M.A.C.S. (10.º ano)

# Gráficos e medidas estatísticas

Exercícios de Provas Nacionais - Propostas de resolução

1. Designado por $m$ a média das idades dos turistas que têm nacionalidade X (que é também a média das idades dos turistas da nacionalidade Z), e como a média dos 1200 turistas, temos que:

$$\frac{m \times 180 + 62 \times 350 + m \times 210 + 56 \times 460}{1200} = 54{,}5 \Leftrightarrow \frac{180m + 21\,700 + 210m + 25\,760}{1200} = 54{,}5 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 390m + 47\,460 = 54{,}5 \times 1200 \Leftrightarrow 390m + 47\,460 = 65\,400 \Leftrightarrow 390m = 65\,400 - 47\,460 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 390m = 17\,940 \Leftrightarrow m = \frac{17\,940}{390} \Leftrightarrow m = 46$$

Exame – 2024, Ép. especial

2. Analisando cada uma das afirmações da coluna **II**, em cada uma das classes, temos:

| Coluna II | [18,28[ | [28,38[ | [38,48[ |
|---|---|---|---|
| **(1)** | Não concluíram: 6 | Não concluíram: 3 | Não concluíram: 21 |
| **(2)** | Total de capitães: $6+9+3+15+21+21=75$ | | |
| | Capitães na classe: $6+9=15$<br>Quinta parte: $\frac{15}{75}\times 100=20\%$ | Capitães na classe: $3+15=18$<br>Percentagem: $\frac{18}{75}\times 100=24\%$ | Capitães na classe: $21+21=42$<br>Percentagem: $\frac{42}{56}\times 100=56\%$ |
| **(3)** | Total de capitães que não concluíram: $9+15+21=45$ | | |
| | Quinta parte: $\frac{45}{5}=9$ | Quinta parte: $\frac{45}{5}=9\ (\neq 15)$ | Quinta parte: $\frac{45}{5}=9\ (\neq 21)$ |
| **(4)** | Diferença: $9-6=3$ | Diferença: $15-3=12$ | Diferença: $21-21=0$ |
| **(5)** | Capitães na classe: $6+9=15$ | Capitães na classe: $3+15=18$ | Capitães na classe: $21+21=42$ |
| **(6)** | Frequência acumulada (%):<br>$\frac{15}{75}\times 100=20\%$ | Frequência acumulada (%):<br>$\frac{15+18}{75}\times 100=44\%$ | Frequência acumulada (%): 100% |
| **(7)** | Total de capitães que não concluíram: $9+15+21=45$ | | |
| | Frequência acumulada (%):<br>$\frac{9}{45}\times 100=20\%$ | Frequência acumulada (%):<br>$\frac{9+15}{45}\times 100\approx 53{,}3\%$ | Frequência acumulada (%): 100% |

Assim, temos que:

**(1)** Das equipas que concluíram o jogo de *Sala de Fuga*, o número de capitães cuja idade pertence à classe [28,38[ é o menor.

**(2)** 56% dos capitães de equipa têm idade pertencente à classe [38,48[.

**(3)** A quinta parte dos capitães das equipas que não concluíram o jogo de *Sala de Fuga* tem idade pertencente à classe [18,28[.

**(4)** [28,38[ é a classe em que é maior a diferença entre o número de capitães das equipas que concluíram o jogo de Sala de Fuga e o número de capitães das equipas que não o concluíram.

**(5)** Considerando a totalidade dos capitães das equipas, [38,48[ é a classe modal das suas idades (porque é a classe com maior frequência).

**(6)** Considerando a totalidade dos capitães das equipas, [38,48[ é a classe mediana das suas idades(porque é a primeira classe com frequência acumulada superior a 50%).

**(7)** O primeiro quartil das idades dos capitães das equipas que não concluíram o jogo de I pertence à classe [28,38[ (porque é a primeira classe com frequência acumulada superior a 15%).

Logo, as correspondências corretas são:

- **(a) → (3)**
- **(b) → (1),(4),(7)**
- **(c) → (2),(5),(6)**

Exame – 2024, 2.ª Fase

3.

3.1.

3.1.1. Inserindo numa lista da calculadora gráfica os valores dos "Pontos", e noutra lista os valores correspondentes do "N.º de clientes"como as respetivas frequências absolutas simples, temos:

| **Pontos** | **N.º de clientes**<br>**Freq. absoluta simples** |
|---|---|
| 0 | 0 |
| 1 | 34 |
| 2 | 25 |
| 3 | 9 |
| 4 | 0 |
| 5 | 22 |
| 6 | 30 |
| 7 | 124 |
| 8 | 170 |
| 9 | 369 |
| 10 | 297 |

Calculando as medidas estatísticas referentes à primeira lista, usando a segunda como frequência, obtemos o valor da média:

$$\overline{x} \approx 8{,}26$$

Para uma classificação do grau de satisfação na "Zona de excelência", o valor da média das pontuações deveria ser igual ou superior a 9 pontos, o que não acontece, usando este indicador.

Calculando o $NPS$, temos:

- total de Promotores: $369 + 297 = 666$
- total de Detratores: $0 + 34 + 25 + 9 + 0 + 22 + 30 = 120$
- percentagem de Promotores: $\dfrac{p}{666} = \dfrac{100}{1080} \Leftrightarrow p = \dfrac{100 \times 666}{1080} \Rightarrow p \approx 61{,}67\%$
- percentagem de Detratores: $\dfrac{p}{120} = \dfrac{100}{1080} \Leftrightarrow p = \dfrac{100 \times 120}{1080} \Rightarrow p \approx 11{,}11\%$
- $NPS = 61{,}67 - 11{,}11 = 50{,}56\%$

De acordo com a tabela, o valor do $NPS$ (50 a 74) corresponde a uma classificação do grau de satisfação na "Zona de qualidade"e não na "Zona de excelência", de acordo com este indicador.

3.1.2. Observando os dados da tabela anterior e o valor da mediana obtida com recurso à calculadora gráfica, temos:

- Moda das pontuações dos Detratores: $\hat{x} = 1$
- Percentagem de clientes Neutros: $\dfrac{n}{124+170} = \dfrac{100}{1080} \Leftrightarrow n = \dfrac{100 \times 294}{1080} \Rightarrow n \approx 27\%$
- Mediana das pontuações dos 1080 clientes: $\tilde{x} = 9$
- Amplitude do setor circular relativo aos Promotores (666 num total de 1080):
  $\dfrac{s}{666} = \dfrac{360}{1080} \Leftrightarrow s = \dfrac{360 \times 666}{1080} \Leftrightarrow s = 222°$

E assim, vem que:

A moda das pontuações atribuídas pelos Detratores é __**1**__.
Os clientes Neutros representam, com arredondamento às unidades, aproximadamente __**27**__ % da amostra.
A mediana das pontuações atribuídas pelos 1080 clientes é __**9**__.
Os resultados obtidos estão organizados no gráfico circular __**222**__, no qual se apresenta a amplitude, em graus, de um dos sectores.

Logo, as correspondências corretas são:

- **I** $\rightarrow$ **a)**
- **II** $\rightarrow$ **c)**
- **III** $\rightarrow$ **b)**
- **IV** $\rightarrow$ **c)**

3.2. Como os 723 clientes Promotores correspondem a $\dfrac{723 \times 100}{1000} = 72{,}3\%$ do total da amostra, podemos determinar o valor do $NPS$ desta amostra:

$$NPS = 72{,}3 - 8 = 64{,}3\%$$

Para que a amostra permitisse classificar a empresa na Zona de excelência, este valor deveria ser, pelo menos, 75%, ou seja, seria necessário uma percentagem adicional de Promotores de $75 - 64{,}3 = 10{,}7\%$, a que corresponde o número mínimo de clientes Neutros, que teriam de passar a Promotores, de:

$$1000 \times \frac{10{,}7}{100} = 1000 \times 0{,}107 = 107$$

Exame – 2023, 2.ª Fase

4.

4.1. Organizando os dados relativos aos valores da temperatura mínima (16; 15; 16; 16; 15; 15; 14), da temperatura máxima (26; 23; 28; 29; 29; 28; 26) e da precipitação acumulada diária (1; 0,5;0,1; 0,2; 0; 0,3; 3), em três listas na calculadora gráfica e calculando as medidas estatísticas de cada uma das variáveis, obtemos os seguintes valores, relativos à média, mediana, 1.º quartil, desvio padrão, e amplitude:

| | Temperatura mínima | Temperatura máxima | Precipitação acumulada diária |
|---|---|---|---|
| Média | 15,2857 | 27 | 0,7286 |
| Mediana | 15 | 28 | 0,3 |
| 1º quartil | 15 | 26 | 0,1 |
| Desvio padrão | 0,6999 | 2 | 0,9765 |
| Amplitude | 2 | 6 | 3 |

E assim, podemos estabelecer as correspondências seguintes:

- **(1) - (b)** O conjunto dos dados é o que apresenta média inferior à mediana são os da temperatura máxima;
- **(2) - (a)** O conjunto dos dados é o que apresenta o primeiro quartil igual à mediana para a variável temperatura mínima;
- **(3) - (c)** De segunda para terça, os valores da precipitação decresceram (de 0,5 para 0,1) e os valores das temperaturas miníma e máxima cresceram (de 15 para 16 e de 23 para 28, respetivamente) e em nenhum outro par de dias se verificou uma tendência semelhante;
- **(4) - (c)** Os valores da precipitação são todos diferentes,pelo que nenhum deles tem uma frequência maior que os restantes, pelo que não existe moda, ou seja, o conjunto dos dados é amodal;
- **(5) - (a)** O conjunto dos dados é o que apresenta menor dispersão em relação à média, que pode ser identificado através do valor do desvio padrão que é menor, são os dados relativos à temperatura mínima;
- **(6) - (b)** A amplitude dos dados da temperatura mínima é igual a 6;
- **(7) - (c)** Relativamente à temperatura mínima existem 3 dados acima da média, ou seja, mais de 30% $\left(3 \times \frac{100}{7} \approx 42{,}86\right)$; relativamente à temperatura máxima existem 4 dados acima da média, ou seja, mais de 30% $\left(4 \times \frac{100}{7} \approx 51{,}14\right)$ e relativamente à precipitação acumulada existem 2 dados acima da média, ou seja, menos de 30% $\left(2 \times \frac{100}{7} \approx 28{,}57\right)$

Logo, as correspondências corretas são:

- **(a)** $\rightarrow$ **(2),(5)**
- **(b)** $\rightarrow$ **(1),(6)**
- **(c)** $\rightarrow$ **(3),(4),(7)**

4.2. Designando por $d$, o valor da descida da temperatura máxima entre dois dias correspondentes das duas semanas, e calculado a soma das temperaturas registadas, temos:

- entre os dias 7 e 13: $26 + 23 + 28 + 29 + 29 + 28 + 26 = 189$
- entre os dias 14 e 20: $(26-d)+(23-d)+(28-d)+(29-d)+(29-d)+(28-d)+(26-d) = 189-7d$
- nos 14 dias da Festa: $189 + 189 - 7d = 378 - 7d$

Assim, sabendo que a média dos 14 dias da Festa foi de 25,5 °C, podemos calcular o valor $d$, da a descida da temperatura máxima entre os dias 7 e 14:

$$\frac{378-7d}{14} = 25{,}5 \Leftrightarrow 378 - 7d = 25{,}5 \times 14 \Leftrightarrow 378 - 7d = 357 \Leftrightarrow 378 - 357 = 7d \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 378 - 357 = 7d \Leftrightarrow 21 = 7d \Leftrightarrow \frac{21}{7} = d \Leftrightarrow d = 3$$

Exame – 2023, 1.ª Fase

5.

5.1. Analisando todas os cenários possíveis temos:

- 3 vezes: esta situação não pode ter ocorrido porque assim teria $3 \times 18 = 54$ pontos e não 58 como indicado.
- 2 vezes: esta situação não pode ter ocorrido porque assim teria $2 \times 18 + 25 = 61$, pontos se na prova restante tivesse ficado em primeiro lugar, ou $2 \times 18 + 15 = 51$ pontos se na prova restante tivesse ficado em terceiro lugar, em qualquer outra posição na prova restante teria ainda menos pontos e nunca os 58 indicados.
- 1 vez: esta situação pode ter ocorrido visto que teria que ter ocupado um primeiro lugar, visto que com um segundo e dois terceiros a pontuação seria $18 + 2 \times 15 = 48$ pontos. Considerando um primeiro e um segundo, a pontuação obtida é $18 + 25 = 43$ pontos e assim para a prova restante a pontuação necessária seria $58 - 43 = 15$ correspondente a um terceiro lugar.

Como se pretende identificar o número máximo de vezes que o piloto pode ter ficado em segundo lugar, a resposta é 1, correspondendo a 1 primeiro lugar, 1 segundo lugar e um terceiro lugar.

Resposta: **Opção B**

5.2.

5.2.1. Pela observação do gráfico, e sabendo que a pontuação no Reino Unido foi de 18 pontos, podemos determinar a pontuação dos quatro últimos GP, adicionando a diferença para os GP que se realizaram depois deste:

| **GP** | **Variação** | **Pontos** |
|---|---|---|
| **Reino Unido** | 6 | 18 |
| **Itália** | $-8$ | $18 - 8 = 10$ |
| **França** | 0 | $10 + 0 = 10$ |
| **Japão** | 15 | $10 + 15 = 25$ |

Assim, o número médio de pontos obtidos por este piloto nos quatro últimos GP, é:

$$\overline{x} = \frac{18 + 10 + 10 + 25}{4} = 15{,}75$$

5.2.2. Como o piloto obteve o primeiro lugar no GP da Austrália, onde se percorreram todas as voltas previstas obteve 25 pontos.

Como no GP de Espanha a variação foi de $-21$, a pontuação obtida foi de $25 - 21 = 4$ pontos.

Como este GP tem um total de 66 voltas, das quais só se realizaram 45, a percentagem $p$ de voltas concluídas é:

$$\frac{66}{100} = \frac{45}{p} \Leftrightarrow p = \frac{45 \times 100}{66} \Rightarrow p \approx 68{,}18\,\%$$

Ou seja, no GP de Espanhanão se cumpriram pelo menos 70% das voltas previstas, pelo que os 4 pontos obtidos pelo piloto correspondem a metade dos pontos previstos na tabela para a sua posição, ou seja 8 pontos, a que corresponde a 6.ª posição.

Exame – 2022, Ép. especial

6.

6.1. Identificando o máximo e o mínimo dos conjuntos de dados de cada diagrama, podemos determinar as respetivas amplitudes:

- (A) $30 - 18 = 12$
- (B) $31 - 12 = 19$
- (C) $39 - 14 = 25$
- (D) $31 - 12 = 19$

Assim, temos que apenas os diagramas das opções (B) e (D) podem representar as idades daquele grupo de pessoas. Adicionalmente podemos verificar que ambos os diagramas representam um conjunto com 14 dados, pelo devemos verificar em qual dos diagramas a média é 20:

- (B) $\overline{x} = \dfrac{12 \times 2 + 13 \times 2 + 15 \times 3 + 20 + 21 + 22 + 30 \times 2 + 31 \times 2}{14} = 20$
- (D) $\overline{x} = \dfrac{12 \times 3 + 13 \times 2 + 15 \times 2 + 17 + 18 + 19 + 21 \times 2 + 22 + 31}{14} \approx 17{,}2$

Resposta: **Opção B**

6.2. Designando por $b$ o número de pessoas do grupo B, temos que:

- o número total de pessoas é: $14 + b$
- a soma das idades de todas as pessoas é: $20 \times 14 + 18 \times b$

Assim, como a média dos dos dois grupos é 18,7, o valor de $b$, é dado por:

$$\frac{20 \times 14 + 18 \times b}{14 + b} = 18{,}7 \Leftrightarrow 280 + 18b = 18{,}7(14 + b) \Leftrightarrow 280 + 18b = 261{,}8 + 18{,}7b \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 280 - 261{,}8 = 18{,}7b - 18b \Leftrightarrow 18{,}2 = 0{,}7b \Leftrightarrow \frac{18{,}2}{0{,}7} = b \Leftrightarrow 26 = b$$

Exame – 2022, 2.ª Fase

7. Como no dia 3 de janeiro de 2018, a média das idades dos funcionários que se manteve na empresa, era 31,5 anos, então no dia 3 de janeiro de 2014, a média das idades dos mesmos funcionários era $31{,}5 - 3 = 28{,}5$ .

Assim a média das idades destes funcionários, no dia 3 de janeiro de 2014, é:

$$\bar{x} = \frac{20 \times 1 + 22 \times 3 + 26 \times 2 + 31 \times b + 40 \times 2}{1 + 3 + 2 + b + 2} = \frac{31b + 218}{b + 8}$$

Assim, calculando o número de funcionários tinham 31 anos quando a agência foi inaugurada, ou seja, o valor de $b$, temos:

$$\frac{31b + 218}{b + 8} = 28{,}5 \Leftrightarrow 31b + 218 = 28{,}5(b + 8) \Leftrightarrow 31b + 218 = 28{,}5b + 228 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 31b - 28{,}5b = 228 - 218 \Leftrightarrow 2{,}5b = 10 \Leftrightarrow b = \frac{10}{2{,}5} \Leftrightarrow b = 4$$

Exame – 2022, 1.ª Fase

8.

8.1. Como existem 6 ouvintes com variação de peso normal (correspondentes aos IMC 19, 19, 20, 20, 20 e 23), então os restantes $20-6=14$ ouvintes tem um IMC que não pode ser classificado como variação normal.

Assim, a percentagem ($p$) correspondente é:

$$\frac{p}{100}=\frac{14}{20} \Leftrightarrow p=\frac{14\times 100}{20} \Leftrightarrow p=70$$

Resposta: **Opção A**

8.2. De acordo com os dados do histograma temos que o número de elementos da amostra, $n$, é:

$$n=18+a+6+32+16=a+72$$

Como os dados estão agrupados em classes, a média é calculada com recurso à identificação da marca de cada classe. Assim, como as marcas de classe são 16, 20, 24, 28 e 32, a média é:

$$\bar{x}=\frac{18\times 16+a\times 20+6\times 24+32\times 28+16\times 32}{a+72}=\frac{20a+1840}{a+72}$$

Admitindo que a média é igual a 24, temos que o valor é:

$$24=\frac{20a+1840}{a+72} \Leftrightarrow 24(a+72)=20a+1840 \Leftrightarrow 24a+1728=20a+1840 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 24a-20a=1840-1728 \Leftrightarrow 4a=112 \Leftrightarrow a=\frac{112}{4} \Leftrightarrow a=28$$

Exame – 2021, Ép. especial

9.

9.1. Pela observação do gráfico podemos verificar que no mês 6 a taxa de utilização da cantina foi de 12,7% e no mês 7 foi de 9,4%.

Como no mês 6, frequentaram a cantina 1016 alunos, podemos estabelecer a proporção para determinar o número de alunos $a$ que frequentaram a cantina no mês 7:

$$\frac{12{,}7}{9{,}4}=\frac{1016}{a} \Leftrightarrow a=\frac{1016\times 9{,}4}{12{,}7} \Leftrightarrow a=752$$

Logo a redução do número de alunos é:

$$1016-752=264$$

Assim, a percentagem $x$ da redução do mês 7 relativamente ao mês 6, corresponde à proporção de 264 relativamente a 1016:

$$\frac{1016}{264}=\frac{100}{x} \Leftrightarrow x=\frac{100\times 264}{1016} \Rightarrow x\approx 26$$

Resposta: **Opção A**

9.2. Ordenando os dados de acordo com o gráfico ($b < 9{,}4$), podemos identificar a posição dos dados centrais, necessários para o cálculo da mediana:

$$\underbrace{b\,;\,9{,}4\,;\,11{,}7\,;\,12{,}7\,;\,13{,}9\,;\,14{,}5}_{50\%}\;;\;\underbrace{a\,;\,15{,}5\,;\,15{,}9\,;\,15{,}9\,;\,16{,}2\,;\,16{,}5}_{50\%}$$

Admitindo que a mediana dos dados recolhidos é 14,9%, e observando que é a média aritmética entre 14,5 e $a$, temos que:

$$\frac{14{,}5+a}{2} = 14{,}9 \Leftrightarrow a = 14{,}9\times 2 - 14{,}5 \Leftrightarrow a = 16-7 \Leftrightarrow a = 15{,}3\%$$

Exame – 2021, 2.ª Fase

10. Pela observação do gráfico podemos verificar que a média dos alunos que participaram no primeiro semestre é relativa a $15+55=70$ alunos, e que a média dos alunos que participaram no segundo semestre é relativa a $10+30=40$ alunos.

Assim a notta média dos 110 alunos é:

$$\bar{x} = \frac{15{,}65\times 70 + 14{,}22\times 40}{100} = 15{,}13 \text{ valores}$$

Exame – 2021, 2.ª Fase

11. Começamos por identificar a marca de classe relativa a cada barra do histograma e calcular a frequência absoluta simples (a partir da frequência absoluta acumulada, por subtrações sucessivas), como se apresenta na tabela seguinte:

| **Classes** | **Marca de classe** | **Frequência absoluta acumulada** | **Frequência absoluta simples** |
|---|---|---|---|
| [18,28[ | $\frac{18+28}{2}=23$ | 15 | 15 |
| [28,38[ | $\frac{28+38}{2}=33$ | 75 | $75-15=60$ |
| [38,48[ | $\frac{38+48}{2}=43$ | 120 | $120-75=45$ |
| [48,58[ | $\frac{48+58}{2}=53$ | 140 | $140-120=20$ |
| [58,68[ | $\frac{58+68}{2}=63$ | 150 | $150-140=10$ |

Assim, introduzindo na calculadora gráficas listas correspondentes às marca de classe e às frequências absolutas simples e calculando as medidas estatísticas referentes a estas duas listas obtemos o valor da média das idades dos 150 funcionários, com arredondamento às unidades:

$$\overline{x} \approx 40$$

Exame – 2021, 1.ª Fase

12.

12.1. Como a mediana é 8 e existem um total de 20 registos ($3+4+2+2=11$ rapazes e 9 raparrigas), a mediana é a média d0 10.º e do 11.º primeiro registos na lista ordenada de todos os registos.

Assim, escrevendo os 11 primeiros registos da lista ordenada temos:

$$\underbrace{\overbrace{5\ ;\ 5\ ;\ 5}^{\text{♂}}\ ;\ \overbrace{5\ ;\ 5}^{\text{♀}}\ ;\ \overbrace{6\ ;\ 6\ ;\ 6\ ;\ 6}^{\text{♂}}\ ;\ \overbrace{\ 7\ }^{\text{♀}}}_{10}\ ;\ \underbrace{\overbrace{\ a\ }^{\text{♀}}\ ;\ ...}_{10}$$

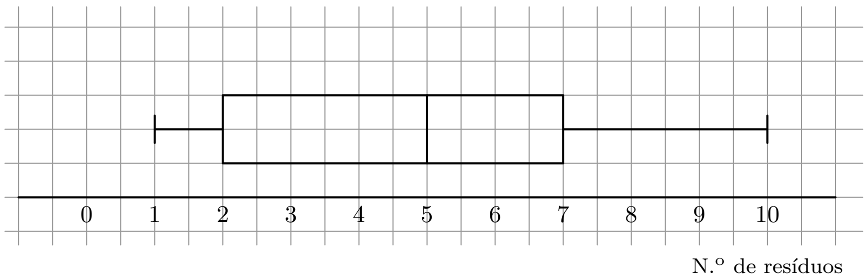
Assim a mediana ($\tilde{x}=8$) é a média aritmética entre 7 e $a$, ou seja:

$$\frac{7+a}{2}=8 \Leftrightarrow 7+a=16 \Leftrightarrow a=16-7 \Leftrightarrow a=9$$

12.2. Inserindo na calculadora gráfica os valores do número de resíduos numa lista e os valores da frequência absoluta noutra lista, e formatando a calculadora para obter os calculos estatísticos de uma variável, com dados agrupados, obtemos os seguintes valores para os quartis e para os extremos:

| | |
|---|---|
| Mínimo | 1 |
| 1.º quartil | 2 |
| Mediana | 5 |
| 3.º quartil | 7 |
| Máximo | 10 |

Assim, representando o diagrama de extremos e quartis relativo a estes dados, temos:




Desta forma podemos concluir que o diagrama apresentado no enunciado não traduz os dados apresentados na tabela, porque o valor do 3.º quartil não é 8, mas sim 7, como se ilustra no diagrama aqui representado.

Exame – 2020, Ép. especial

13. Como em abril foram ocupados menos 25% dos quartos do que em março, então o número de quartos ocupados em abril foi 75% dos número registado março.

Assim, como 198 corresponde a 75% do número de quartos ocupados em março ($m$), então a ocupação de março corresponde a 100%, e assim, estabelecendo a proporção, temos que:

$$\frac{m}{198}=\frac{100}{75} \Leftrightarrow m=\frac{100\times 198}{75} \Leftrightarrow m=264$$

Resposta: **Opção B**

Exame – 2020, 2.ª Fase

14.

14.1. Relacionando as frequências absoluta simples e absoluta acumulada do tempo de atraso de 5 min, podemos determinar a frequência absoluta acumulada do tempo de atraso de 4 min, e podemos calcular a frequência absoluta acumulada do tempo de atraso $b$, como está indicado na tabela:

| **Tempo de atraso (min)** | **N.º de comboios** | **Frequência absoluta acumulada** |
|---|---|---|
| 0 | | 2 |
| 2 | | 14 |
| 4 | $a$ | $37-13=24$ |
| 5 | 13 | 37 |
| $b$ | 13 | $37+13=50$ |
| 15 | | |
| 17 | | 100 |

Depois relacionando as frequências absolutas acumuladas dos tempos 2 e 4 min, podemos determinar o valor de $a$:

$$\text{Como } 14+a=24, \text{ então } a=24-14=10$$

Relativamente ao valor de $b$, como se verificou que existem 50 registos com um valor inferior a $b$ e 50 registos com um valor igual ou superior a 15, então, como o total de registos é par, a mediana resulta da média entre $b$ e 15. Como a mediana é 11 min, podemos determinar o valor de $b$:

$$\frac{b+15}{2}=11 \Leftrightarrow b+15=11\times 2 \Leftrightarrow b=22-15 \Leftrightarrow b=7$$

14.2. Como do conjunto das reclamações apresentadas em todas as estações, 13 680 se encontram pendentes, pela leitura do gráfico podemos verificar que este valor corresponde a 45% do total, pelo que, o número total de reclamações é:

$$\frac{t}{13\,680}=\frac{100}{45} \Leftrightarrow t=\frac{100\times 13\,680}{45} \Leftrightarrow t=\frac{100\times 13\,680}{45} \Leftrightarrow t=30\,400$$

Como do total das reclamações apresentadas, 40% são da estação E2, podemos calcular o número de reclamações da estão E2:

$$30\,400\times 0{,}4=12\,160$$

Novamente pela observação do gráfico podemos verificar que a percentagem de reclamações pendentes na estação E2 é 75%, pelo que o número correspondente é:

$$12\,160\times 0{,}75=9\,120$$

Exame – 2020, 2.ª Fase

15.

15.1. Como o tempo médio de espera é referente a 9 pessoas, tendo os tempos do Filipe e do amigo iguais (porque permaneceram juntos na fila), designado por $t$ este valor, temos que:

$$\frac{30+24+22{,}5+18+12+8+3+t+t}{9}=15{,}5 \Leftrightarrow 117{,}5+2t=15{,}5\times 9 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2t=139{,}5-117{,}5 \Leftrightarrow t=\frac{22}{2} \Leftrightarrow t=11$$

15.2. Observando que as pessoas indicadas na tabela, as que esperaram menos de três horas foram as pessoas A, B e C, ou seja 3 pessoas e designando por $t$ o número total de clientes que, nesse dia, adquiriram bilhete, temos que:

- $t \times 0{,}6$ é o número de pessoas que esperaram menos de três horas para comprar o bilhete (60% do total)
- $t \times 0{,}6 \times 0{,}004$ é o número de pessoas que esperaram menos de três horas para comprar o bilhete e que figuram na tabela (0,4% do valor anterior)

Assim, determinando o valor de $t$, temos:

$$t \times 0{,}6 \times 0{,}04 = 3 \Leftrightarrow t = \frac{3}{0{,}6 \times 0{,}004} \Leftrightarrow t = 1250$$

Resposta: **Opção A**

Exame – 2020, 1.ª Fase

16.

16.1. Como existem 50 registos (referentes aos 50 clientes inquiridos pelo João), e como a média do número de artigos comprados é 1,96, temos que a soma ($S$) de todos os registos é calculada por:

$$\frac{S}{50} = 1{,}96 \Leftrightarrow S = 1{,}96 \times 50 \Leftrightarrow S = 98$$

Assim, subtraindo ao valor de $S$ os valores dos registos conhecidos, temos:

$$98 - 0 \times 8 - 1 \times 14 - 2 \times 12 - 3 \times 13 = 98 - 0 - 14 - 24 - 39 = 21$$

Desta forma, temos que o valor de $a$ pode ser calculado por:

$$a \times 3 = 21 \Leftrightarrow a = \frac{21}{3} \Leftrightarrow a = 7$$

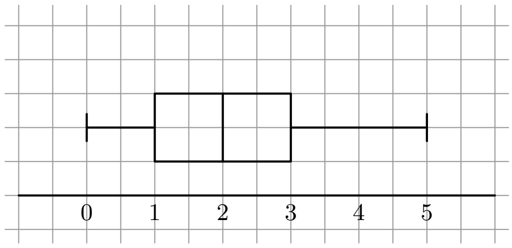
16.2. Organizando os dados recolhidos pelo João e pela Maria numa tabela, e agrupando as respostas semelhantes, temos:

| N.º de artigos comprados | N.º de clientes (João) | N.º de clientes (Maria) | N.º de clientes (Total) |
|---|---|---|---|
| 0 | 8 | 10 | 10 |
| 1 | 14 | 15 | 29 |
| 2 | 12 | 8 | 20 |
| 3 | 13 | 7 | 20 |
| 4 | 3 | 7 | 10 |
| 5 | 0 | 3 | 3 |

Inserindo na calculadora, em duas listas, os valores relativos ao N.º de artigos comprados, e ao N.º de clientes (Total), e calculando as medidas estatísticas referentes à primeira lista, usando a segunda como frequência, obtemos os seguintes valores para os extremos e para os quartis:

- Mínimo: 0
- 1.º quartil: 1
- Mediana (2.º Q): 2
- 3.º quartil: 3
- Mínimo: 5

E desta forma podemos desenhar o diagrama de extremos e quartis que representa os dados relativos ao número de artigos que os 100 clientes inquiridos:




Exame – 2019, Ép. especial

17.

17.1. Admitindo que o valor médio das 10 licitações é 34 euros, calculamos a soma ($S$) dos valores dos valores das 10 licitações:

$$\frac{S}{10} = 34 \Leftrightarrow S = 34 \times 10 \Leftrightarrow S = 340$$

Calculando a soma das 9 licitações indicadas no diagrama de caule e folhas, temos:

$$14 + 16 + 22 + 31 + 32 + 37 + 45 + 48 + 50 = 295$$

Assim, o valor em falta é dado pela diferença entre $S$ e a soma dos valores das 9 licitações:

$$340 - 295 = 45$$

Resposta: **Opção A**

17.2.

17.2.1. • Considerando que 48 artigos foram vendidos por um preço inferior ou igual ao 3.º quartil, ou seja, que 48 artigos correspondem a 75% da população, então o número de artigos vendidos por um preço mínimo de 40 euros ($n$), ou seja, superior ou igual à mediana pode ser 50% da população:

$$\frac{75}{48} = \frac{50}{n} \Leftrightarrow n = \frac{50 \times 48}{75} \Leftrightarrow n = 32$$

• Outra alternativa consiste em considerar a situação em que a mediana é calculada a partir de vários valores iguais, pelo que os valores iguais ou superior à mediana podem ser mais do 50%, por exemplo:

$$\underbrace{20 \text{ ... } 20}_{16}\underbrace{40 \text{ ... } 40}_{16}\underbrace{40 \text{ ... } 40 \ \ 59}_{16}\underbrace{61 \ \ 70 \text{ ... } 70}_{16}$$

Nestas condições, a distribuição apresentada verifica os dados do diagrama de extremos e quartis relativo ao mês de maio, e o número de artigos vendidos por um preço mínimo de 40 euros é $16 \times 3 = 48$

• Outra alternativa consiste em considerar a situação em que a mediana o 3.º quartil corresponde a mais do que 75% da população, por exemplo:

$$20 \ \ \underbrace{30 \text{ ... } 30}_{23} \ \ 40 \ \ \underbrace{60 \text{ ... } 60}_{23} \ \ 70$$

Nestas condições, a distribuição apresentada verifica os dados do diagrama de extremos e quartis relativo ao mês de maio, e o número de artigos vendidos por um preço mínimo de 40 euros é $23 + 2 = 25$

17.2.2. Identificando os valores indicados para as seis peças, nos diagramas respetivos, temos:

- Abril: 10 €(minímo) e 40 €(mediana)
- Julho: 40 €(1.º quartil) e 70 €(3.º quartil)
- Agosto: 2×90 €(máximo)

Assim o valor obtido com a venda das seis peças é:

$$10 + 40 + 40 + 70 + 2 \times 90 = 340 \text{ euros}$$

Exame – 2019, 2.ª Fase

18.

18.1. Como a média é relativa a 5 anos, temos que:

$$\frac{10\,980 + 12\,000 + a + 15\,000 + 16\,450}{5} = 13\,576 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 10\,980 + 12\,000 + a + 15\,000 + 16\,450 = 13\,576 \times 5 \Leftrightarrow 54\,430 + a = 67\,880 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a = 67\,880 - 54\,430 \Leftrightarrow a = 13\,450$$

18.2. Observando as linhas da tabela até ao valor de latência 21 ms, podemos calcular as frequências relativas acumuladas relativa com o objetivo de localizar o 1.º quartil e a mediana:

| Latência (ms) | N.º de testes | Frequência absoluta acumulada | Frequência relativa acumulada | |
|---|---|---|---|---|
| 9 | 18 | 18 | $\frac{18}{150} = 0{,}12$ | |
| 13 | 27 | $18 + 27 = 45$ | $\frac{45}{150} = 0{,}3$ | $Q_1 = 13$ |
| 17 | | 51 | $\frac{51}{150} = 0{,}34$ | |
| 21 | 42 | $51 + 42 = 93$ | $\frac{93}{150} = 0{,}62$ | $\tilde{x} = 21$ |
| ... | ... | ... | ... | |

Assim, de entre os diagramas de extremos e quartis apresentados, o único compatível com os valores calculados do primeiro quartil e da mediana é o da opção A.

Resposta: **Opção A**

Exame – 2019, 1.ª Fase

19. Inserindo numa lista da calculadora gráfica os valores:

$$46 \quad 48 \quad 48 \quad 50 \quad 50 \quad 50 \quad 54 \quad 56 \quad 56 \quad 56 \quad 57 \quad 62 \quad 62 \quad 63 \quad 65 \quad 69 \quad 74 \quad 74 \quad 74 \quad 79$$

e calculando as medidas estatísticas referentes a esta lista obtemos os seguintes valores para a média e o desvio padrão (com arredondamento às unidades):

$$\overline{x} = 59{,}65 \text{ e } s \approx 10$$

Assim, temos que o intervalo $]\overline{x} - s, \overline{x} + s[$ é:

$$]59{,}65 - 10\,;\, 59{,}65 + 10[ = ]49{,}65\,;\, 69{,}65[$$

Logo, existem 13 registos dentro deste intervalo, ou seja todos exceto os três abaixo de 50 e os quatro acima de 70.

Exame – 2018, Ép. especial

20. Começamos por identificar a marca de classe relativa a cada barra do histograma, inserir esses valores numa lista da calculadora gráfica e noutra lista a respetiva frequência absoluta, ou seja, a tabela seguinte:

| Marca de classe | Frequência absoluta simples |
|---|---|
| $\frac{100+150}{2} = 125$ | 16 |
| $\frac{150+200}{2} = 175$ | 24 |
| $\frac{200+250}{2} = 225$ | 8 |
| $\frac{250+300}{2} = 275$ | 32 |
| $\frac{300+350}{2} = 325$ | 20 |

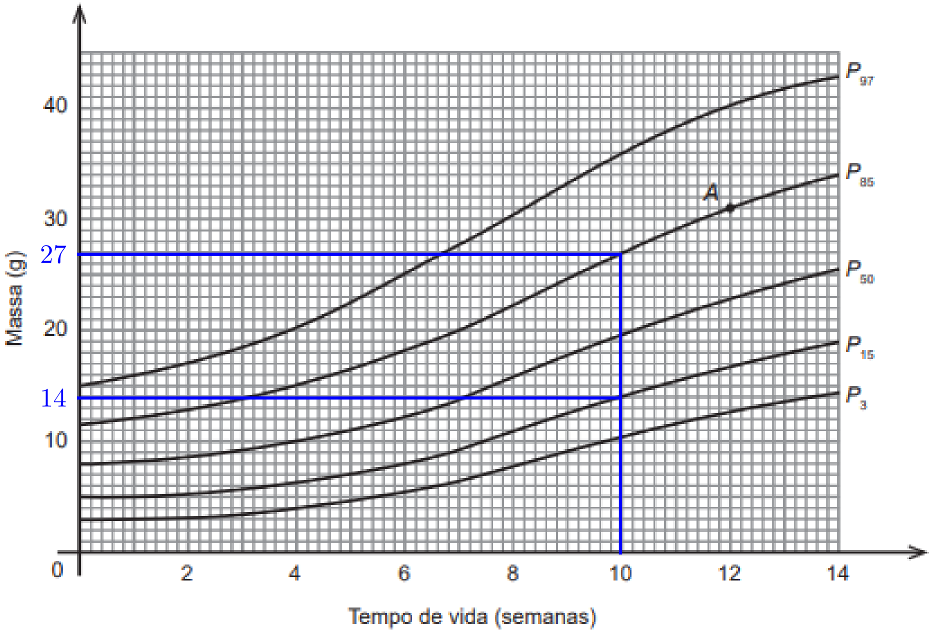
Calculando as medidas estatísticas referentes a estas duas listas obtemos o valor da média:

$$\overline{x} = 233$$

Identificando no histograma a classe modal, ou seja, a classe com maior frequência - a classe $[250{,}300[$ - podemos verificar que a média dos dados agrupados não pertence à classe modal.

Exame – 2018, 2.ª Fase

21. Observando o gráfico de percentis construído com base nos dados recolhidos, podemos observar que uma larva com 10 semanas de vida, com massa compreendida entre 14 e 27 gramas, está entre o percentil 15 e o percentil 85:




Como a percentagem de uma população compreendida entre os percentis 15 e 85 é: $85 - 15 = 70\%$, e a amostra tem 500 larvas, então o número esperado de larvas com massa compreendida entre 14 e 27 gramas, às 10 semanas é:

$$500 \times 0{,}7 = 350$$

Exame – 2018, 1.ª Fase

22. Inserindo numa lista da calculadora gráfica os valores:

435 379 65 60 276 59 43

e calculando as medidas estatísticas referentes a esta lista obtemos o valor para a média e o desvio padrão (com arredondamento às décimas):

$$\overline{x} \approx 188{,}1$$

Consultando a tabela podemos observar que apenas os filmes A, B e E, ou seja, 3 filmes, têm um custo de produção superior ao valor médio.

Resposta: **Opção C**

Exame – 2017, Ép. especial

23.

23.1. Ordenando os valores da tabela, temos:

$$\underbrace{184 < 200 < 208 < 224 < 232 < 240 < 256}_{50\%} < \underbrace{264 < 280 < 280 < 288 < 312 < 328 < 344}_{50\%}$$

Pelo que podemos verificar que o valor da medidana é a média entre os valores 256 e 264, ou seja entre os números de utilizadores da diversão na quarta-feira da segunda semana e na quinta-feira da segunda semana.

Resposta: **Opção C**

23.2. Inserindo numa lista da calculadora gráfica todos os valores da tabela:

184 200 208 224 232 240 256 264 280 280 288 312 328 344

e calculando as medidas estatísticas referentes a esta lista, obtemos o valor para a média diária do número de utilizadores desta diversão, nas duas primeiras semanas de 2015:

$$\overline{x} = 260$$

Como no ano seguinte a média, para o mesmo o período foi de 292,5, o valor médio acrescido é de $292{,}5 - 260 = 32{,}5$ visitantes.

Assim, o valor percentual correspondente ao aumento médio é:

$$\frac{260}{32{,}5} = \frac{100}{p} \Leftrightarrow p = \frac{100 \times 32{,}5}{260} \Leftrightarrow p = 12{,}5$$

Exame – 2017, 1.ª Fase

24.

24.1. Começamos por identificar a marca de classe relativa a cada barra do histograma, calcular a frequência relativa simples (a partir da frequência relativa acumulada, por subtrações sucessiva), multiplicar a frequência relativa simples pela marca de classe ($x_i \times fr_i$), como se apresenta na tabela seguinte:

| **Classes** | **Marca de classe** | **Frequência relativa acumulada (%)** | **Frequência relativa simples (%)** | $x_i \times fr_i$ |
|---|---|---|---|---|
| [20,30[ | $\frac{20+30}{2} = 25$ | 10 | 10 | $25 \times 10 = 250$ |
| [30,40[ | $\frac{30+40}{2} = 35$ | 30 | $30 - 10 = 20$ | $35 \times 20 = 700$ |
| [40,50[ | $\frac{40+50}{2} = 45$ | 80 | $80 - 30 = 50$ | $45 \times 50 = 2250$ |
| [50,60[ | $\frac{50+60}{2} = 55$ | 100 | $100 - 80 = 20$ | $55 \times 20 = 1100$ |

Assim, somando todos os produtos e dividindo por 100, obtemos uma aproximação à média de idades dos jornalistas:

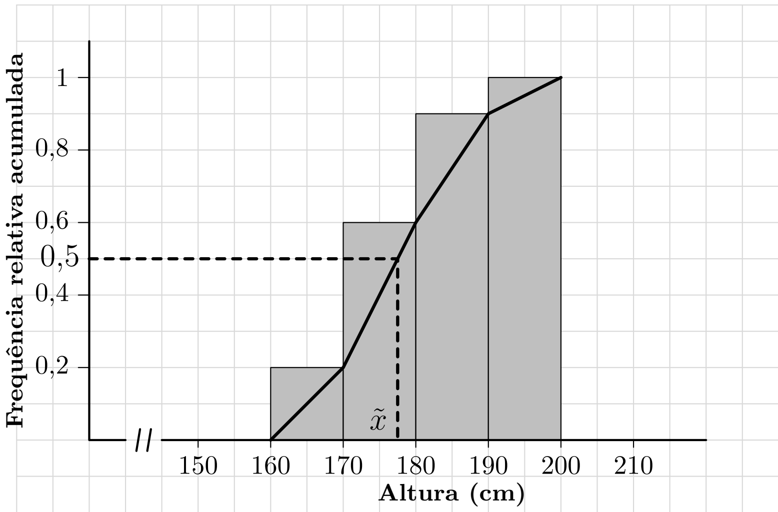
$$\overline{x} = \frac{250 + 700 + 2250 + 1100}{100} = 43$$

24.2. Começando por calcular o número total de jornalistas, as frequências relativas simples, e depois as frequências relativas acumuladas obtemos a tabela seguinte:

| Altura (em centímetros) | Número de jornalistas | Frequência relativa simples | Frequência relativa acumulada |
|---|---|---|---|
| **[160,170[** | 4 | $\frac{4}{20} = 0{,}2$ | $0{,}2$ |
| **[170,180[** | 8 | $\frac{8}{20} = 0{,}4$ | $0{,}2 + 0{,}4 = 0{,}6$ |
| **[180,190[** | 6 | $\frac{6}{20} = 0{,}3$ | $0{,}6 + 0{,}3 = 0{,}9$ |
| **[190,200[** | 2 | $\frac{2}{20} = 0{,}1$ | $0{,}9 + 0{,}1 = 1$ |
| Total | 20 | 1 | — |

Desta forma podemos observar que a classe mediana é a classe [170,180[, porque é a primeira classe que tem uma frequência relativa acumulada superior a 0,5.

A partir dos dados da tabela, desenhamos um histograma com as frequências relativas acumuladas e o polígono de frequências acumuladas.
Depois, identificando o ponto do polígono de frequências que corresponde à frequência relativa acumulada de valor 0,5, podemos determinar por processos geométricos o valor aproximado da altura mediana, como se apresenta no gráfico seguinte:




Exame – 2016, Ép. especial

25.

25.1. Como existem 15 registos (referentes aos 15 dias do festival), para que o número médio de elementos da organização presentes, por dia, nessa edição do MaréFest, seja 90, temos que a soma ($S$) de todos os registos é calculada por:

$$\frac{S}{15} = 90 \Leftrightarrow S = 90 \times 15 \Leftrightarrow S = 1350$$

Assim, subtraindo ao valor de $S$ os valores dos registos conhecidos, temos:

$$1350 - 75 - 77 - 77 - 80 - 80 - 83 - 88 - 93 - 99 - 100 - 100 - 102 - 105 - 105 = 86$$

Desta forma o registo a que se reporta o valor de $a$ representa o valor 86, ou seja:

$$a = 86 - 80 = 6$$

25.2. Inserindo numa lista da calculadora gráfica todos os valores do diagrama, e considerando $a = 8$:

75 77 77 80 80 83 88 88 93 99 100 100 102 105 105

e calculando as medidas estatísticas referentes a esta lista obtemos os valores do 1.º quartil e da mediana da distribuição de 2010:

$$q_1 = 80 \text{ e } \tilde{x} = 88$$

Observando o diagrama de extremos e quais apresentado, temos que os valores do 1.º quartil e da mediana da distribuição de 2011, são:

$$q_1 = 80 \text{ e } \tilde{x} = 100$$

Assim temos que o número de elementos da organização presentes, por dia, no recinto do MaréFest situados entre o 1.º quartil e a mediana, estão dispersos por um intervalo de amplitude $88 - 80 = 8$ na distribuição de 2010 e num intervalo de amplitude $100 - 80 = 20$ na distribuição de 2011.
Assim, podemos concluir que estes dados estão mais dispersos na distribuição de 2011, ou seja, estão mais concentrados na distribuição de 2010, pelo que a afirmação é verdadeira.

Exame – 2016, 1.ª Fase

26. Inserindo numa lista da calculadora gráfica todos os valores dados:

15 680 17 549 14 746 19 418 20 353 22 222 28 763 26 894 34 370 37 174 38 108 39 043

e calculando as medidas estatísticas referentes a esta lista, obtemos os valores para a média e o desvio padrão dos dados registados:

$$\overline{x} = 26193{,}33 \text{ e } \sigma = 8725{,}84$$

Exame – 2015, Ép. especial

27. Inserindo numa lista da calculadora gráfica os valores dos números de saquetas por caixa, e noutra lista as frequências absolutas simples, ou seja, o número de caixas:

| **Número de saquetas de açúcar por caixa** | **Frequência absoluta simples (Número de caixas)** |
|---|---|
| 693 | 1 |
| 714 | 1 |
| 735 | 2 |
| 756 | 3 |
| 819 | 5 |
| 840 | 8 |

e calculando as medidas estatísticas referentes à primeira lista, usando a segunda como frequência, obtemos o valor do número médio de saquetas por caixa da amostra:

$$\overline{x} \approx 798{,}38$$

Assim, como o valor esperado era de 760 saquetas, devem ser retiradas $798 - 760 = 38$ saquetas de cada caixa, e desta forma, como se retiram o mesmo número de saquetas de açúcar a cada uma das caixas da amostra, a média será

$$\overline{x} \approx 798{,}38 - 38 \approx 760 \text{ saquetas}$$

Exame – 2014, 2.ª Fase

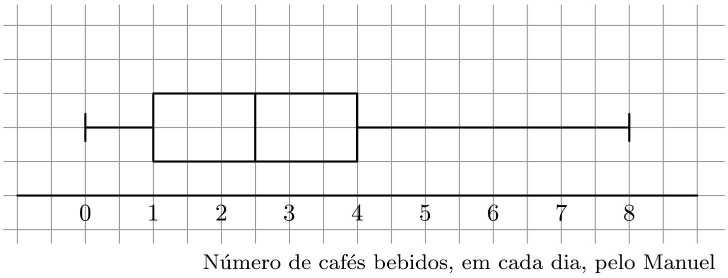
28. Inserindo numa lista da calculadora gráfica os dados relativos à amostra de 40 dias, ou seja, os valores

0,1,2,2,2,1,3,2,1,1,3,4,1,3,3,0,1,5,4,2,0,4,1,3,4,4,2,4,5,3,3,1,2,4,8,5,0,1,8,4

e calculando as medidas estatísticas referentes a esta lista obtemos os valores do mínimo, do 1.º quartil, da mediana, do 3.º quartil e do máximo:

| | |
|---|---|
| Mínimo | 0 |
| 1.º quartil | 1 |
| Mediana | 2,5 |
| 3.º quartil | 4 |
| Máximo | 8 |

E desta forma podemos desenhar o diagrama de extremos e quartis que representa a amostra:




Assim, comparando o diagrama obtido com o diagrama dado, podemos verificar que as diferenças são:

- O valor máximo (é 8 e no diagrama dado é 7,5)
- O valor do 3.º quartil (é 4 e no diagrama dado é 3)
- O valor da mediana (é 2,5 e no diagrama dado é 2)

Exame – 2014, 1.ª Fase

29. Relativamente à empresa X, inserindo numa lista da calculadora gráfica os valores dos vencimentos, e noutra lista o número de trabalhadores, ou seja a frequência absoluta de cada valor do vencimento:

| **Vencimento mensal (em euros)** | **N.º de trabalhadores Freq. absoluta** |
|---|---|
| 500 | 4 |
| 512 | 6 |
| 752 | 3 |
| 840 | 1 |
| 1520 | 1 |
| 3850 | 1 |

e calculando as medidas estatísticas referentes à primeira lista, usando a segunda como frequência, obtemos os valores da média e do desvio padrão dos vencimentos mensais dos trabalhadores da empresa X:

$$\overline{x} = 846{,}13 \text{ e } \sigma = 842{,}74$$

Procedendo da mesma forma para dados relativos à empresa Y, ou seja, inserindo na calculadora gráfica as listas:

| **Vencimento mensal (em euros)** | **N.º de trabalhadores Freq. absoluta** |
|---|---|
| 750 | 5 |
| 870 | 10 |
| 1088 | 1 |

obtemos os valores da média e do desvio padrão dos vencimentos mensais dos da empresa Y:

$$\overline{x} = 846{,}13 \text{ e } \sigma = 85{,}79$$

Assim, temos que o valor médio dos vencimentos nas duas empresas é igual (porque a média é igual), mas a dispersão dos valores dos vencimentos é maior na empresa X (porque o desvio padrão é maior), ou seja, os valores dos vencimentos estão mais concentrados, em torno do valor médio, na empresa Y.

Exame – 2013, Ép. especial

30. Como existem 12 registos, para que a média do número de habitantes por cada ponto de acesso seja 512,5, temos que a soma ($S$) de todos os registos é calculada por:

$$\frac{S}{12} = 9512{,}5 \Leftrightarrow S = 512{,}5 \times 12 \Leftrightarrow S = 6150$$

Assim, subtraindo ao valor de $S$ os valores dos registos conhecidos, obtemos o valor do registo em falta, ou seja o valor de $a$:

$$a = 6150 - 531 - 518 - 481 - 535 - 493 - 500 - 490 - 525 - 502 - 493 - 550 = 532$$

Assim, inserindo numa lista da calculadora gráfica todos os valores:

531 518 481 535 493 500 490 532 525 502 493 550

e calculando as medidas estatísticas referentes a esta lista, obtemos o valor do desvio padrão do número de habitantes servidos por cada um dos pontos de acesso desse concelho, em 2004, que arredondado às unidades, é:

$$\sigma = 21$$

Exame – 2013, 2.ª Fase

31. Inserindo numa lista da calculadora gráfica os valores dos números de filhos, e noutra lista as frequências absolutas simples:

| **Números de filhos** | **Frequência absoluta simples** |
|---|---|
| 1 | 66 |
| 2 | 46 |
| 3 | 38 |
| 4 | 38 |
| 5 | 12 |

e calculando as medidas estatísticas referentes à primeira lista, usando a segunda como frequência, obtemos os valores da média e do desvio padrão dos número de filhos da amostra:

$$\overline{x} = 2{,}42 \text{ e } s \approx 1{,}3$$

Procedendo da mesma forma com os dados corrigidos, ou seja substituindo os valores da primeira por 0, 1, 2, 3 e 4, e calculando novamente as medidas estatísticas referentes à primeira lista, usando a segunda como frequência, obtemos os novos valores da média e do desvio padrão dos número de filhos da amostra:

$$\overline{x} = 1{,}42 \text{ e } s \approx 1{,}3$$

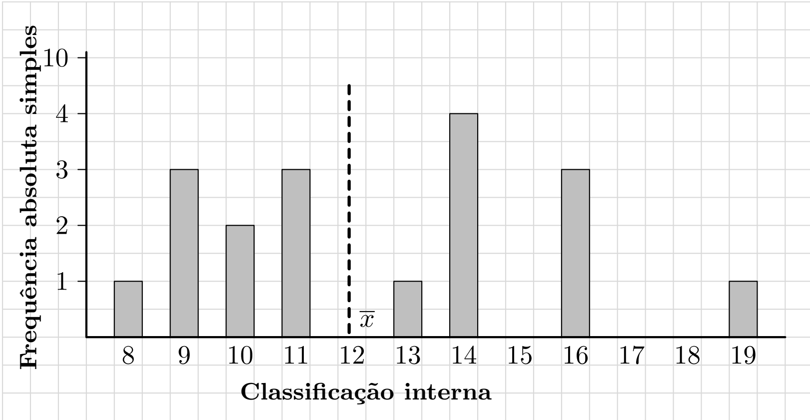
Assim temos que:

- a média dos dados corrigidos é inferior à média inicial em 1 unidade, porque todos os valores são exatamente inferiores em 1 unidade para a mesma frequência absoluta;
- o desvio padrão é igual nas duas situações, porque mede os desvios dos dados em relação à média, e considerando a alteração da média, a posição relativa de cada dado em relação à média é igual nas duas situações.

Exame – 2013, 1.ª Fase

32. Fazendo a contagem de cada um das classificações internas dos alunos da escola de Xisto na disciplina de Matemática Aplicada às Ciências Sociais, obtemos a seguinte tabela de frequências absolutas simples, o que nos permite traçar o diagrama de barras seguinte:

| Classificação interna | Frequência absoluta simples |
|---|---|
| 8 | 1 |
| 9 | 3 |
| 10 | 2 |
| 11 | 3 |
| 12 | 0 |
| 13 | 1 |
| 14 | 4 |
| 15 | 0 |
| 16 | 3 |
| 17 | 0 |
| 18 | 0 |
| 19 | 1 |




Inserindo numa lista da calculadora gráfica as classificações internas, e noutra lista as frequências absolutas simples, ou seja, os valores da tabela anterior, e calculando as medidas estatísticas referentes à primeira lista, usando a segunda como frequência, obtemos o valor aproximado da média: $\overline{x} \approx 12{,}4$

Representando o valor da média no diagrama de barras (a tracejado), podemos verificar que os dados se encontram dispersos e que a média não se encontra junto da maior concentração dos dados, pelo que a sua representatividade do conjunto destes dados é pouco significativa.

Exame – 2012, 2.ª Fase

33.

33.1. Como a amostra tem $6+10+6+2=24$ alunos, para que a média das idades seja 48,5, temos que a soma ($S$) de todos os registos é calculada por:

$$\frac{S}{24} = 48{,}5 \Leftrightarrow S = 48{,}5 \times 24 \Leftrightarrow S = 1164$$

Assim, subtraindo ao valor de $S$ os valores dos registos conhecidos, obtemos a soma das idades com o valor $p$:

$$1164 - 14 \times 6 - 15 \times 10 - 16 \times 6 = 834$$

Assim, como existem dois alunos com idade $p$, temos que o valor de $p$ é:

$$2 \times p = 834 \Leftrightarrow p = \frac{834}{2} \Leftrightarrow p = 417$$

33.2. Inserindo numa lista da calculadora gráfica os valores do número de irmãos, e noutra lista as frequências absolutas simples, ou seja, os valores identificados no gráfico como ”Número de alunos”:

| **Número de irmãos** | **Frequência absoluta (n.º de alunos)** |
|---|---|
| 1 | 3 |
| 2 | 6 |
| 3 | 8 |
| 4 | 3 |
| 5 | 0 |
| 6 | 4 |

e calculando as medidas estatísticas referentes à primeira lista, usando a segunda como frequência, obtemos os valores da média e do desvio padrão para a amostra da escola da Maria: $\overline{x} = 2{,}125$ e $s \approx 1{,}569$

Procedendo da mesma forma com os dados relativos à amostra de outra escola, temos as listas seguintes:

| **Número de irmãos** | **Frequência absoluta (n.º de alunos)** |
|---|---|
| 0 | 1 |
| 1 | 4 |
| 2 | 14 |
| 3 | 4 |
| 4 | 1 |
| 5 | 0 |

e calculando os valores da média e do desvio padrão, temos: $\overline{x} = 2$ e $s \approx 0{,}834$

Assim, podemos verificar que as duas amostras apresentam o um número médio de irmãos semelhante, mas os dados da amostra da escola da Maria estão mais dispersos em relação à média; ou seja, a variabilidade dos dados é maior na amostra escola da Maria, porque o valor do desvio padrão é maior.

Exame – 2012, 1.ª Fase

34.

34.1. Inserindo numa lista da calculadora gráfica os valores do número de leitores de DVD, e noutra lista as frequências absolutas simples, ou seja, os valores identificados no gráfico como ”Número de habitações”:

| **Número de leitores de DVD** | **Frequência absoluta (n.º de habitações)** |
|---|---|
| 0 | 330 |
| 1 | 450 |
| 2 | 47 |
| 3 | 173 |

e calculando as medidas estatísticas referentes à primeira lista, usando a segunda como frequência, obtemos os valores da mediana e dos quartis do número de leitores de DVD, por habitação:

$$\tilde{x} = 1;\ q_1 = 0 \text{ e } q_2 = 1$$

34.2. Usando as listas do item anterior e calculando as medidas estatísticas referentes à primeira lista, usando a segunda como frequência, obtemos ainda os valores da média e dos desvio padrão do número de leitores de DVD, por habitação, na amostra:

$$\overline{x} \approx 1{,}06 \text{ e } s \approx 1{,}03$$

Inserindo agora numa lista da calculadora gráfica os valores do número de televisores, e noutra lista as frequências absolutas simples, ou seja, os valores identificados no gráfico como "Número de habitações":

| **Número de leitores de DVD** | **Frequência absoluta (n.º de habitações)** |
|---|---|
| 0 | 5 |
| 1 | 417 |
| 2 | 450 |
| 3 | 128 |

e calculando as medidas estatísticas referentes à primeira lista, usando a segunda como frequência, obtemos ainda os valores da média e dos desvio padrão do número de televisores, por habitação, na amostra:

$$\overline{x} \approx 1{,}70 \text{ e } s \approx 0{,}69$$

Assim, relacionando o valor do desvio padrão com cada um dos gráficos, podemos observar que como os dados estão concentrados nos valores intermédios da distribuição, ou seja, em torno da média, o desvio padrão tem um valor mais baixo; e relativamente ao número de leitores de DVD, como existe uma quantidade significativa de dados localizados em valores relativamente afastados da média, o valor do desvio padrão é, comparativamente ao anterior, mais elevado.

Exame – 2011, 2.ª Fase

35.

35.1. Inserindo numa lista da calculadora gráfica os valores do número de livros lidos, e noutra lista as frequências absolutas simples, ou seja, os valores identificados no gráfico como "Número de alunos":

| **Número de livros lidos** | **Frequência absoluta (n.º de alunos)** |
|---|---|
| 1 | 10 |
| 2 | 8 |
| 3 | 6 |
| 7 | 4 |
| 8 | 3 |
| 10 | 1 |
| 11 | 3 |
| 12 | 5 |

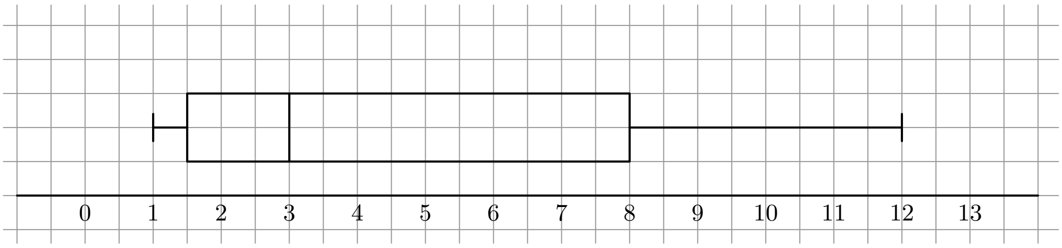
e calculando as medidas estatísticas referentes à primeira lista, usando a segunda como frequência, obtemos o valor da média para os 40 alunos da escola, arredondada às unidades: $\overline{x} \approx 5$

Assim podemos verificar que a média, nesta amostra, não é um bom indicador do *número de livros lidos por aluno*, nas férias de Verão, porque o valor da média não se encontra junto da maior concentração dos dados, o que acontece devido ao facto da maior parte dos dados não se localizar junto do centro da distribuição, onde se situa o valor da média.

35.2. Usando as listas do item anterior e calculando as medidas estatísticas referentes à primeira lista, usando a segunda como frequência, obtemos ainda os valores do mínimo, do 1.º quartil, da mediana, do 3.º quartil e do máximo:

| | |
|---|---|
| Mínimo | 1 |
| 1.º quartil | 1,5 |
| Mediana | 3 |
| 3.º quartil | 8 |
| Máximo | 12 |

E desta forma podemos desenhar o diagrama de extremos e quartis:




Número de livros lidos

Da observação do diagrama podemos verificar que os dados se encontram mais concentrados para os valores mais baixos, ou seja, os 50% dos dados com valores inferiores estão dispersos entre os valores 1 e 3, e os 50% dos dados com valores maiores estão dispersos entre os valores 3 e 12.

Podemos ainda observar que a distribuição é bastante assimétrica, porque a concentração de dados à esquerda da mediana é significativamente maior do que a concentração dos dados à direita da mediana.

35.3. Se cada um dos alunos envolvidos aumentar em 1 o número de livros lidos, a repercussão desta alteração sobre os valores da média e da mediana é um aumento de 1 unidade em ambas as medidas. Esta alteração pode ser verificada alterando a lista do número de livros lidos, acrescentando um valor aos valores constantes no gráfico, e na outra lista mantendo as frequências absolutas simples, ou seja, os valores identificados no gráfico como "Número de alunos":

| **Número de livros lidos** | **Frequência absoluta (n.º de alunos)** |
|---|---|
| 2 | 10 |
| 3 | 8 |
| 4 | 6 |
| 8 | 4 |
| 9 | 3 |
| 11 | 1 |
| 12 | 3 |
| 13 | 5 |

e calculando as medidas estatísticas referentes à primeira lista, usando a segunda como frequência, obtemos novos valores para a média e para a mediana, que se constatam ser superiores em uma unidade relativamente aos calculados nos itens anteriores:

$$\overline{x} \approx 6 \text{ e } \tilde{x} = 4$$

Exame – 2011, 1.ª Fase

36. Inserindo numa lista da calculadora gráfica os valores relativos à taxa de alfabetização de adultos, relativos aos sete países:

$$15{,}4 \quad 74{,}8 \quad 43{,}5 \quad 17{,}8 \quad 11{,}5 \quad 89{,}6 \quad 61{,}2$$

e calculando as medidas estatísticas referentes a esta lista, obtemos o valor, arredondado às décimas, para o valor médio, em percentagem:

$$\overline{x} \approx 44{,}8$$

Exame – 2010, 2.ª Fase

37. Para podermos proceder de acordo com a informação inicial, calculamos a média das quantias depositadas:

$$\overline{x} = \frac{720 + 800 + 910}{3} = \frac{2430}{3} = 810 \text{ €}$$

Assim, de acordo com a informação inicial, se adicionarmos $k$ euros ao depósito de cada um dos jovens a média também aumenta $k$ euros, pelo que o valor de $k$ a oferecer a cada uma dos jovens para que a média das quantias depositadas se fixe em €1100 é:

$$k = 1100 - 810 = 290$$

Exame – 2010, 1.ª Fase

38. Inserindo numa lista da calculadora gráfica os valores do número de mensagens recebidas pelos alunos da turma A, e noutra lista as frequências absolutas:

| **N.º de mensagens recebidas** | **Frequência absoluta** |
|---|---|
| 6 | 1 |
| 7 | 1 |
| 9 | 2 |
| 10 | 3 |
| 11 | 1 |
| 12 | 2 |
| 13 | 6 |
| 15 | 2 |
| 16 | 3 |
| 17 | 1 |
| 18 | 2 |
| 19 | 1 |

e calculando as medidas estatísticas referentes à primeira lista, usando a segunda como frequência, obtemos os valores da média e o do desvio padrão, com aproximação às centésimas:

$$\overline{x} = 12{,}96 \text{ e } \sigma \approx 3{,}39$$

Procedendo da mesma forma para os dados relativos aos alunos da turma B, ou seja, inserindo os dados da tabela:

| **N.º de mensagens recebidas** | **Frequência absoluta (n.º de alunos)** |
|---|---|
| 10 | 1 |
| 11 | 2 |
| 12 | 4 |
| 13 | 12 |
| 14 | 3 |
| 15 | 2 |
| 16 | 1 |

e calculando as medidas estatísticas referentes à primeira lista, usando a segunda como frequência, obtemos os valores da média e o do desvio padrão, com aproximação às centésimas:

$$\overline{x} = 12{,}96 \text{ e } \sigma = 1{,}28$$

Assim, podemos conjeturar que a constatação do António resultou da observação de que os dados relativos à turma B estão mais concentrados em torno dos valores centrais, sendo progressivamente menos abundantes, à medida que os dados se afastam da zona central, enquanto que nos dados da turma A, esta tendência é menos acentuada, havendo maior dispersão dos dados, o que justifica um valor maior do desvio padrão nos dados da turma A, e por isso valores diferentes para o desvio padrão.

Exame – 2009, 2ª Fase

39. Inserindo numa lista da calculadora gráfica os valores dos rendimentos mensais dos doze agregados familiares, ou seja, os valores da tabela:

1250 2800 1900 1650 1300 1800 1200 2500 1350 2100 1200 1500

e calculando as medidas estatísticas referentes aos valores desta lista, obtemos os valores da média e o da mediana:

$$\overline{x} = 1712{,}5 \text{ e } \tilde{x} = 1575$$

Fazendo a alteração do rendimento mensal do agregado familiar do António, ou seja, substituindo na lista da calculadora o valor 2800 por 8000 e calculando novamente as medidas estatísticas referentes aos valores desta lista, obtemos os valores da média e o da mediana, após a alteração:

$$\overline{x} = 2145{,}83 \text{ e } \tilde{x} = 1575$$

Como podemos verificar comparando os dois pares de valores, a alteração do rendimento mensal do agregado familiar do António produziu alterações no valor da média, mas não no valor da mediana.
Assim podemos identificar a média como uma medida de localização que tende a valorizar dados significativamente diferentes dos restantes e a mediana como uma medida de localização que tende a desvalorizar a importância de dados muito diferentes dos restantes.
Na situação concreta, a média não representa de forma adequada os dados, de uma perspetiva global, após a alteração, porque sobrevaloriza um dado em relação aos restantes. A mediana permite uma representação da maioria dos dados sem sobrevalorizar nenhum deles.

Exame – 2009, 1.ª Fase

40. Começando por determinar as frequências relativas simples de cada resposta para os rapazes(pela leitura do gráfico) e para as raparigas (calculando atráves dos resultados da tabela), obtemos a tabela seguinte:

| **Intensidade do gosto de ler** | **Freq. relativa simples (%) - sexo feminino -** | **Freq. relativa aumulada (%) - sexo masculino -** | **Freq. relativa simples (%) - sexo masculino -** |
|---|---|---|---|
| Não gosto nada de ler. | 3 | 12 | 12 |
| Gosto pouco de ler. | 11 | 38 | $38-12=26$ |
| Gosto de ler de vez em quando. | 49 | 82 | $82-38=44$ |
| Gosto muito de ler. | 31 | 97 | $97-82=15$ |
| Sou viciado na leitura. | 6 | 100 | $100-97=3$ |

Assim temos que a frase é verdadeira.
De facto a moda, tanto para rapazes como para raparigas, é a resposta "Gosto de ler de vez em quando", porque para ambos os sexos é a resposta com maior frequência relativa simples - 49% no caso das raparigas e 44% no caso dos rapazes.
Por outro lado as respostas que evidenciam gosto pela leitura ("Gosto de ler de vez em quando", "Gosto muito de ler"e "Sou viciado na leitura") apresentam maiores frequências relativas nas raparigas ($49+31+6=86\%$) do que no caso dos rapazes ($44+15+3=62\%$), pelo que é razoável concluir que «as raparigas revelaram um maior gosto pela leitura do que os rapazes».

Exame – 2008, 2.ª Fase

41.

41.1. Inserindo numa lista da calculadora gráfica os 22 registos dos tempos de recolha:

86, 86, 87, 87, 87, 89, 89, 90, 90, 94, 94, 95, 95, 95, 95, 103, 103, 106, 106, 108, 111, 116

e calculando as medidas estatísticas referentes a esta lista, obtemos os valores para o valor médio e para o desvio padrão (arredondados às décimas):

$$\overline{x} = 96 \text{ e } s \approx 8{,}98$$

41.2. Assim, usando os valores calculados no item anterior, temos que o intervalo $]\overline{x} - s, \overline{x} + s[$ é:

$$]96 - 8{,}98 \,;\, 96 + 8{,}98[=]87{,}02 \,;\, 104{,}985[$$

Logo, podemos verificar que existem 12 registos que pertencem ao intervalo (89, 89, 90, 90, 94, 94, 95, 95, 95, 95, 103 e 103). Assim calculando a percentagem, $p$, arredondada às unidades, correspondente, temos:

$$\frac{22}{14} = \frac{100}{p} \Leftrightarrow p = \frac{14 \times 100}{22} \Leftrightarrow p \approx 55$$

Desta forma, temos que, nesta distribuição, 55% dos registos pertencem ao intervalo $]\overline{x} - s, \overline{x} + s[$.

Exame – 2008, 1.ª Fase

42. Em circunstâncias razoáveis a afirmação é falsa. Ou seja, observando que a mediana é 17, podemos afirmar que 50% dos alunos inquiridos têm 17 ou mais anos de idade.

Contudo, na situação especial de não existir qualquer aluno com 17 anos e existirem exatamente 150 alunos com 16 anos ou menos e 150 alunos com 18 anos ou mais, a mediana é 17, e, para amostras com estas características, a afirmação é verdadeira.

Exame – 2008, 1.ª Fase

43. Começamos por identificar a marca de classe relativa a cada classe de comprimentos dos parafusos, e introduzindo na calculadora os valores da marca de classe numa lista e as respetivas frequências absolutas noutra lista:

| **Marca de classe** | **Frequência absoluta** |
|---|---|
| $\frac{5,0+5,1}{2} = 5{,}05$ | 3 |
| $\frac{5,1+5,2}{2} = 5{,}15$ | 5 |
| $\frac{5,2+5,3}{2} = 5{,}25$ | 9 |
| $\frac{5,3+5,4}{2} = 5{,}35$ | 13 |
| $\frac{5,4+5,5}{2} = 5{,}45$ | 18 |
| $\frac{5,5+5,6}{2} = 5{,}55$ | 19 |
| $\frac{5,6+5,7}{2} = 5{,}65$ | 17 |
| $\frac{5,7+5,8}{2} = 5{,}75$ | 10 |
| $\frac{5,8+5,9}{2} = 5{,}85$ | 3 |
| $\frac{5,9+6,0}{2} = 5{,}95$ | 2 |
| $\frac{6,0+6,1}{2} = 6{,}05$ | 1 |

e calculando as medidas estatísticas referentes à primeira lista, usando a segunda como frequência, obtemos o valor aproximado para a média do comprimento dos parafusos da amostra selecionada, com aproximação às décimas:

$$\overline{x} \approx 5{,}5 \text{ cm}$$

Exame – 2007, 2.ª Fase

44. Como a percentagem de respostas em cada nível da escala é a frequência relativa, podemos calcular a frequência relativa acumulada:

| **Escala** | **Percentagem** | **Freq. relativa acumulada** |
|---|---|---|
| 1 | 10 | 10 |
| 2 | 12 | $10 + 12 = 22$ |
| 3 | 16 | $22 + 16 = 38$ |
| 4 | 17 | $38 + 17 = 55$ |
| 5 | 19 | $55 + 19 = 74$ |
| 6 | 12 | $74 + 12 = 86$ |
| 7 | 8 | $86 + 8 = 94$ |
| 8 | 4 | $94 + 4 = 98$ |
| 9 | 1 | $98 + 1 = 99$ |
| 10 | 1 | $99 + 1 = 100$ |

Assim, temos que:

- o primeiro quartil é 3, porque é a menor observação que tem frequência relativa acumulada superior a 25%
- a mediana é 4, porque é a menor observação que tem frequência relativa acumulada superior a 50%

Exame – 2006, 1.ª Fase