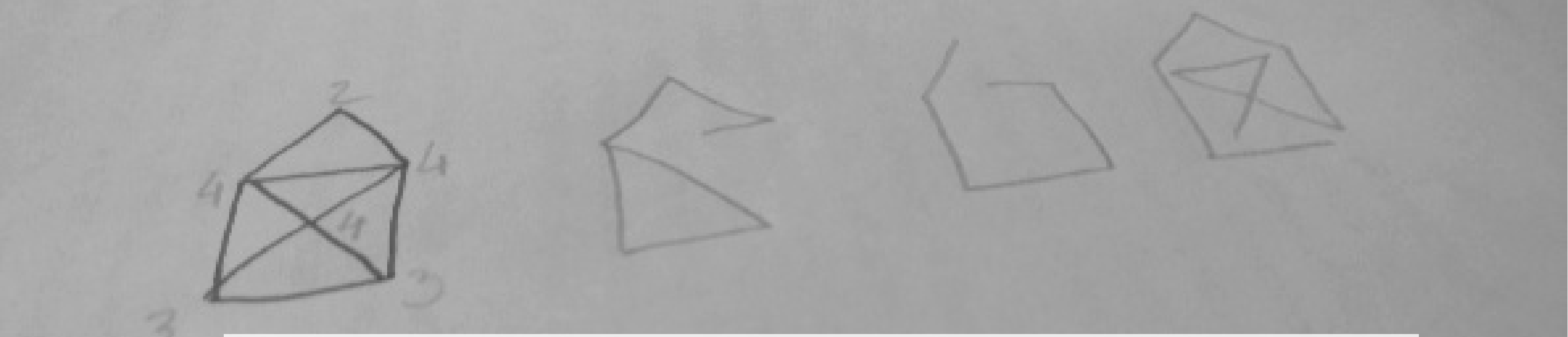


M.A.C.S. (11.º ano)

Teoria de grafos

Exercícios de Provas Nacionais - Propostas de resolução

1. Iniciar e terminar um percurso numa mesma levada, percorrendo todos os troços pedonais, incluindo o novo, sem repetir nenhum deles, corresponde à definição de um circuito de Euler. Tal só será possível se todos os vértices tiverem grau par.

   Assim, analisando as tabelas apresentas e considerando a construção de um novo troço entre as levadas L3 e L7, temos que:

   - Na tabela das opção A e B, existem vértices com grau ímpar que não são alterados com a inclusão da aresta entre os vértices L3 e L7 (o vértice L5 na opção A e os vértices L1 e L5 na opção B), pelo que não é possível definir um circuito de Euler com a inclusão da nova aresta.
   - Na tabela da opção C, todos os vértices têm grau par pelo que com a inclusão da aresta entre os vértices L3 e L7, estes vértices passariam a ter um grau ímpar e não seria possível definir um circuito de Euler.
   - Na tabela da opção D, apenas os vértices L3 e L7 têm grau ímpar pelo que com a inclusão da aresta entre estes vértices, todos passam a ter um grau par o que torna possível definir um circuito de Euler.

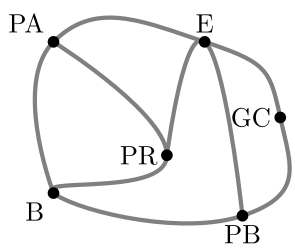
   Resposta: **Opção D**

Exame – 2024, Ép. especial

2. Como a Dora pretende visitar miradouros de altitude superior a 350 metros apenas se consideram os miradouros B, CG, E, PA, PB e PR.

   Assim, o percurso definido pela Dora, foi:

   I - PR (maior altitude). (Alternativas: PA(1818), E(1007) e B(860)).
   II - PA (Alternativas: PR(já visitado), E(1007) e B(860)).
   III - E (Alternativas: PR, PA (já visitados), CG(580) e PB(355)).
   IV - CG (Alternativas: E (já visitado), PB(355)).
   V - PB (Alternativas: E, CG (já visitados)). B(860)).
   VI - B (Alternativas: PR, PA, PB (já visitados)).



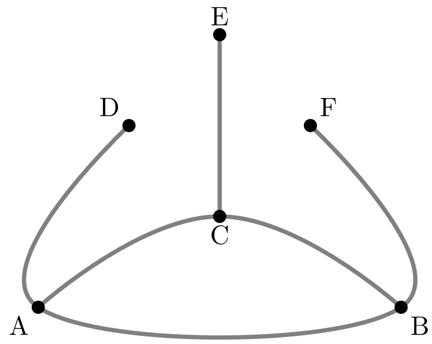
   Desta forma, o percurso definido pela Dora, que lhe permite visitar seis miradouros, é:

$$PR \to PA \to E \to CG \to PB \to B$$

Exame – 2024, Ép. especial

3. De acordo com a observação das cartas da figura, podemos traçar o grafo seguinte:

- Carta A - Conecta com as restantes com número 1 (B e C) e as restantes com círculo (D)
- Carta B - Conecta com as restantes com número 1 (A e C) e as restantes com quadrado (F)
- Carta C - Conecta com as restantes com número 1 (A e B) e as restantes com triângulo (E)
- Carta D - Conecta com as restantes com um círculo (A). Não existem outras com o número 2.
- Carta E - Conecta com as restantes com um triângulo (C). Não existem outras com o número 3.
- Carta F - Conecta com as restantes com um quadrado (B). Não existem outras com o número 4.

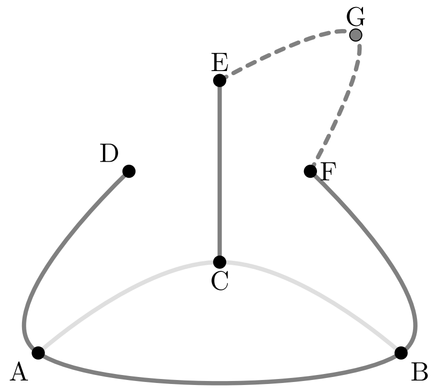


Acrescentando ao grafo anterior um vértice que represente a carta G, que ficará conectado ao vértice F, porque sabemos que tem um quadrado, e para averiguar a possibilidade de ter o número 3, deverá ser conectado também com o vértice E,obtemos o grafo da figura ao lado.

Assim, ignorando as arestas AC e BC, podemos observar que é possível que o algarismo presente na carta G seja o 3, e que, neste caso, um possível empilhamento das sete cartas, de acordo com as condições definidas, é:

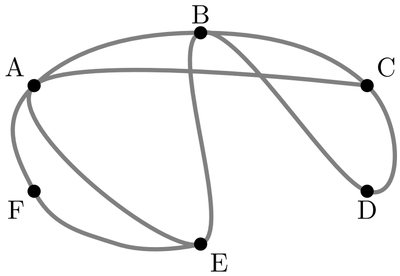
$$D \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow F \rightarrow G \rightarrow E \rightarrow C$$

(O percurso $D \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow E \rightarrow G \rightarrow F$, também satisfaz as condições do enunciado).



Exame – 2024, 2.ª Fase

4. De acordo as indicações, podemos construir um grafo como o que se representa a seguir, em que cada vértice representa uma letra e cada aresta uma peça:

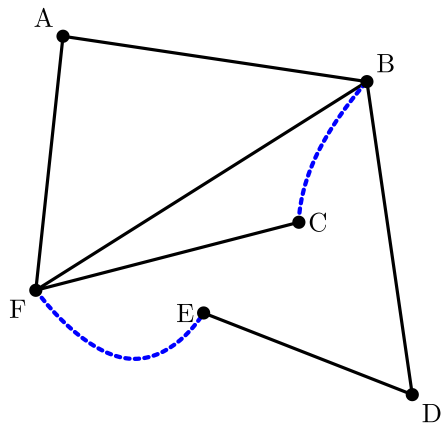


Pela análise do grafo podemos observar que existem dois vértices de grau ímpar, nomeadamente de grau 3 (os vértices C e E). Assim, o jogo só pode ser completado se a sequência começar com a letra C e terminar com a letra E (ou vice-versa), o que não corresponde ao pretendido porque a sequência deveria ser possível independentemente da primeira peça a ser jogada.

Desta forma, se o grafo tiver uma aresta adicional a ligar os vértices C e E, todos os vértices teriam grau par, permitindo criar um circuito de Euler, ou seja percorrer todas as arestas, apenas uma vez, e começando em qualquer vértice, pelo que a peça em falta deve conter as letras C e E.

Exame – 2024, 1.ª Fase

5. A partir do grafo apresentado, analisando o grau de cada de cada vértice, temos:



- A - Grau 2
- B - Grau 3
- C - Grau 1
- D - Grau 2
- E - Grau 1
- F - Grau 3

Iniciar e terminar o circuito de manutenção numa mesma estação, percorrendo todos os troços, incluindo os novos, sem repetir nenhum deles, corresponde à definição de um circuito de Euler. Tal só será possível se todos os vértices tiverem grau par, o que não acontece neste caso, porque existem quatro vértices com grau ímpar: C e E (grau 1) e F e B (grau 3).

Assim, o número mínimo de troços pedonais a construir é 2, correspondendo a novas arestas no grafo que liguem os vértices de grau ímpar, para que passem a ter grau par e assim para que seja possível definir circuitos de Euler.

Resposta: **Opção B**

Exame – 2023, 2.ª Fase

6. De acordo com a tabela e com a aplicação do algoritmo, obtemos a seguinte ordenação das arestas:

   I - Aresta M - S, peso 2h30 (menor peso)

   II - Aresta R - S, peso 2h40

   III - Aresta A - M, peso 2h50

   IV - Aresta A - V, peso 4h40

   (não se considera a aresta M - V, porque três arestas se iriam encontrar no vértice M)

   (não se considera a aresta S - V, porque três arestas se iriam encontrar no vértice S)

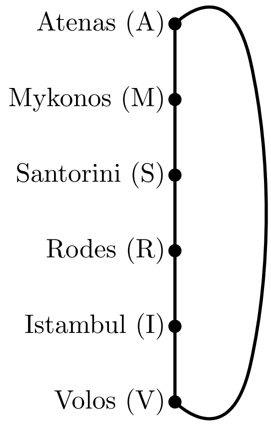
   (não se considera a aresta R - V, porque formaria um percurso fechado que não incluia todos os vértices)

   (não se considera a aresta A - S, porque três arestas se iriam encontrar no vértice A)

   (não se considera a aresta M - R, porque três arestas se iriam encontrar no vértice M)

   V - Aresta I - V - peso 14h50

   VI - Aresta I - R - peso 15h30



Desta forma, apresenta-se a seguir um grafo semelhante ao que poderá terá sido construído pela Luísa e um percurso que a Luísa poderá ter definido, com início e fim na cidade de Atenas:

Atenas $\rightarrow$ Mykonos $\rightarrow$ Santorini $\rightarrow$ Rodes $\rightarrow$ Istambul $\rightarrow$ Volos $\rightarrow$ Atenas

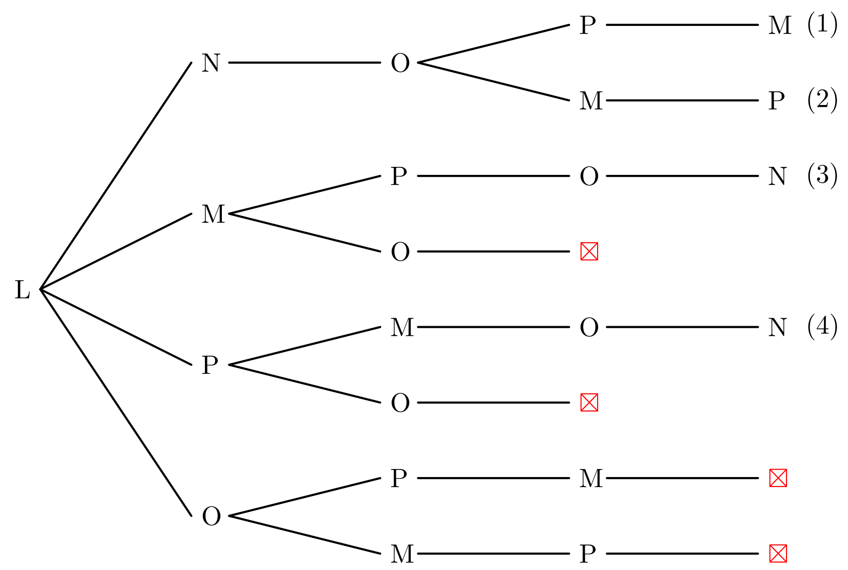
(o mesmo percurso em sentido inverso também satisfaz as condições do enunciado).

Desta forma é possível verificar que a Luísa não pode visitar os locais pela mesma ordem seguida pelos pais.

Exame – 2023, 2.ª Fase

7.

7.1. Analisando o grafo da figura, e determinando todas as visitas que se podem definir nas condições descritas, através de um diagrama em árvore, temos:



Assim, vem que:

O presidente da junta de freguesia verificou que existem **4** percursos possíveis, mas, se quiser visitar o expositor N depois de visitar o expositor O, apenas existe(m) **2** percurso(s) possível(is).
Verificou também que não poderia visitar o expositor M imediatamente a seguir ao expositor **N** e que, imediatamente a seguir a visitar o expositor N, poderia visitar o expositor **O** .

Logo, as correspondências corretas são:

- **I → c)**
- **II → b)**
- **III → a)**
- **IV → b)**

7.2. De acordo com a tabela e com a aplicação do algoritmo, iniciando a verificação no restaurante, $R1$, obtemos a seguinte ordenação dos troços e um grafo ponderado que representa o percurso escolhido pela aplicação do método descrito:

I - $R1$ - P (214 m)

II - P - O (200 m)

III - O - M (255 m)
(não se seleciona o troço O-P porque P já foi visitado)

IV - M - L (284 m)
(O, P e $R1$ já foram visitados)

IV - L - N (401 m)
(todos os restantes já foram visitados.)

Desta forma, o percurso que respeita as condições definidas, é:

$$R1 \to P \to O \to M \to L \to N$$

E a distância, em metros, percorrida pelo Rui, é:

$$214 + 200 + 255 + 284 + 401 = 1354$$

Exame – 2023, 1.ª Fase

8. De acordo com as capacidades indicadas na tabela, e como a comissão decidiu inspecionar apenas os estádios com capacidade superior a 85 000 espectadores, podemos observar que não serão inspecionados os estádios da Austrália e da França.

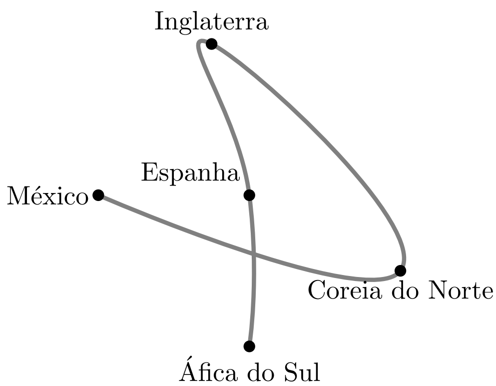
Assim, não considerando linhas e colunas relativas à Ausrália e França na tabela relativa às durações dos voos e com a aplicação do algoritmo, obtemos a seguinte ordenação das arestas e grafo da figura,onde as arestas representam os voos e os vértices a localização dos estádios:

I - Aresta Espanha-Inglaterra - duração 1h55 (menor tempo de voo)

II - Aresta Espanha-África do Sul - duração 10h25

III - Aresta Inglaterra- Coreia do Norte - duração 11h16
(não se considera a aresta México-Inglaterra, porque já selecionamos uma aresta com Inglaterra)
(não se considera a aresta África do Sul-Inglaterra, porque já selecionamos arestas com estes países)
(não se considera a aresta África do Coreia do Norte-Espanha, porque já selecionamos arestas com estes países)
(não se considera a aresta África do Coreia do Espanha-México, porque já selecionamos duas arestas com Espanha)

IV - Aresta Coreia do Norte-México - duração 15h25



Desta forma, o percurso a efetuar pela comissão, com início na África do Sul, é:

$$\text{África do Sul} \to \text{Espanha} \to \text{Inglaterra} \to \text{Coreia do Norte} \to \text{México}$$

Exame – 2022, Ép. especial

9. De acordo com a tabela e com a aplicação do algoritmo, obtemos a seguinte ordenação das arestas e grafo da figura:

   I - Aresta A-B - distância 310 (menor comprimento)

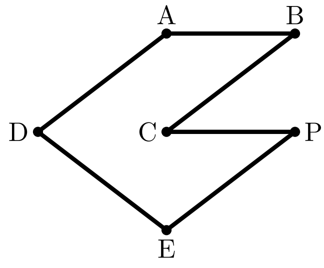
   II - Aresta A-D - distância 365

   III - Aresta C-P - distância 366
   (não se considera a aresta A-P, porque se encontrariam três arestas no vértice A)

   IV - Aresta E-P - distância 380
   (não se considera a aresta B-D, porque se formaria um percurso fechado sem todos os vértices B-D-A-B)

   V - Aresta B-C - distância 550
   (não se considera a aresta A-E, porque se encontrariam três arestas no vértice A)

   VI - Aresta D-E - distância 605



Desta forma, um itinerário, com início e fim no portão do parque, que passe pelos cinco ecopontos, é, por exemplo:

P - E - D - A - B - C - P

(o mesmo itinerário em sentido inverso também satisfaz as condições do enunciado).

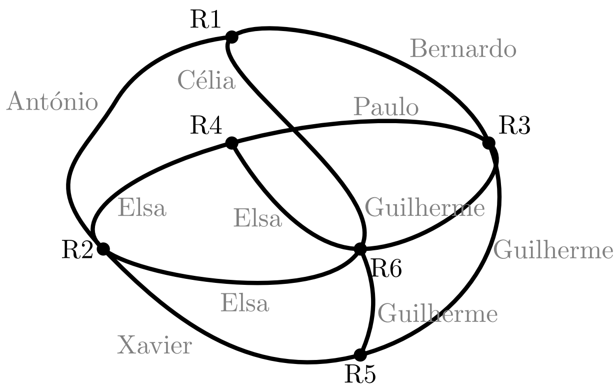
Exame – 2022, 2.ª Fase

10. De acordo com as informações da tabela podemos desenhar o grafo da figura seguinte, em que cada vértice representa uma reunião e cada aresta representa a impossibilidade de decorrer em simultâneo pela presença de pelo menos uma pessoa em ambas as reuniões.

Assim, podemos verificar que a reunião R6 não pode ocorrer sem simultâneo com qualquer outra, as reuniões R1, R4 e R5 podem decorrer em paralelo, porque não existem arestas entre os respetivos vértices, e, pela mesma razão, as restantes (R2 e R3) também podem ocorrer ao mesmo tempo.

Assim podemos definir os seguintes blocos de reuniões:

- R6
- R1, R4 e R5
- R2 e R3

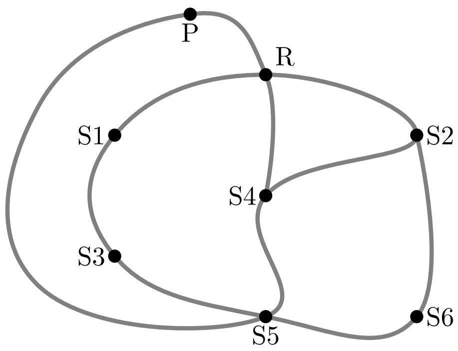


Assim, como cada reunião tem a duração de 90 minutos, e são necessários três conjuntos de reuniões, o tempo mínimo necessário para que as seis reuniões se realizem nas condições definidas é de $3 \times 90 = 270$ minutos, a que correspondem $\frac{270}{60} = 4{,}5$ horas.

Exame – 2022, 1.ª Fase

11. De acordo com a planta da rádio, considerando o pátio (P), a receção (R) e as seis salas como vértices e as portas como arestas, obtemos o grafo da figura seguinte, e o grau de cada de cada vértice:

- Pátio - Grau 2
- Receção - Grau 4
- Sala 1 - Grau 2
- Sala 2 - Grau 3
- Sala 3 - Grau 2
- Sala 4 - Grau 3
- Sala 5 - Grau 4
- Sala 6 - Grau 2



Para definir um percurso com início e fim no pátio, cruzando todas as portas e entrando em todos os espaços, sem cruzar nenhuma porta mais de uma vez, seria necessário definir um circuito de Euler, o que apenas seria possível se todos os vértices tivessem grau par.

Assim, como existem vértices de grau ímpar (os vértices correspondentes às salas 2 e 4) não é possível definir um percurso nas condições indicadas.

Exame – 2021, Ép. especial

12. De acordo com a tabela e com a aplicação do algoritmo, escolhendo inicialmente o edifício E1 e aplicando o algoritmo indicado, obtemos a seguinte ordenação das arestas e grafo ponderado da figura:

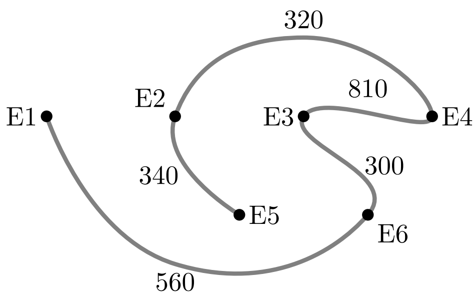
I - Aresta E1-E6 - comprimento 560

II - Aresta E6-E3 - comprimento 300

III - Aresta E3-E4 - comprimento 810
(não se considera a aresta E3-E6, porque o edifício E6 já foi escolhido)

IV - Aresta E4-E2 - comprimento 320

IV - Aresta E2-E5 - comprimento 340
(não se considera a aresta E2-E4, porque o edifício E4 já foi escolhido)



Assim, o comprimento mínimo previsto, em metros, do fio de luzes a instalar, é:

$$560 + 300 + 810 + 320 + 340 = 2330 \text{ m}$$

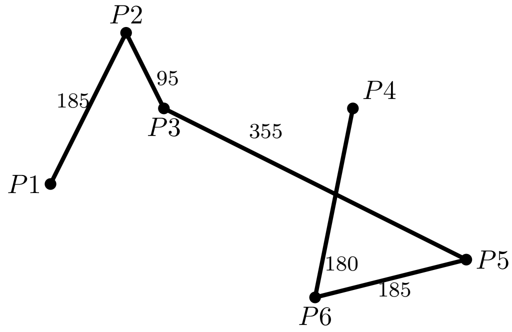
Como a instalação da iluminação decorativa terá um custo de 3,5 euros por cada metro, o custo total desta instalação é:

$$2330 \times 3{,}5 = 8155 \text{ euros}$$

Exame – 2021, 1.ª Fase

13. Pela observação do grafo e de acordo com a aplicação do algoritmo, obtemos a seguinte ordenação dos postos e grafo da figura:

   I - Posto $P4$ - Posto inicial
   II - Posto $P6$ - distância 180
   III - Posto $P5$ - distância 185
   IV - Posto $P3$ - distância 355
   IV - Posto $P2$ - distância 95
   V - Posto $P1$ - distância 185



Desta forma, a quantidade mínima, em quilómetros, de cabo de fibra ótica a renovar, é:

$$180 + 185 + 355 + 95 + 185 = 1000 \text{ km}$$

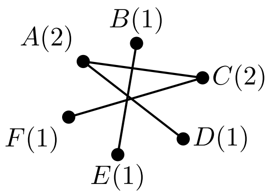
Exame – 2021, 1.ª Fase

14. Para que seja possível iniciar e terminar um percurso num mesmo canteiro, percorrendo todos os caminhos, incluindo o novo, sem repetir nenhum deles, tem que ser possível definir um circuto euleriano, o que só acontece se todos os vértices tiverem grau par.

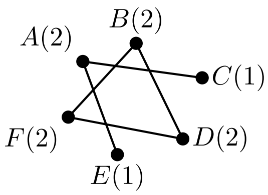
Assim, o único grafo que permite criar um circuito acrescentando uma única aresta, ligando vértices ainda não ligados, é o grafo da opção (C), acrescentando a aresta que liga os vértice A e F, tornado todos os vértices de grau par.

Na opção (A) acrescentar uma única aresta não permite que todos os vértices tenham grau par, na opção (B) acrescentar uma aresta a ligar os vértices de grau ímpar cria dois circuitos independentes e na opção (D) os vértices de grau ímpar já estão ligados por uma aresta.

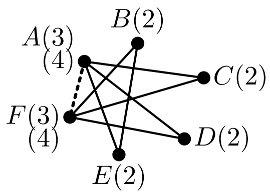
(A)



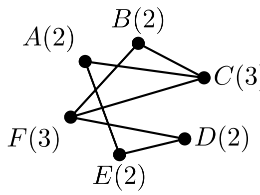
(B)



(C)



(D)



Exame – 2020, Ép. especial

15. De acordo com a tabela e com a aplicação do algoritmo, obtemos a seguinte ordenação das arestas e grafo da figura:

    I - Aresta F-G - comprimento 412 (menor comprimento)

    II - Aresta B-E - comprimento 446

    III - Aresta A-B - comprimento 500

    IV - Aresta A-G - comprimento 502

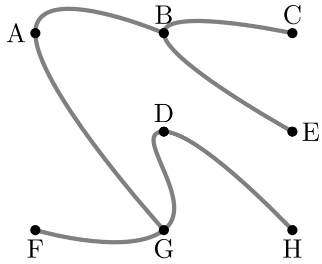
    IV - Aresta B-C - comprimento 505

    V - Aresta D-G - comprimento 721

    (não se consideram as aresta A-C e E-F, porque formam ciclos)

    VI - Aresta D-H - comprimento 952

    (não se consideram as arestas C-G, B-G, A-E e C-E porque formam ciclos)



Desta forma, a soma dos comprimentos da canalização é:

$$412 + 446 + 500 + 502 + 505 + 721 + 952 = 4038 \text{ m}$$

Exame – 2020, Ép. especial

16. De acordo com a tabela e com a aplicação do algoritmo, obtemos a seguinte ordenação das arestas:

   I - Aresta Munique - Salzburgo, peso 140 (menor peso)
   (não se considera a aresta Milão - Veneza, porque pertencem ao mesmo país)

   II - Aresta Milão - Zurique, peso 280

   III - Aresta Munique - Zurique, peso 340
   (não se considera a aresta Munique - Viena, porque iria interligar Salzburgo e Viena, pertencentes ao mesmo país)
   (não se considera a aresta Salzburgo - Zurique, porque três arestas se iriam ligar no vértice Zurique)
   (não se considera a aresta Salzburgo - Veneza, porque iria interligar Veneza e Milão, pertencentes ao mesmo país)
   (não se considera a aresta Munique - Milão, porque três arestas se iriam ligar no vértice Milão)
   (não se considera a aresta Munique - Veneza, porque três arestas se iriam ligar no vértice Munique)
   (não se considera a aresta Salzburgo - Milão, porque iria fechar um percurso sem incluir o vértice Paris)
   (não se considera a aresta Veneza - Zurique, porque três arestas se iriam ligar no vértice Zurique)
   (não se considera a aresta Viena - Veneza, porque já foram selecionados vértices destes dois países)
   (não se considera a aresta Paris - Zurique, porque três arestas se iriam ligar no vértice Zurique)
   (não se considera a aresta Viena - Zurique, porque três arestas se iriam ligar no vértice Zurique)
   (não se considera a aresta Munique - Paris, porque três arestas se iriam ligar no vértice Munique)

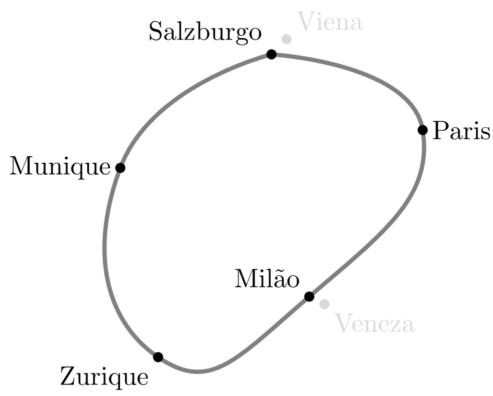
   V - Aresta Paris - Milão - peso 850
   (não se considera a aresta Viena - Milão, porque três arestas se iriam ligar no vértice Milão)

   VI - Aresta Salzburgo - Paris, peso 980

Desta forma, um percurso que Mariana poderá ter definido, com início e fim na cidade de Paris, é:

Paris → Milão → Zurique → Munique → Salzburgo → Paris

(o mesmo percurso em sentido inverso também satisfaz as condições do enunciado).



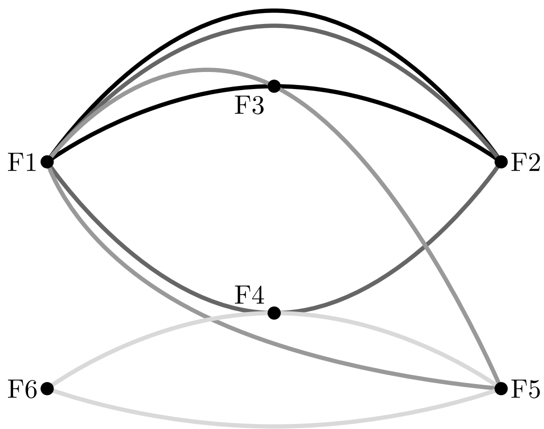
Exame – 2020, 2.ª Fase

17. De acordo com as informações da tabela podemos desenhar o grafo da figura ao lado, em que cada vértice representa um festival e cada aresta representa a presença de um dos jovens nos dois festivais relacionados .

Assim podemos verificar que a inexistência de arestas entre:

- os vértices F1 e F6
- os vértices F3 e F4
- os vértices F2 e F5

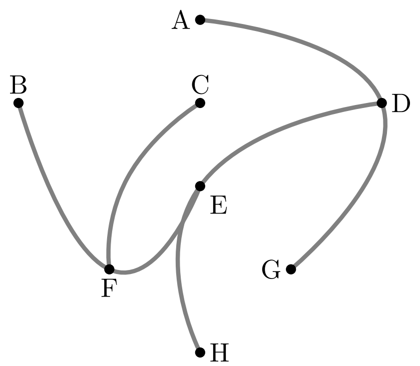
evidencia que estes 3 pares de festivais podem ter decorrido em simultâneo, pelo que o número mínimo de fins de semana em que os festivais podem ter decorrido é 3.



Exame – 2020, 1.ª Fase

18. De acordo com a tabela e com a aplicação do algoritmo, obtemos a seguinte ordenação das arestas e grafo da figura:

    I - Aresta B-F - comprimento 14 (menor comprimento)
    II - Aresta C-F - comprimento 15
    III - Aresta E-F - comprimento 16
    IV - Aresta D-G - comprimento 18
    (não se considera a aresta B-E, porque forma um ciclo)
    V - Aresta A-D - comprimento 20
    VI - Aresta D-E - comprimento 22
    (não se considera a aresta A-B, porque forma um ciclo)(não se considera a aresta B-C, porque forma um ciclo)
    VII - Aresta E-H - comprimento 30



Desta forma, a soma dos comprimentos das ligações é:

$$14 + 15 + 16 + 18 + 20 + 22 + 30 = 135 \text{ m}$$

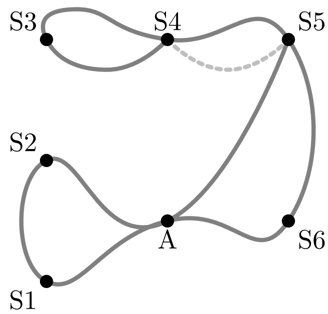
Como a substituição de cada metro de ligação interna tem o custo de 12 euros, o custo total da substituição é:

$$135 \times 12 = 1620 \text{ euros}$$

Exame – 2019, Ép. especial

19. De acordo com a planta do espaço, considerando o átrio (A) e as seis salas como vértices e as portas como arestas, obtemos o grafo da figura seguinte (ignorando a aresta a tracejado), e o grau de cada de cada vértice:

- Átrio - Grau 4
- Sala 1 - Grau 2
- Sala 2 - Grau 2
- Sala 3 - Grau 2
- Sala 4 - Grau 3
- Sala 5 - Grau 3
- Sala 6 - Grau 2

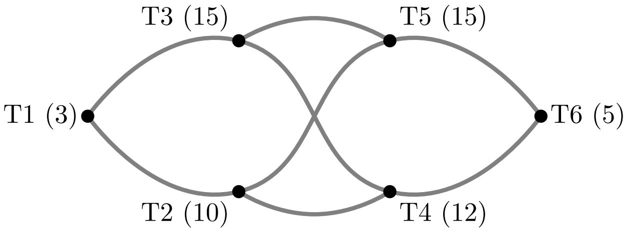


O presidente do Clube pretendia definir um percurso, com início e fim no Átrio, cruzando todas as portas e entrando em todas as salas, sem cruzar nenhuma porta mais de uma vez, o que corresponde à definição de um circuito de Euler. Tal só será possível se todos os vértices tiverem grau par, o que não acontece neste caso, porque existem dois vértices com grau ímpar: S4 (grau 3) e S5 (grau 3).

Assim, para tornar viável a pretensão inicial do presidente, a remodelação deverá acrescentar uma porta entre as sala 4 e 5 - assinalada no grafo pela aresta a tracejado. Desta forma os vértices S4 e S5 passariam a ter grau 4, o que significaria que todos os vértices teriam grau par e seria possível definir circuitos de Euler.

Exame – 2019, 2.ª Fase

20. De acordo com as informações da tabela podemos desenhar o grafo da figura ao lado, em que cada vértice representa uma tarefa e cada aresta representa uma relação de precedência. A ponderação de cada vértice representa o tempo necessário para a execução da tarefa.



Assim podemos verificar que podem ocorrem quatro sequências de tarefas:

- T1 $\rightarrow$ T2 $\rightarrow$ T4 $\rightarrow$ T6, com um tempo associado de $3 + 10 + 12 + 5 = 30$ min
- T1 $\rightarrow$ T2 $\rightarrow$ T5 $\rightarrow$ T6, com um tempo associado de $3 + 10 + 15 + 5 = 33$ min
- T1 $\rightarrow$ T3 $\rightarrow$ T4 $\rightarrow$ T6, com um tempo associado de $3 + 15 + 12 + 5 = 35$ min
- T1 $\rightarrow$ T3 $\rightarrow$ T5 $\rightarrow$ T6, com um tempo associado de $3 + 15 + 15 + 5 = 38$ min

Como, em cada uma das sequências de tarefas as tarefas não referidas podem decorrer simultaneamente, o tempo mínimo, em minutos, necessário para realizar todas as tarefas que compõem a montagem da banca é 38 minutos, correspondente ao tempo necessário para a concretização da sequência com maior duração.

Exame – 2019, 1.ª Fase

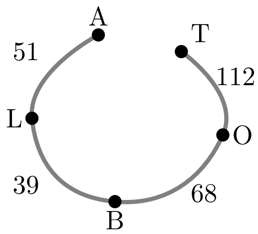
21. De acordo com a tabela, considerando as arestas por ordem crescente de ponderação, e desenhando um grafo que resulta da aplicação do algoritmo, temos:

I- Aresta BL - ponderação 39

II- Aresta LA - ponderação 51
(não se considera a aresta BA, porque forma um circuito)

III- Aresta BO - ponderação 68
(não se considera a aresta LO, porque forma um circuito)

IV- Aresta OT - ponderação 112



Observando o grafo, temos que:

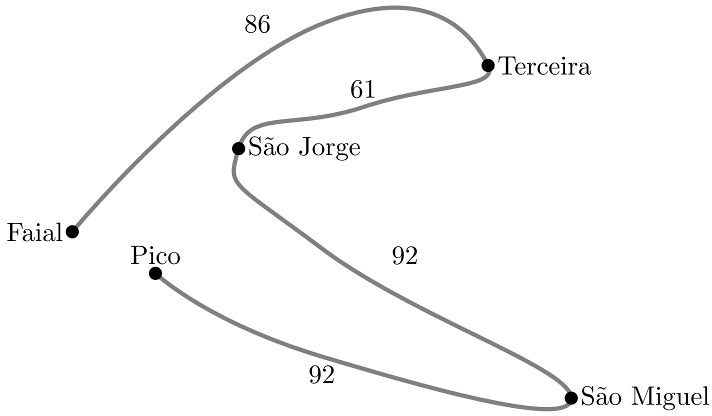
- Número de vértices: 5
- Número de arestas: 4=5-1
- Ponderação total: $39 + 51 + 68 + 112 = 270$

Desta forma, nas condições do enunciado, o projeto de iluminação deve contemplar na sua fase inicial 270 km de estrada.

Exame – 2018, Ép. especial

22. De acordo com o grafo, iniciando o percurso na ilha do Faial e usando o método descrito, excluindo as ilhas de Santa Maria, Graciosa, Flores e Corvo, por terem menos de 6000 habitantes, obtemos a seguinte ordenação esquematizada no grafo da figura:

- Faial - Terceira (86€)
- Terceira - São Jorge (61€)
- São Jorge - São Miguel (92€)
- São Miguel - Pico (92€)



E assim o custo mínimo em deslocações aéreas de cada elemento da companhia de teatro na sua digressão pelo arquipélago dos Açores, determinado a partir da aplicação do algoritmo é:

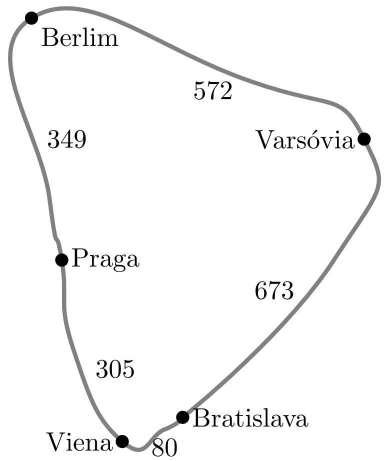
$$86 + 61 + 92 + 92 = 331€$$

Exame – 2018, 2.ª Fase

23. De acordo com a tabela e com a aplicação do algoritmo, obtemos a seguinte ordenação das arestas e grafo da figura:

I- Aresta Bratislava-Viena - ponderação 80 (a aresta com menor peso)
II- Aresta Praga-Viena - ponderação 305
III- Aresta Berlim-Praga - ponderação 349
IV- Aresta Berlim-Varsóvia - ponderação 572
V- Aresta Bratislava-Varsóvia - ponderação 673

(não se considera a aresta Bratislava-Praga, porque fecharia um percurso sem incluir o vértice Berlim, nem a aresta Berlim-Varsóvia porque iria fechar um percurso sem que todos os vértices estivessem incluídos).



Desta forma, um percurso que Mariana poderá ter definido, com início e fim em Praga, é:

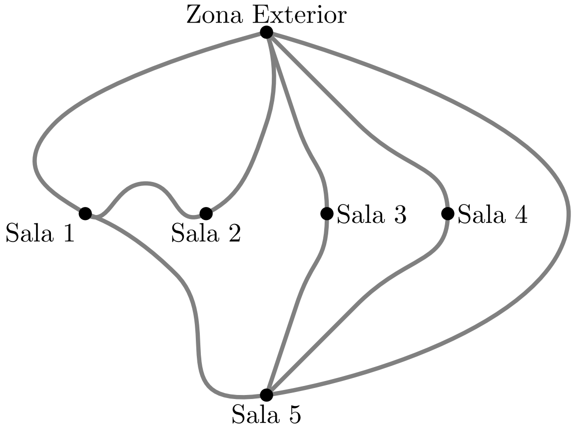
$$\text{Praga} \rightarrow \text{Berlim} \rightarrow \text{Varsóvia} \rightarrow \text{Bratislava} \rightarrow \text{Viena} \rightarrow \text{Praga}$$

(o mesmo percurso em sentido inverso também satisfaz as condições do enunciado).

Exame – 2018, 1ª Fase

24. De acordo com a planta do edifício, considerando as salas e o espaço exterior como vértices e as portas como arestas, obtemos o grafo da figura seguinte, e o grau de cada de cada vértice:

- Sala 1 - Grau 3
- Sala 2 - Grau 2
- Sala 3 - Grau 2
- Sala 4 - Grau 2
- Sala 5 - Grau 4
- Zona Exterior - Grau 5



Como se tentou encontrar um percurso que começa e termina no mesmo vértice (Sala 1), e utiliza cada aresta (porta) uma única vez, estamos a tentar encontrar um circuito de Euler, o que só é possível se todos os vértices tiverem grau par, o que não acontece neste caso, porque existem dois vértices com grau ímpar: Sala 1 (grau 3) e Zona Exterior(grau 5). Ou seja, o funcionário tem razão.

Assim, podemos verificar que não considerando a aresta que une os dois vértices de grau de ímpar, tornaria o percurso possível, porque todos os vértices teriam grau par, pelo que a porta que corresponde a esta aresta é aquela em que o funcionário terá necessariamente de passar duas vezes, ou seja a porta entre a Sala 1 e a Zona Exterior.

Exame – 2017, Ép. especial

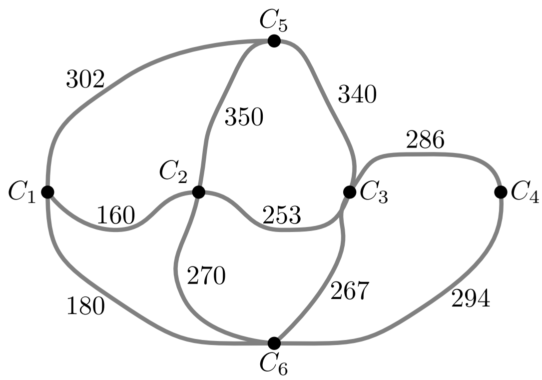
25. De acordo com a tabela obtemos o grafo da figura ao lado.

Iniciando o pedipaper se no posto de controlo C_5 e aplicando o algoritmo, temos a seguinte sequência de visita aos postos de controlo:

$$C_5 \rightarrow C_1 \rightarrow C_2 \rightarrow C_3 \rightarrow C_6 \rightarrow C_4$$

E assim, o comprimento do percurso, respeitando as condições definidas pela associação de estudantes, é:

$$302 + 160 + 253 + 267 + 294 = 1276 \text{ m}$$



Exame – 2017, 2.ª Fase

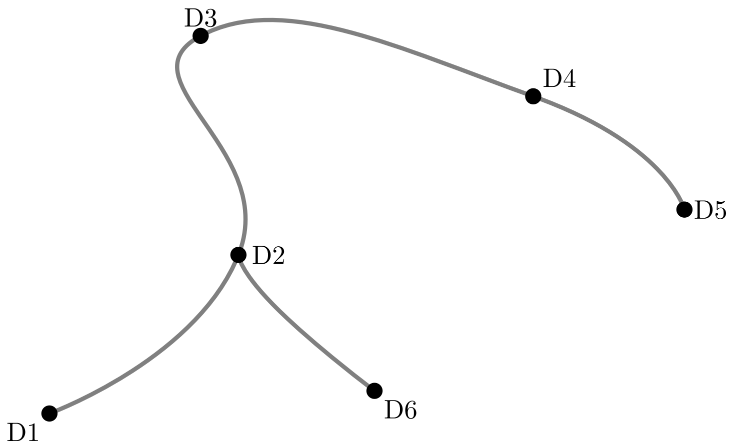
26. De acordo com o grafo apresentado e com a aplicação do algoritmo, selecionando inicialmente a diversão D1, obtemos a seguinte seleção das arestas e o grafo da figura seguinte:

I- Diversão D1
II- Aresta D1-D2 - ponderação 360
III- Aresta D2-D3 - ponderação 302
IV- Aresta D2-D6 - ponderação 308
V- Aresta D3-D4 - ponderação 480
VI- Aresta D4-D5 - ponderação 286

(a seleção de outra diversão na fase inicial do algoritmo não altera a árvore abrangente mínima obtida).

Assim, a quantidade mínima, em metros, de cabo elétrico que é necessário instalar, corresponde à soma das ponderações das arestas selecionadas, ou seja:

$$360 + 302 + 308 + 480 + 286 = 1736 \text{ m}$$



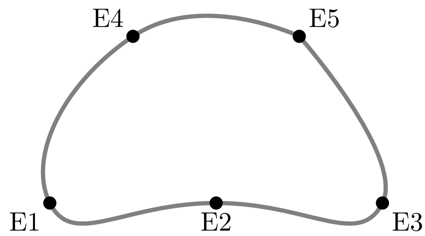
Exame – 2017, 1.ª Fase

27. Ordenando as distâncias entre os cinco edifícios registadas na tabela, temos:

$$\underset{E3-E5}{109} < \underset{E1-E4}{125} < \underset{E2-E3}{151} < \underset{E1-E2}{166} < \underset{E2-E5}{169} < \underset{E1-E3}{206} < \underset{E3-E4}{207} < \underset{E2-E4}{264} < \underset{E1-E5}{287} < \underset{E4-E5}{309}$$

Aplicando o algoritmo indicado, obtemos a seguinte seleção de arestas e o grafo da figura seguinte:

I- Aresta E3-E5
II- Aresta E1-E4
III- Aresta E2-E3
IIV- Aresta E1-E2
(não se considera a aresta E2-E5, porque fecharia um percurso sem que todos os vértices estivessem incluídos)
(não se consideram as arestas E1-E3 e E3-E4, porque se encontrariam três arestas no vértice E3)
(não se consideram as arestas E2-E4 e E1-E5, porque se encontrariam três arestas nos vértices E2 e E1, respetivamente)
IV- Aresta E4-E5

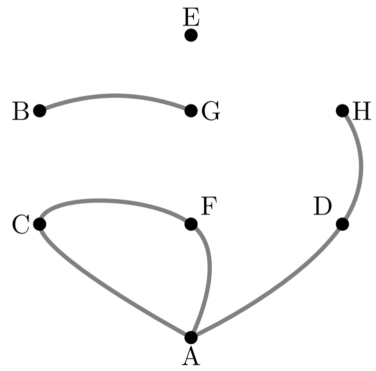


Assim, um possível percurso final definido pelo estafeta, com início e fim no edifício principal (E3), é:

$$E3 \rightarrow E5 \rightarrow E4 \rightarrow E1 \rightarrow E2 \rightarrow E3$$

Exame – 2016, Ép. especial

28. De acordo com a tabela obtemos o grafo da figura ao lado, em que cada vértice representa uma modalidade e cada aresta representa a compatibilidade dentro do mesmo bloco.



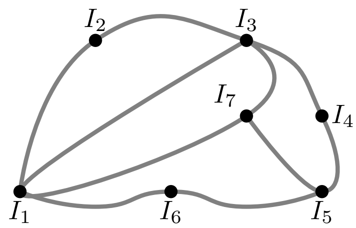
Assim temos que devem ser construídos blocos para as seguintes modalidades:

- Modalidade E (não é compatível com qualquer outra).
- Modalidades B e G.
- Modalidades H e D.
- Modalidades A, C e F.

Assim, temos que é necessário construir, no mínimo quatro blocos.

Exame – 2016, 2.ª Fase

29. De acordo com a imagem obtemos o grafo da figura ao lado, em que cada vértice representa uma infraestrutura e cada aresta representa um troço pedonal.



Determinando o grau de cada vértice, temos:

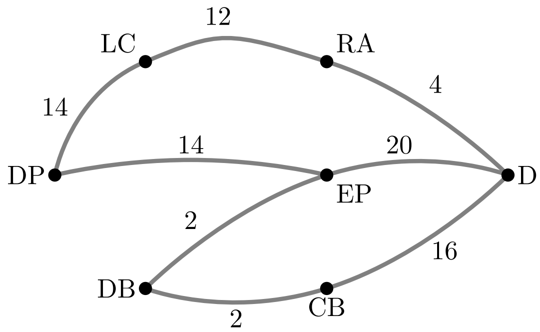
Vértices	I_1	I_2	I_3	I_4	I_5	I_6	I_7
Grau	4	2	4	2	3	2	3

Desta forma, como existem dois vértices com grau ímpar (os vértices I_5 e I_7), o grafo não admite circuitos de Euler, ou seja, circuitos que percorram todas as arestas, percorrendo cada aresta uma única vez. No contexto da situação descrita significa que não é possível percorrer todos os troços pedonais sem repetir nenhum iniciando e terminando a vistoria junto da mesma infraestrutura, ou seja, a conclusão do vigilante é verdadeira.

Considerando a duplicação da aresta que une os vértices I_5 e I_7, todos os vértices ficarão com grau par, o que significa que é possível identificar um circuito de Euler no grafo, ou seja, o troço pedonal a repetir pelo vigilante, que lhe permita percorrer todos os troços, iniciando e terminando a vistoria junto da mesma infraestrutura é o troço que une as infraestruturas I_5 e I_7.

Exame – 2016, 1.ª Fase

30. De acordo com as informações da tabela podemos desenhar o grafo da figura ao lado, em que cada vértice representa uma tarefa e cada aresta representa uma relação de precedência. A ponderação, em cada aresta representa o tempo necessário para a execução da tarefa da esquerda (e o tempo de espera necessário para a tarefa da direita).



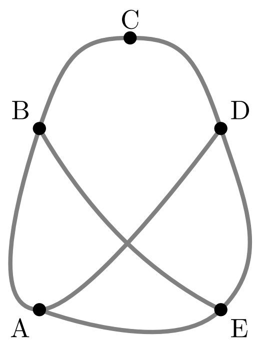
Assim podemos verificar que podem ocorrem quatro sequências de tarefas:

- DP $\rightarrow$ LC $\rightarrow$ RA $\rightarrow$ D, com um tempo associado de $14 + 12 + 4 = 30$ minutos
- DP $\rightarrow$ EP $\rightarrow$ D, com um tempo associado de $14 + 20 = 34$ minutos
- DB $\rightarrow$ EP $\rightarrow$ D, com um tempo associado de $2 + 20 = 22$ minutos
- DB $\rightarrow$ CB $\rightarrow$ D, com um tempo associado de $2 + 16 = 18$ minutos

Como cada uma das sequências de tarefas pode decorrer simultaneamente, o tempo mínimo, em minutos, necessário para realizar todas as tarefas que antecedem uma nova descolagem do avião, nas condições previstas na tabela anterior é 34 minutos, correspondente ao tempo necessário para a concretização da sequência com maior duração.

Exame – 2015, Ép. especial

31. De acordo com as informações da tabela podemos desenhar o grafo da figura ao lado, em que cada vértice representa uma cidade e cada aresta representa uma ligação rodoviária existente.



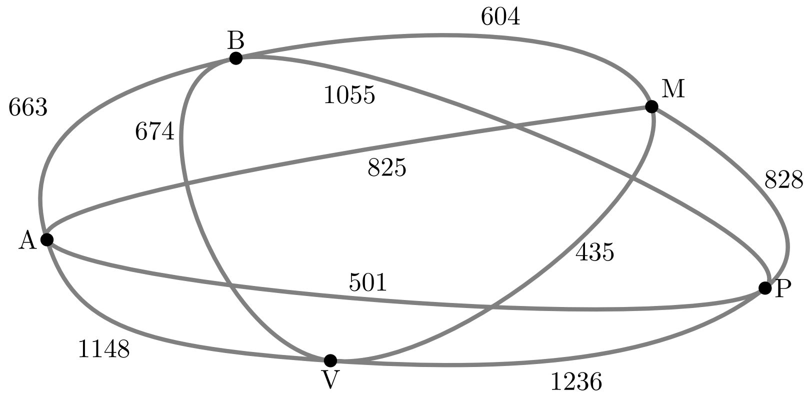
Identificando todos os percursos possíveis em cada alternativa, temos:

- **alternativa 1 :**
  - C $\rightarrow$ B $\rightarrow$ **A** $\rightarrow$ **E** $\rightarrow$ D $\rightarrow$ C
  - C $\rightarrow$ D $\rightarrow$ **A** $\rightarrow$ **E** $\rightarrow$ B $\rightarrow$ C
- **alternativa 2 :**
  - C $\rightarrow$ **D** $\rightarrow$ E $\rightarrow$ A $\rightarrow$ **B** $\rightarrow$ C
  - C $\rightarrow$ **D** $\rightarrow$ A $\rightarrow$ E $\rightarrow$ **B** $\rightarrow$ C

Como em ambas as alternativas é possível definir o mesmo número de percursos (dois percursos em cada alternativa), o Sr. Pereira não tem razão.

Exame – 2015, 2.ª Fase

32. Usando a informação da tabela obtemos o grafo da figura seguinte:



Aplicando o algoritmo indicado, obtemos a seguinte seleção de arestas:

I- Aresta M-V (435 km)

II- Aresta A-P (501 km)

III- Aresta B-M (604 km)

IV- Aresta A-B (663 km)

(não se considera a aresta B-V, porque se encontrariam três arestas no vértice B)

(não se consideram as arestas A-M, e M-P porque se encontrariam três arestas no vértice M)

(não se considera a aresta B-P, porque se encontrariam três arestas no vértice B)

(não se considera a aresta A-V, porque se encontrariam três arestas no vértice A)

V- Aresta P-V (1236 km)

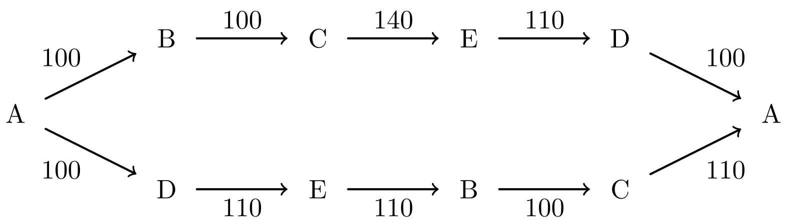
Assim, um possível percurso final definido pelo funcionário, com início e fim em Amesterdão (A), é:

$$A \rightarrow P \rightarrow V \rightarrow M \rightarrow B \rightarrow A$$

(o mesmo percurso em sentido inverso também satisfaz as condições do enunciado).

Exame – 2015, 1.ª Fase

33. Definindo os circuitos possíveis compatíveis com o algoritmo definido, considerando a escolha aleatória da primeira vivenda (B ou D), temos:



Assim, temos que a distância total de cada percuso é:

- Percurso A → B → C → E → D → A: $100 + 100 + 140 + 110 + 100 = 550$ metros
- Percurso A → D → E → B → C → A: $100 + 110 + 110 + 100 + 110 = 530$ metros

Logo, aplicando o algoritmo, a escolha aleatória, quando existem duas vivendas à mesma distância, pode levar o Francisco a percorrer uma distância maior do que seria necessário se optar pela vivenda B na primeira escolha.

Exame – 2014, 2.ª Fase

34. Ordenando as distâncias entre os sete pavilhões registadas na tabela, temos:

$$\underset{A3-A5}{100} < \underset{A3-A4}{150} < \underset{A2-A3}{190} < \underset{A2-A5}{200} < \underset{A4-A5}{220} = \underset{A5-A6}{220} < \underset{A4-A6}{240} < \underset{A2-A6}{340} < \underset{A1-A7}{350} < \underset{A1-A2}{500} < \underset{A6-A7}{650} < \underset{A1-A6}{730}$$

Aplicando o algoritmo indicado, obtemos a seguinte seleção de arestas e o grafo da figura seguinte:

I- Aresta A3-A5 (100 m)

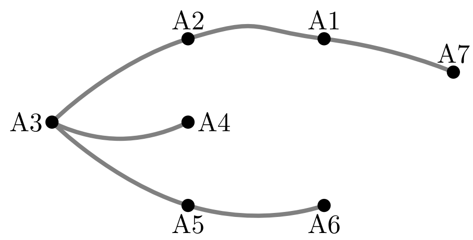
II- Aresta A3-A4 (150 m)

III- Aresta A2-A3 (190 m)
(não se consideram as aresta A2-A5 e A4-A5, porque levariam à formação de circuitos)

IV- Aresta A5-A6 (220 m)
(não se consideram as aresta A4-A6 e A2-A6, porque levariam à formação de circuitos)

V- Aresta A1-A7 (350 m)

VI- Aresta A1-A2 (500 m)



Como o número de arestas selecionadas é igual ao número de vértices menos um $(7-1=6)$, o algoritmo termina e o número mínimo de metros de cabo de fibra ótica necessários, é:

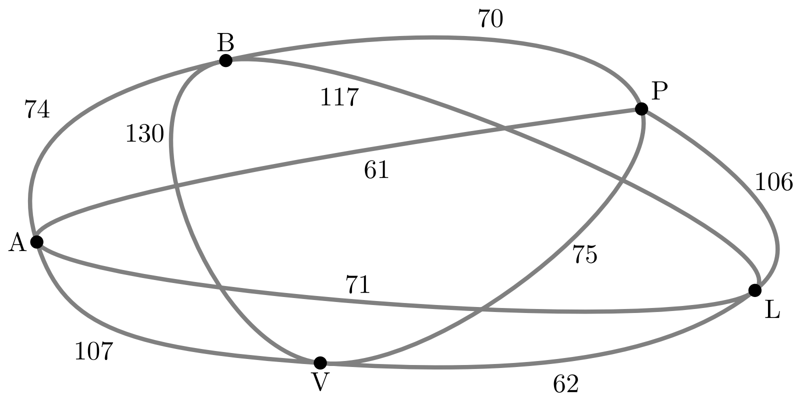
$$100 + 150 + 190 + 220 + 350 + 500 = 1510 \text{ metros}$$

Como a instalação de cabo de fibra ótica custa 3,40 euros por metro, o custo mínimo da instalação do cabo de fibra ótica, é:

$$1510 \times 3{,}40 = 5134 \text{ euros}$$

Exame – 2014, 1.ª Fase

35. Usando a informação da tabela obtemos o grafo da figura seguinte:



Aplicando o algoritmo indicado na opção 1, obtemos a seguinte percurso:

$$\text{Amarante} \xrightarrow{61} \text{Porto} \xrightarrow{70} \text{Braga} \xrightarrow{117} \text{Lamego} \xrightarrow{62} \text{Viseu} \xrightarrow{107} \text{Amarante}$$

Aplicando o algoritmo indicado na opção 2, temos que a ordenação das distâncias entre as cidades, registadas na tabela, é:

$$\underset{A-P}{61} < \underset{L-V}{62} < \underset{B-P}{70} < \underset{A-L}{71} < \underset{A-B}{74} < \underset{P-V}{75} < \underset{P-L}{106} < \underset{A-V}{107} < \underset{B-L}{117} < \underset{B-V}{130}$$

Selecionado os pares de cidades de acordo com o algoritmo, temos:

I- Amarante-Porto (61 km)

II- Lamego-Viseu (62 km)

III- Braga-Porto (70 m)

IV- Amarante-Lamego (71 km)

(não se considera o par Amarante-Braga porque Amarante apareceria três vezes)

(não se consideram os pares Porto-Viseu, nem Porto-Lamego, porque Porto apareceria três vezes)

(não se considera o par Amarante-Viseu porque Amarante apareceria três vezes)

(não se considera o par Braga-Lamego porque Lamego apareceria três vezes)

V- Braga-Viseu (130 km)

Assim, obtemos a seguinte percurso:

$$\text{Amarante} \xrightarrow{61} \text{Porto} \xrightarrow{70} \text{Braga} \xrightarrow{130} \text{Viseu} \xrightarrow{62} \text{Lamego} \xrightarrow{71} \text{Amarante}$$

Logo temos que o número total de quilómetros percorridos em cada uma das duas opções, é:

- Opção 1: $61 + 70 + 117 + 62 + 107 = 417$ km
- Opção 2: $61 + 70 + 130 + 62 + 71 = 394$ km

Pelo que podemos concluir que o Luís não tem razão, porque o percurso escolhido através do algoritmo da versão é o que tem um número inferior de quilómetros.

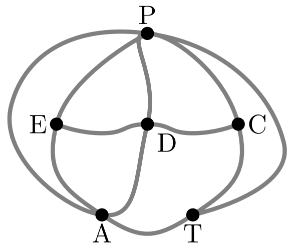
Exame – 2013, Ép. especial

36. Como se tentou encontrar um percurso que começa e termina no mesmo vértice (posto A), e utiliza cada aresta (trajeto) uma única vez, estamos a tentar encontrar um circuito de Euler, o que só é possível se todos os vértices tiverem grau par, o que não acontece neste caso, porque existem dois vértices com grau ímpar: Posto E (grau 3) e posto F (grau 3).
Assim, não é possível organizar a caminhada que cumpra, em simultâneo as três condições.

Exame – 2013, 2.ª Fase

37. De acordo com o esquema do espaço, considerando as salas e o pátio como vértices e as portas como arestas, obtemos o grafo da figura seguinte, e o grau de cada de cada vértice:

- P - Grau 5
- E - Grau 3
- D - Grau 4
- C - Grau 3
- A - Grau 4
- T - Grau 3

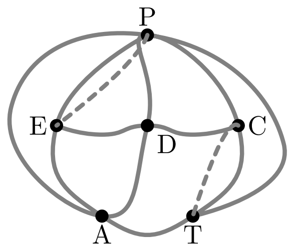


P - Pátio
E - Exposição
D - Espaço de dabate
C - Cantina
A - Auditório
T - Teatro

A funcionária não consegue efetuar uma ronda ao recinto começando e terminando essa ronda na cantina, percorrendo todas as portas e passando por cada porta uma única vez porque este objetivo corresponde a encontrar um circuito de Euler, o que só é possível se todos os vértices tiverem grau par, o que não acontece neste caso, porque existem quatro vértices com grau ímpar: E, C e T (todos com grau 3) e P (com grau 5).

Assim, a solução para o problema da funcionária, passa por duplicar arestas que permitam obter um grafo conexo com todos os vértices com grau par, por exemplo duplicando as arestas PE e CT (assinaladas a tracejado na figura seguinte), o que corresponde a passar nessas duas portas, por duas vezes, ficando desta forma todos os vértices com grau par, como se apresenta na figura seguinte:

- P - Grau 6
- E - Grau 4
- D - Grau 4
- C - Grau 4
- A - Grau 4
- T - Grau 4



Assim, uma possibilidade para organizar a ronda ao recinto começando e terminando na cantina, percorrendo todas as portas e passando o menor número de vezes possível por cada porta, é:

$$C \rightarrow T \rightarrow A \rightarrow P \rightarrow E \rightarrow D \rightarrow C \rightarrow P \rightarrow E \rightarrow A \rightarrow D \rightarrow P \rightarrow T \rightarrow C$$

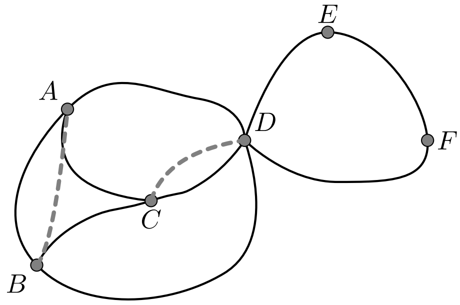
(o mesmo percurso em sentido inverso também satisfaz as condições do enunciado).

Exame – 2013, 1.ª Fase

38. O Carlos observou que é impossível passar por todos os trajetos diretos sem repetir nenhum, porque este objetivo corresponde a encontrar um circuito de Euler, o que só é possível se todos os vértices tiverem grau par, o que não acontece neste caso, porque existem quatro vértices com grau ímpar: A, B e C (todos com grau 3) e D (com grau 5).

Assim, a solução para o problema, passa por duplicar arestas que permitam obter um grafo conexo com todos os vértices com grau par, por exemplo duplicando as arestas AB e CD (assinaladas a tracejado na figura seguinte), o que corresponde a percorrer estes dois trajetos por duas vezes, ficando desta forma todos os vértices com grau par, como se apresenta na figura seguinte:

- A - Grau 4
- B - Grau 4
- C - Grau 4
- D - Grau 6
- E - Grau 2
- F - Grau 2



Exame – 2012, 2.ª Fase

39. Usando a informação da tabela e aplicando o algoritmo nos dois casos, temos que:

- **1.º caso:** a estrada que liga A a B **está** transitável:

$$\text{F} \xrightarrow{18} \text{A} \xrightarrow{28} \text{B} \xrightarrow{32} \text{D} \xrightarrow{48} \text{C} \xrightarrow{20} \text{F}$$

Comprimento total do percurso: $18 + 28 + 32 + 48 + 20 = 146$ km

- **2.º caso:** a estrada que liga A a B **não está** transitável:

$$\text{F} \xrightarrow{18} \text{A} \xrightarrow{30} \text{D} \xrightarrow{32} \text{B} \xrightarrow{36} \text{C} \xrightarrow{20} \text{F}$$

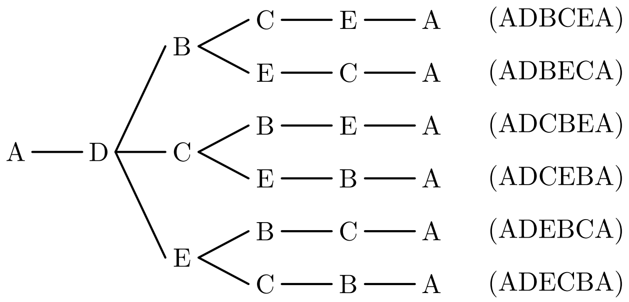
Comprimento total do percurso: $18 + 30 + 32 + 36 + 20 = 136$ km

Assim, podemos verificar que, aplicando o algoritmo apresentado, se a estrada que liga a aldeia A à aldeia B estiver intransitável, obtemos um percurso mais curto, pelo que a afirmação do anúncio é falsa.

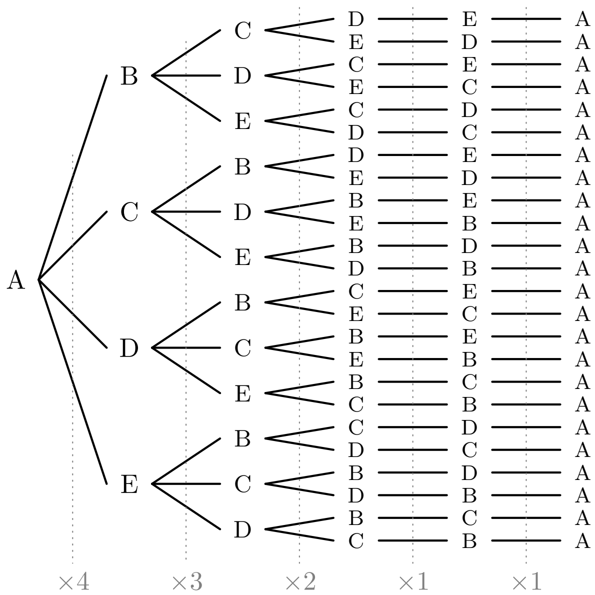
Exame – 2012, 1.ª Fase

40.

40.1. As voltas que têm início na sede, visitam primeiro o supermercado D, depois os restantes, sem repetir nenhum deles e voltam à sede, ou seja, todas as voltas possíveis para aquele dia, são:



40.2. Identificando todas as voltas que podem fazer parte da lista do Miguel, temos:



Assim, podemos ver que existem $1 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 \times 1 = 24$ percursos diferentes, mas como metade dos percursos corresponde à outra metade percorridos por ordem inversa, o número de voltas que podem fazer parte da lista do Miguel, é $\dfrac{24}{2} = 12$

Exame – 2011, 2.ª Fase

41.

41.1. Como o António pretende encontrar um percurso que começa e termina no mesmo vértice (posto A), e utiliza cada aresta (estrada) uma única vez, pretende definir um circuito de Euler, o que só é possível se todos os vértices tiverem grau par, o que não acontece neste caso, porque existem dois vértices com grau ímpar: C (grau 3) e F (grau 3).
Assim, não é possível satisfazer, em simultâneo, as pretensões do António.

41.2. Determinando o comprimento total da proposta do João, somando os pesos das arestas, temos:

$$1253 + 832 + 938 + 712 + 941 + 911 = 5587 \text{ metros}$$

Aplicando o algoritmo sugerido pelo José, temos:

- Passo 1: Arestas (B,E) (712 m) e (F,G) (832 m)
- Passo 2: Aresta (C,D) (911 m)
- Passo 3: Aresta (B,F) (938 m)
- Passo 4: Aresta (C,E) (941 m)
  (não se consideram as arestas (D,E) e (E,F) porque iriam fechar um circuito)
- Passo 5: Aresta (A,G) (1248 m)

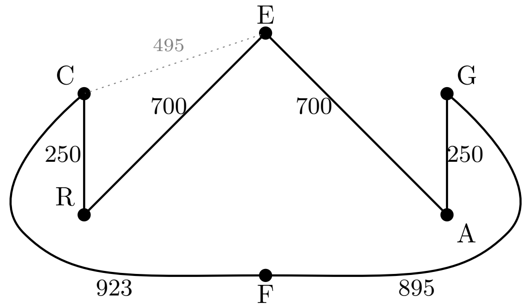
E assim, o comprimento total da ligação definida pela proposta do José, somando os pesos das arestas, é:

$$712 + 832 + 911 + 938 + 941 + 1248 = 5582 \text{ metros}$$

Assim, de modo a usar a menor extensão de cabo de fibra ótica, a empresa deve escolher a proposta do José, porque é a que tem um comprimento total menor.

Exame – 2011, 1.ª Fase

42. Como o António pretende encontrar um percurso que começa e termina no mesmo vértice (C), e percorrer o número mínimo de metros, não é necessário utilizar todos os trajetos. Como o grafo tem dois vértices com grau ímpar: C (grau 3) e E (grau 3), suprimindo a aresta (C,E), estes dois vértices também ficam com grau par e assim podemos obter um circuito de Euler, como indicado na figura ao lado.



Assim um percurso que satisfaz o que o António pretende, é:

$$C \xrightarrow{923} F \xrightarrow{895} G \xrightarrow{250} A \xrightarrow{700} E \xrightarrow{700} R \xrightarrow{250} C$$

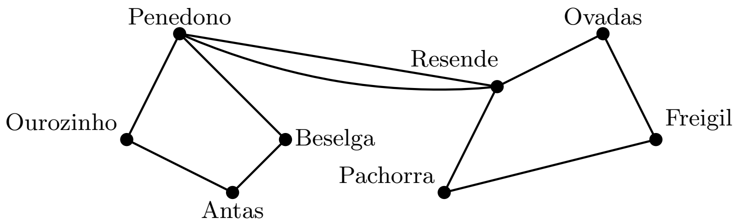
(o mesmo percurso em sentido inverso também satisfaz as condições do António).

Logo, o número de metros que ele tem de percorrer, é: $923 + 895 + 250 + 700 + 700 + 250 = 3718$ m

Exame – 2010, 2.ª Fase

43. Não é possível limpar todas as estradas representadas no grafo partindo e terminando de Beselga, percorrendo todas as estradas uma e uma só vez porque este objetivo corresponde a encontrar um circuito de Euler, o que só é possível se todos os vértices tiverem grau par, o que não acontece neste caso, porque existem dois vértices com grau ímpar: Penedono e Resende (ambos com grau 3).

    Assim, a é possível alterar a solução se acrescentar uma aresta que corresponde à duplicação da aresta Penedono-Resende, o que corresponde a passar nesta estrada, por duas vezes, como se apresenta na figura seguinte.



    Logo, como estes dois vértices passem a ter grau 4, obtemos um grafo conexo com todos os vértices com grau par, onde podemos definir vários circuitos de Euler, em particular dois com início e fim em Beselga, como pretendido.

Exame – 2010, 1.ª Fase

44.

44.1. Não é possível organizar um circuito que permita que um camionista da GNC percorra uma e uma só vez cada trajeto assinalado no grafo porque este objetivo corresponde a encontrar um circuito de Euler, o que só é possível se todos os vértices do grafo tiverem grau par, o que não acontece neste caso, porque existem vértices com grau ímpar: Faro (grau 1), Évora, Vila Real e Porto (todos com grau 3).

44.2. Identificando todos os trajetos entre estas cidades, partindo e regressando a Sines, temos:

Sines — Évora — Porto — Vila Real — Sines ($172 + 406 + 125 + 559 = 1262$ km)
Sines — Évora — Vila Real — Porto — Sines ($172 + 525 + 125 + 442 = 1264$ km)
Sines — Porto — Évora — Vila Real — Sines ($442 + 406 + 525 + 559 = 1932$ km)
Sines — Porto — Vila Real — Évora — Sines ($442 + 125 + 525 + 172 = 1264$ km)
Sines — Vila Real — Évora — Porto — Sines ($559 + 525 + 406 + 442 = 1932$ km)
Sines — Vila Real — Porto — Évora — Sines ($559 + 125 + 406 + 172 = 1262$ km)

Como os seis circuitos possíveis correspondem apenas a três pares, respetivamente percorridos pela ordem inversa, temos que o menor circuito tem a extensão de 1262 km.

Como o preço do transporte cobrado pela empresa GNC aos clientes é de € 2,00 por quilómetro e a empresa faz um desconto de 8%, o preço a pagar pelo menor circuito, é:

$$1262 \times 2 \times 0{,}92 = 2322{,}08 \text{ €}$$

Exame – 2009, 2.ª Fase

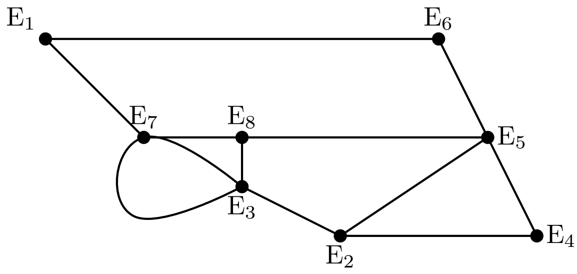
45.

45.1. Um dos percursos possíveis, com início em E_4 que termine em E_2 , passando por todos os ecopontos uma única vez, é:

$$E_4 \rightarrow E_5 \rightarrow E_6 \rightarrow E_1 \rightarrow E_7 \rightarrow E_8 \rightarrow E_3 \rightarrow E_2$$

45.2. Representado a informação do mapa recorrendo a um grafo, em que cada vértice representa um ecoponto e cada aresta um troço de rua, obtemos o grafo da figura seguinte, e o grau de cada de cada vértice:

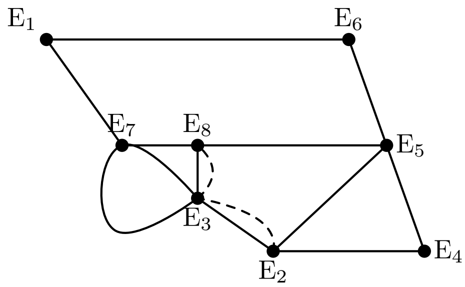
- E_1 - Grau 2
- E_2 - Grau 3
- E_3 - Grau 4
- E_4 - Grau 2
- E_5 - Grau 4
- E_6 - Grau 6
- E_7 - Grau 4
- E_8 - Grau 3



A impossibilidade de inspecionar todos os troços de rua, passando por cada um deles uma única vez corresponde a encontrar um circuito de Euler, o que só é possível se todos os vértices do grafo tiverem grau par, o que não acontece neste caso, porque existem vértices com grau ímpar: E_2 e E_8 (ambos com grau 3).

Assim, para determinar um percurso que se inicie e termine no ecoponto E_2 e que permita ao funcionário inspecionar todos os troços de rua, sendo o número de troços de rua a percorrer o menor possível, depende de duplicar arestas para tornar par o grau dos vértices com grau ímpar.

Como não existe uma aresta que ligue os vértices E_2 e E_8, podemos duplicar, por exemplo, as arestas (E_2, E_3) e (E_3, E_8), mantendo a paridade do grau do vértice E_3, como se representa na figura ao lado.



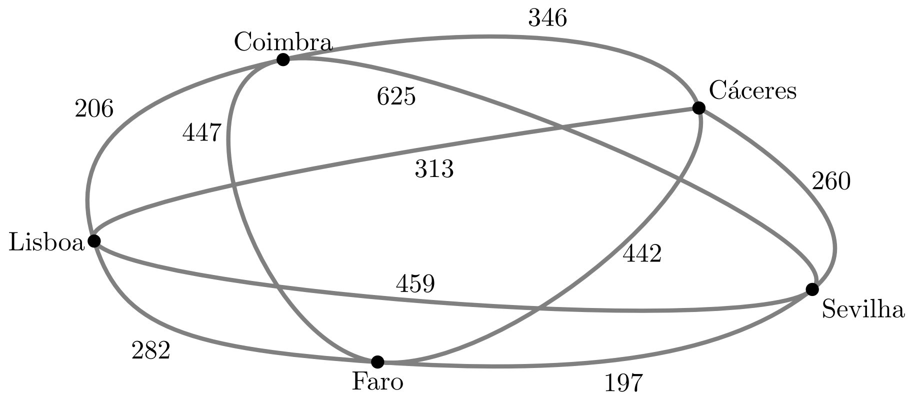
Assim, um percurso que se inicie e termine no ecoponto E_2 e que permita ao funcionário inspecionar todos os troços de rua, sendo o número de troços de rua a percorrer o menor possível, é, por exemplo:

$$E_2 \rightarrow E_4 \rightarrow E_5 \rightarrow E_2 \rightarrow E_3 \rightarrow E_7 \rightarrow E_3 \rightarrow E_8 \rightarrow E_7 \rightarrow E_1 \rightarrow E_6 \rightarrow E_5 \rightarrow E_8 \rightarrow E_3 \rightarrow E_2$$

Exame – 2008, 1.ª Fase

46.

46.1. Usando a informação da tabela podemos desenhar o grafo ponderado da figura seguinte:



46.2. Designado Lisboa por Lx, Coimbra por Cb, Faro por Fr, Cáceres por Cc e Sevilha por Sv, podemos identificar todos os percursos possíveis com início e final em Lisboa visitando em primeiro lugar Coimbra, recorrendo ao seguinte diagrama em árvore, bem como a distância percorrida em cada um deles através da informação da tabela:

Lx	Cb	Fr	Cc	Sv	Lx $(206 + 447 + 442 + 260 + 459 = 1814 \text{ km})$
			Sv	Cc	Lx $(206 + 447 + 197 + 260 + 313 = 1423 \text{ km})$
		Cc	Fr	Sv	Lx $(206 + 346 + 442 + 197 + 459 = 1650 \text{ km})$
			Sv	Fr	Lx $(206 + 346 + 260 + 197 + 282 = 1291 \text{ km})$
		Sv	Fr	Cc	Lx $(206 + 625 + 197 + 442 + 313 = 1783 \text{ km})$
			Cc	Fr	Lx $(206 + 625 + 260 + 442 + 282 = 1815 \text{ km})$
	$\times 1$	$\times 3$	$\times 2$	$\times 1$	$\times 1$

Assim temos que, no total, existem $1 \times 3 \times 2 \times 1 \times 1 = 6$ circuitos que obedecem aos critérios definidos.

Destes apenas dois estão de acordo com o critério definido pelo António, cujas distâncias percorridas são 1814 km e 1423 km.

Podemos observar que existe um circuito que visita primeiro as cidades espanholas, e só depois Faro, que permite obter uma distância percorrida de 1291 km, portanto sem cumprir o critério definido pelo António mas com uma distância total inferior:

Lisboa $\rightarrow$ Coimbra $\rightarrow$ Cáceres $\rightarrow$ Sevilha $\rightarrow$ Faro $\rightarrow$ Lisboa (1291 km)

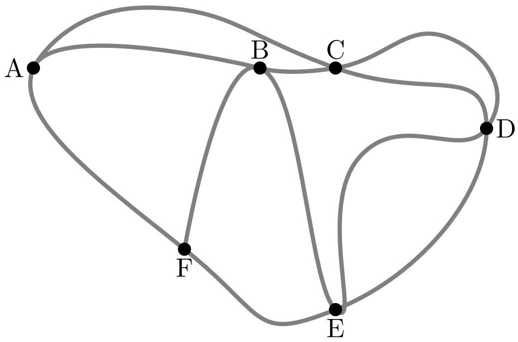
Assim, concluímos que o António não tem razão.

Exame – 2007, 2.ª Fase

47.

47.1. De acordo com o mapa da zona do Parque, considerando os cruzamentos como vértices e os caminhos como arestas, obtemos o grafo da figura seguinte, e o grau de cada de cada vértice:

- A - Grau 3
- B - Grau 4
- C - Grau 4
- D - Grau 4
- E - Grau 4
- F - Grau 3



Logo, como o grupo de jovens que parte do ponto A, percorre todos os caminhos assinalados e regressa ao ponto A, tem de percorrer pelo menos um caminho, mais do que uma vez, porque percorrer todos os caminhos, uma única vez corresponde a encontrar um circuito de Euler, o que só é possível se todos os vértices tiverem grau par, o que não acontece neste caso, porque existem dois vértices com grau ímpar: A e F (ambos com grau 3).

47.2. Assim um percurso em que o número de caminhos percorridos mais do que uma vez seja o menor possível, consiste em percorrer o caminho que liga o cruzamento A ao cruzamento F, por duas vezes, tornando assim par o grau de todos os vértices do grafo.

Logo, um dos percursos possíveis que percorre todos os caminhos, começando e terminando no cruzamento A, é:

$$A \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow E \rightarrow F \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow E \rightarrow B \rightarrow F \rightarrow A$$

47.3. A realidade depende e incorpora detalhes que podem ser simplificados ou ignorados, sem perda de informação relevante, e cuja desvalorização pode resultar em situações mais abstratas, mas mais fáceis de analisar.

Neste processo de simplificação é importante garantir que não são omitidos, simplificados ou ignorados detalhes relevantes, sob pena de comprometer a análise e a adequação da solução encontrada para a situação específica que se pretende estudar.

Nesta situação em particular, no mapa (situação original) existem informações que não são relevantes para a solução, como a localização dos lagos, da fonte, da estufa, ou da tapada. Assim, a omissão destes dados não compromete a adequação da solução para a situação estudada, porque apenas se centra na quantidade de caminhos e dos cruzamentos que cada caminho liga, sendo estas as informações que não podem ser simplificadas ou omitidas no processo de modelação.

Exame – 2006, 1.ª Fase