação da cidade de Braga: $3 \times 8 + 1 \times 6 + 1 \times 4 + 2 \times 3 = 40$
- Pontuação da cidade de Lamego: $2 \times 8 + 3 \times 6 + 2 \times 4 + 1 \times 3 = 45$
- Pontuação da cidade de Amarante: $1 \times 8 + 2 \times 6 + 3 \times 4 + 3 \times 3 = 41$

Logo, pelo método de contagem de Borda a cidade escolhida é Lamego (porque tem o maior número de pontos). Assim, podemos verificar que esta eleição não respeita a primeira preferência mais votada, que é a cidade de Braga (com 8 votos, enquanto Amarante tem 7 votos e Lamego apenas 6 votos).

Exame – 2011, 2.ª Fase

28. Aplicando o método de contagem de Borda, temos:

- Pontuação do Nuno: $4 \times 25 + 2 \times 40 + 4 \times 15 + 3 \times 10 + 3 \times 5 = 285$
- Pontuação da Ana: $3 \times 25 + 1 \times 40 + 2 \times 15 + 2 \times 10 + 1 \times 5 = 170$
- Pontuação da Inês: $2 \times 25 + 3 \times 40 + 3 \times 15 + 1 \times 10 + 2 \times 5 = 235$
- Pontuação do Pedro: $1 \times 25 + 4 \times 40 + 1 \times 15 + 4 \times 10 + 4 \times 5 = 260$

Assim, o candidato vencedor é o Nuno, porque tem o maior número de pontos.

Exame – 2009, 1ª Fase

29.

29.1. Calculando o número de votos que cada uma das cidades obteve, na primeira preferência, temos:

- Madrid: $50 + 30 = 80$
- Vigo: 60
- Sevilha: 40
- Granada: $14 + 22 = 36$

29.2. Analisando as votações, temos que:

- O número total de votos é: $50 + 60 + 40 + 14 + 30 + 22 = 216$
- O número total de votos necessários para obter a maioria absoluta, ou seja, o número mínimo de votos necessários para que uma cidade tivesse sido eleita vencedora na primeira contagem é:

$$\frac{216}{2} + 1 = 109$$

29.3. Como na primeira contagem nenhuma cidade obteve a maioria absoluta e a cidade de Granada foi a menos votada, o quadro de preferências reestruturado é:

Preferências	**Votos**					
1ª	Madrid	Vigo	Sevilha	Madrid	Madrid	Sevilha
2ª	Sevilha	Sevilha	Vigo	Vigo	Vigo	Madrid
3ª	Vigo	Madrid	Madrid	Sevilha	Sevilha	Vigo
Total de votos	**50**	**60**	**40**	**14**	**30**	**22**

Contabilizando o número de votos obtidos, na primeira preferência, por cada cidade, temos:

- Madrid: $50 + 14 + 30 = 94$
- Vigo: 60
- Sevilha: $40 + 22 = 62$

Como nesta contagem ainda nenhuma cidade obteve a maioria absoluta e a cidade de Vigo foi a menos votada, o quadro de preferências novamente reestruturado é:

Preferências	**Votos**					
1ª	Madrid	Sevilha	Sevilha	Madrid	Madrid	Sevilha
2ª	Sevilha	Madrid	Madrid	Sevilha	Sevilha	Madrid
Total de votos	**50**	**60**	**40**	**14**	**30**	**22**

Contabilizando o número de votos obtidos, na primeira preferência, por cada cidade, temos:

- Madrid: $50 + 14 + 30 = 94$
- Sevilha: $60 + 40 + 22 = 122$

Como Sevilha tem 122 votos, mais do que os 109 necessários para ter maioria absoluta, a cidade de Sevilha é a cidade aonde se vai realizar a viagem de finalistas.

29.4. Sabendo que 4% dos alunos do 12.º ano não votaram, então o total dos 216 votos correspondem a uma percentagem de $100 - 4 = 96\%$ dos alunos. Desta forma podemos calcular o total (t) dos alunos que frequentam o 12.º ano de escolaridade:

$$\frac{t}{216} = \frac{100}{96} \Leftrightarrow t = \frac{100 \times 216}{96} \Leftrightarrow t = 225$$

Exame – 2008, 2.ª Fase

30.

30.1. Completando a tabela para o apuramento do candidato vencedor, temos:

MÉTODO PREFERENCIAL

Contagem dos pontos		Pontuação total
João	$40 \times 1 + 45 \times 3 + 38 \times 1$	213
Rui	$40 \times 3 + 45 \times 1 + 38 \times 2$	241
Luís	$40 \times 2 + 45 \times 2 + 38 \times 3$	284

Assim, como o Luís é o candidato com pontuação total mais elevada, é o candidato vencedor segundo este método.

30.2.

30.2.1. Construindo as tabelas com as comparações entre o Rui e o Luís, e depois entre o João e o Luís, e identificando o vencedor em cada caso, temos:

COMPARAÇÃO DA VOTAÇÃO NO RUI COM A VOTAÇÃO NO LUÍS

PREFERÊNCIAS	VOTOS		
1ª	Rui	Luís	Luís
2ª	Luís	Rui	Rui
TOTAL	40	45	38

Nesta comparação o vencedor é o Luís com $45 + 38 = 83$ votos, porque o Rui teve apenas 40 votos.

COMPARAÇÃO DA VOTAÇÃO NO JOÃO COM A VOTAÇÃO NO LUÍS

PREFERÊNCIAS	VOTOS		
1ª	Luís	João	Luís
2ª	João	Luís	João
TOTAL	40	45	38

Nesta comparação o vencedor também é o Luís com $40 + 38 = 78$ votos, porque o João teve apenas 45 votos.

30.2.2. Organizando as contagens dos resultados das comparações dos candidatos dois a dois, temos:

- Comparação entre o Rui e o João:
  - Rui: $40 + 38 = 78$ votos
  - João: 45 votos

  Vencedor: Rui
- Comparação entre o Rui e o Luís:
  - Rui: 40 votos
  - Luís: $45 + 38 = 83$ votos

  Vencedor: Luís
- Comparação entre o João e o Luís:
  - João: 45 votos
  - Luís: $40 + 38 = 75$ votos

  Vencedor: Luís

Desta forma temos que na ordenação dos candidatos, em primeiro lugar figura o Luís (com a vitória em 2 comparações), em segundo lugar figura o Rui (vencendo 1 comparação) e em terceiro lugar o João (sem qualquer vitória nas comparações).

Desta forma o Luís tem razões para assumir que deve ser considerado o vencedor porque vence quando comparado diretamente com qualquer um dos restantes candidatos.

Exame – 2007, 2.ª Fase

31. Pela observação do gráfico podemos verificar que o partido A obteve mais de 40% dos votos na eleição de 2001, sendo o partido mais votado. Assim, o Presidente da Câmara eleito em 1997 pelo partido A foi reeleito porque se recandidatou pelo partido A em 2001 e este foi o partido mais votado.

Exame – 2006, 2.ª Fase