

Modelos matemáticos para a cidadania
Modelos matemáticos nas eleições

Exercícios selecionados de Exames de M.A.C.S.



1. *Sala de Fuga* é um jogo em que uma equipa, fechada numa sala ou num conjunto de salas, tem de resolver desafios, num intervalo de tempo limitado, para o conseguir concluir. Para ter sucesso e resolver os desafios, é necessário recorrer a diversas competências e apelar ao raciocínio lógico e à intuição.

Uma equipa de 10 elementos vai participar num jogo de Sala de Fuga.

Voluntariaram-se para capitão da equipa três dos seus elementos, o Artur (A), o Bruno (B) e o César (C).

Para determinar o capitão, cada um dos 10 elementos da equipa vota, preenchendo um boletim de voto no qual ordena os três candidatos de acordo com as suas preferências. Cada boletim preenchido com uma determinada ordenação corresponde a 1 voto.

Concluída a votação, aplica-se o método a seguir descrito.

- São atribuídos pontos a cada um dos candidatos, em função do seu lugar na ordem da lista de preferências. Cada candidato recebe:
 - cinco pontos por cada voto na primeira preferência;
 - três pontos por cada voto na segunda preferência;
 - um ponto por cada voto na terceira preferência.
- Contabiliza-se a pontuação total de cada um dos candidatos, e o que obtiver mais pontos será o escolhido para capitão da equipa.
- Em caso de empate, o capitão será escolhido por sorteio.

A tabela seguinte apresenta as preferências resultantes da votação, sem contemplar o voto da Daniela, um dos elementos da equipa.

Preferências \ Votos	Votos			
	3	2	3	1
1. ^a	A	C	B	A
2. ^a	B	A	C	C
3. ^a	C	B	A	B

Depois de contabilizar o voto da Daniela, foi possível apurar que:

- não houve candidatos com o mesmo número de pontos;
- o Artur foi o escolhido para capitão da equipa;
- o César ficou em segundo lugar.

Complete o texto seguinte, selecionando a opção adequada a cada espaço.

Escreva na folha de respostas cada um dos números, **I**, **II**, **III** e **IV**, seguido da opção **a)**, **b)** ou **c)** que lhe corresponde. A cada espaço corresponde uma só opção.

Antes de contabilizar o voto da Daniela, o candidato que estava em primeiro lugar tinha **I** pontos, e o candidato **II** estava em segundo lugar.

Depois de contabilizados os 10 votos, o candidato vencedor obteve **III** pontos.

Na lista de preferências da Daniela, o candidato **IV** estava na primeira preferência.

I	II	III	IV
a) 31	a) A	a) 32	a) A
b) 29	b) B	b) 34	b) B
c) 27	c) C	c) 36	c) C

Exame – 2024, 2.^a Fase



2. Um jornal desportivo convidou os leitores a participarem na eleição do melhor jogador de futebol de 2021, de entre os jogadores P, Q, R e S.

Cada leitor ordenou, uma única vez, os quatro jogadores, de acordo com a sua preferência. A ordenação efetuada por cada leitor corresponde a um voto. Foram apurados 1200 votos válidos.

A tabela seguinte encontra-se parcialmente preenchida com as listas de preferências obtidas.

	Lista 1	Lista 2	Lista 3
	200 votos	400 votos	600 votos
1.^a Preferência	P		
2.^a Preferência		P	
3.^a Preferência		S	P
4.^a Preferência	S		

Concluída a votação, para se obter a decisão final, foi aplicado o método a seguir descrito.

- São atribuídos pontos a cada um dos jogadores, em função do seu lugar nas listas de preferências. Cada jogador recebe:
 - quatro pontos por cada voto na primeira preferência;
 - três pontos por cada voto na segunda preferência;
 - dois pontos por cada voto na terceira preferência;
 - um ponto por cada voto na quarta preferência.
- Contabiliza-se a pontuação total de cada um dos jogadores.
- O jogador que obtiver a pontuação total mais elevada será eleito o melhor jogador de futebol de 2021.

Admita que, após o apuramento da pontuação total de cada jogador, se verificou que:

- o jogador Q obteve um total de 1400 pontos;
- o jogador S obteve uma pontuação total inferior à do jogador P.

Apresente a ordenação dos jogadores P, Q, R e S na Lista 3.

Na sua resposta, apresente todas as justificações e todos os cálculos efetuados.

Exame – 2022, Ép. especial



3. A rádio OnOff é uma rádio local que transmite através da Internet, com recurso a tecnologia de transmissão de áudio e de vídeo em tempo real.

Para a eleição da atual direção da rádio OnOff, composta hierarquicamente por um diretor, um vice-diretor e um adjunto da direção, apresentaram-se três candidatos: António, de 27 anos de idade, Bernardo, de 32 anos, e Carla, de 29 anos.

Nesse ato eleitoral, foram apurados 375 votos validamente expressos. No boletim de voto, cada votante escreveu, por ordem decrescente de preferência, o nome dos três candidatos.

A tabela seguinte apresenta as três listas ordenadas de preferências estabelecidas pelos eleitores e o número de votos obtido por cada uma das listas.

Preferências	N.º de votos		
	125	160	90
1. ^a	António	Bernardo	Carla
2. ^a	Bernardo	Carla	António
3. ^a	Carla	António	Bernardo

Concluída a votação, foi aplicado o método a seguir descrito para obter a composição da atual direção.

- São atribuídos pontos a cada um dos candidatos em função do seu lugar na ordem da lista de preferências. Cada candidato recebe:
 - cinco pontos por cada voto na primeira preferência;
 - três pontos por cada voto na segunda preferência;
 - um ponto por cada voto na terceira preferência.
- Contabiliza-se a pontuação total de cada um dos candidatos. O mais pontuado é eleito para diretor, o segundo mais pontuado é eleito para vice-diretor, e o terceiro mais pontuado é eleito para adjunto da direção.

No caso de existirem candidatos empatados, os seus lugares na direção são decididos utilizando a idade como critério de desempate. Dos candidatos empatados, o mais velho assumirá o cargo de maior importância.

Indique os nomes dos atuais diretor, vice-diretor e adjunto da direção, aplicando o método acima descrito.

Exame – 2021, Ép. especial



4. A rádio OnOff é uma rádio local que transmite através da Internet, com recurso a tecnologia de transmissão de áudio e de vídeo em tempo real.

Num outro ato eleitoral realizado na rádio OnOff, apenas uma parte dos 480 eleitores inscritos votou.

Finalizada a votação, apenas 75% dos votos foram considerados validamente expressos, por se ter considerado que 96 dos votos recolhidos não eram válidos.

Qual foi a taxa de abstenção registada nesse ato eleitoral?

- (A) 28% (B) 12,5% (C) 10% (D) 20%

Exame – 2021, Ép. especial

5. A ParaPagarApp é uma aplicação para telemóveis detida pela empresa ParaPagar. Depois de instalada, esta aplicação permite efetuar pagamentos em estabelecimentos aderentes recorrendo à Internet móvel.

Em 2020, foi necessário eleger uma nova equipa diretiva da ParaPagar. Nessa eleição, cada acionista da empresa teve de votar numa de quatro listas que se apresentaram a votação: listas A, B, C e D.

Apurados os resultados, verificou-se que o número de votos validamente expressos foi 7200.

Os votos validamente expressos representaram 96% dos votos apurados e a abstenção foi de 20%.

Qual é o número de acionistas da empresa que poderiam ter votado no momento deste ato eleitoral?

- (A) 7500 (B) 9000 (C) 9375 (D) 37 500

Exame – 2021, 1.ª Fase



6. A Maria e os amigos estavam a planear o itinerário do *Interrail* que tencionavam fazer nas férias.

Para seleccionar a cidade que visitariam a seguir a Roma, consultaram diversos blogues de viagens. Num deles, o autor apresentava as listas de preferências de 23 pessoas que tinham visitado Itália.

Com estas listas, construíram a tabela seguinte, na qual a lista de preferências de cada uma das 23 pessoas equivale a um voto.

Preferências \ Votos	Votos			
	8	7	5	3
1 ^a	Veneza	Florença	Milão	Nápoles
2 ^a	Florença	Milão	Nápoles	Veneza
3 ^a	Nápoles	Veneza	Florença	Milão
4 ^a	Milão	Nápoles	Veneza	Florença

A seleção da cidade resultou da aplicação do método a seguir descrito.

- Efetua-se a contagem do número de votos em cada cidade, como primeira preferência, e verifica-se se alguma delas obtém a maioria absoluta. Caso isso se verifique, essa cidade é a vencedora.
- Caso contrário, elimina-se a cidade menos votada como primeira preferência. Em seguida, a tabela de preferências é reestruturada, e, em cada coluna, as cidades que ocupavam os lugares abaixo da cidade eliminada sobem uma linha, mantendo-se pela mesma ordem.
- Os procedimentos anteriores são aplicados à nova tabela de preferências obtida no ponto anterior.
- O processo repete-se até que uma das cidades obtenha a maioria absoluta na primeira preferência.

Indique a cidade que a Maria e os amigos planeiam visitar a seguir a Roma.

Na sua resposta, aplique o método anteriormente descrito, apresentando todos os cálculos efetuados.

Exame – 2020, 2.^a Fase

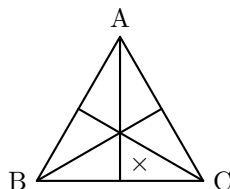


7. O Filipe e nove dos seus amigos decidiram ir juntos a um festival de música.

Como tinham interesse nos festivais A, B e C, decidiram proceder a uma votação para seleccionar um deles.

Cada um dos amigos preencheu um boletim de voto, no qual estava representado um triângulo equilátero, de vértices A, B e C, dividido em seis regiões. Para votar, cada uma das dez pessoas registou uma marca (×) numa das seis regiões, de acordo com as suas preferências.

Na figura seguinte, apresenta-se um exemplo de boletim de voto preenchido.



O exemplo apresentado corresponde ao voto na lista com a ordem de preferências CBA, pois a marca (×) foi colocada numa região onde o vértice C é o mais próximo, seguindo-se o B e, finalmente, o A.

Concluída a votação, foi aplicado o método a seguir descrito para obter a decisão final.

- São atribuídos pontos a cada um dos festivais em função do seu lugar na ordem da lista de preferências. Cada festival recebe:
 - cinco pontos por cada voto na primeira preferência;
 - três pontos por cada voto na segunda preferência;
 - um ponto por cada voto na terceira preferência.
- Contabiliza-se a pontuação total de cada um dos festivais e o mais pontuado será o escolhido.
- Em caso de empate, o festival será escolhido por sorteio.

A tabela seguinte apresenta as preferências resultantes da votação, sem contemplar o voto do Filipe.

Preferências \ Votos	Votos			
	2	2	2	3
1. ^a	A	A	C	B
2. ^a	B	C	B	C
3. ^a	C	B	A	A

Admita que, depois de contabilizado o voto do Filipe, o festival B ficou em primeiro lugar e o C em último, não tendo havido qualquer empate.

Apresente a lista de preferências registada no boletim de voto do Filipe.

Na sua resposta, apresente a pontuação de cada festival, resultante da aplicação do método acima descrito:

- antes de ser contabilizado o voto do Filipe;
- depois de ser contabilizado o voto do Filipe.



8. A Escola de Vilar de Sadeija inscreveu-se num concurso em que vai participar com uma equipa de 10 alunos.

Para formar a equipa, foi realizada uma eleição à qual concorreram as listas V, X, Y e Z.

Na tabela seguinte, está registado o número de votos, validamente expressos, obtidos por cada uma das listas.

Lista	V	X	Y	Z
Número de votos	373	602	318	157

Os dados da Tabela anterior permitem concluir que nenhuma das listas obteve maioria absoluta. Nestas circunstâncias, fazem-se, por vezes, coligações.

Admita que o número de votos obtidos por uma coligação é igual à soma dos números de votos validamente expressos nas listas que formam essa coligação, e que o número de votos das outras listas se mantém.

Qual das coligações seguintes permitiria obter maioria absoluta?

- (A) V com Z (B) X com Z (C) Y com Z (D) V com Y

Exame – 2017, 2.^a Fase



9. Na escola de Bicas, os métodos eleitorais são aplicados na seleção das atividades da escola.

Os alunos da escola de Bicas têm de escolher o tema dos trabalhos da semana cultural. Os alunos podem escolher os temas seguintes: *Bullying*, Solidariedade ou Festas.

Cada aluno deve ordenar, uma única vez, os três temas de acordo com as suas preferências. A ordenação efetuada por cada aluno corresponde a um voto. Foram apurados 985 votos válidos.

Na tabela seguinte, encontram-se organizados os resultados obtidos.

	415 votos	370 votos	200 votos
1.ª Preferência	<i>Bullying</i>	Solidariedade	Festas
2.ª Preferência	Solidariedade	Festas	<i>Bullying</i>
3.ª Preferência	Festas	<i>Bullying</i>	Solidariedade

A escolha do tema dos trabalhos da semana cultural é feita usando o método seguinte.

- Para que um voto possa ser considerado válido, cada aluno ordena, uma única vez, os temas de acordo com as suas preferências.
- Na ordenação final dos temas, cada primeira preferência recebe tantos pontos quantos os temas em votação.
- Cada segunda preferência recebe menos um ponto do que a primeira, e assim sucessivamente, recebendo a última preferência um ponto.
- É escolhido o tema com maior número de pontos.

Antes de anunciar o tema escolhido, a diretora da escola excluiu o tema Festas, não alterando os números de votos nem a ordem de cada uma das preferências (tabela anterior).

Verifique se o tema escolhido se mantém, aplicando o método de escolha acima descrito aos dois casos:

- incluindo o tema Festas;
- excluindo o tema Festas.

Exame – 2013, 1.ª Fase



10. A Joana estuda na Escola Secundária de Potes. Na turma da Joana, os alunos têm de escolher uma cidade, que será o destino de uma visita de estudo. Os alunos podem escolher Amarante, Braga ou Lamego.

Não havendo consenso entre os alunos, a Diretora de Turma propôs que a decisão fosse tomada por votação. Cada aluno deveria ordenar, uma única vez, os nomes das três cidades de acordo com as suas preferências. A ordenação efetuada por cada aluno corresponde a um voto. Foram apurados vinte e um votos válidos.

Na tabela seguinte, encontram-se organizados os resultados obtidos.

	8 votos	6 votos	4 votos	3 votos
1.ª Preferência	Braga	Lamego	Amarante	Amarante
2.ª Preferência	Lamego	Amarante	Lamego	Braga
3.ª Preferência	Amarante	Braga	Braga	Lamego

Suponha que a Diretora de Turma decide aplicar o método de contagem de Borda para escolher a cidade a visitar.

Segundo o método de contagem de Borda, a escolha faz-se de acordo com os seguintes critérios e etapas:

- para que um voto seja considerado válido, cada aluno ordena, uma única vez, os nomes das três cidades de acordo com as suas preferências;
- na ordenação final das cidades, cada primeira preferência recebe tantos pontos quantas as cidades em votação;
- cada segunda preferência recebe menos um ponto do que a primeira, e assim sucessivamente, recebendo a última preferência um ponto;
- é escolhida a cidade com maior número de pontos.

Verifique se, aplicando o método de contagem de Borda, a cidade vencedora respeitaria a primeira preferência mais votada.

Exame – 2011, 2.ª Fase



11. A associação de estudantes da Escola Secundária de Monte da Azinha decidiu aplicar o método da Contagem de Borda, para escolher o representante dos alunos da escola num fórum internacional sobre ciência. Concorreram quatro candidatos: a Ana, a Inês, o Nuno e o Pedro.

Segundo o método da Contagem de Borda, o apuramento do vencedor faz-se de acordo com os seguintes critérios e etapas:

- para que um voto possa ser considerado válido, cada eleitor vota em todos os candidatos, ordenando-os de acordo com as suas preferências;
- na ordenação final dos concorrentes, cada primeira preferência recebe tantos pontos quantos os candidatos em votação;
- cada segunda preferência recebe menos um ponto do que a primeira, e assim sucessivamente, recebendo a última preferência um ponto;
- o vencedor é o concorrente com maior número de pontos.

Foram apurados noventa e cinco votos válidos. Os resultados obtidos são os seguintes.

	25 votos	40 votos	15 votos	10 votos	5 votos
1.ª Preferência	Nuno	Pedro	Nuno	Pedro	Pedro
2.ª Preferência	Ana	Inês	Inês	Nuno	Nuno
3.ª Preferência	Inês	Nuno	Ana	Ana	Inês
4.ª Preferência	Pedro	Ana	Pedro	Inês	Ana

Determine a pontuação final de cada candidato, e indique o vencedor.

Exame – 2009, 1.ª Fase



12. No dia 14 de Dezembro de 1997, realizaram-se eleições autárquicas em Portugal.

Num certo concelho, concorreram quatro partidos às eleições para a Câmara Municipal. Estavam em disputa sete mandatos.

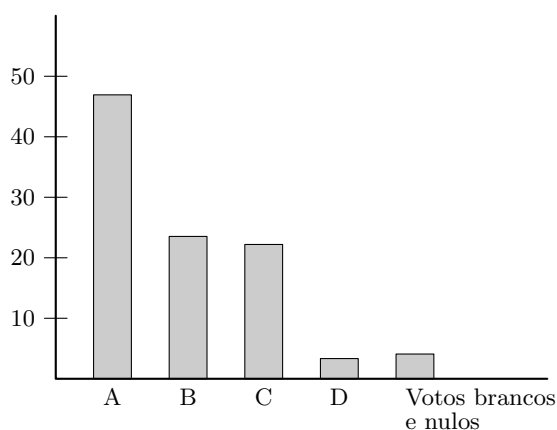
Esses quatro partidos são aqui designados pelas letras A, B, C e D.

A distribuição dos votos pelos quatro partidos, nessas eleições de 1997, foi a seguinte.

Partidos	A	B	C	D
Número de votos	13 442	8 723	6 033	1 120

Houve 1 258 votos brancos e nulos.

Em 2001, realizaram-se novamente eleições para a mesma Câmara Municipal. Os partidos concorrentes foram os mesmos. Os resultados estão representados no seguinte gráfico de barras.



Nas eleições para uma Câmara Municipal, é eleito Presidente da Câmara o cabeça-de-lista da força política mais votada. Sabendo que o Presidente da Câmara, eleito em 1997, se recandidatou ao cargo em 2001, pelo mesmo partido, verifique, justificando, se ele foi, ou não, reeleito.

Exame – 2006, 2.^a Fase

