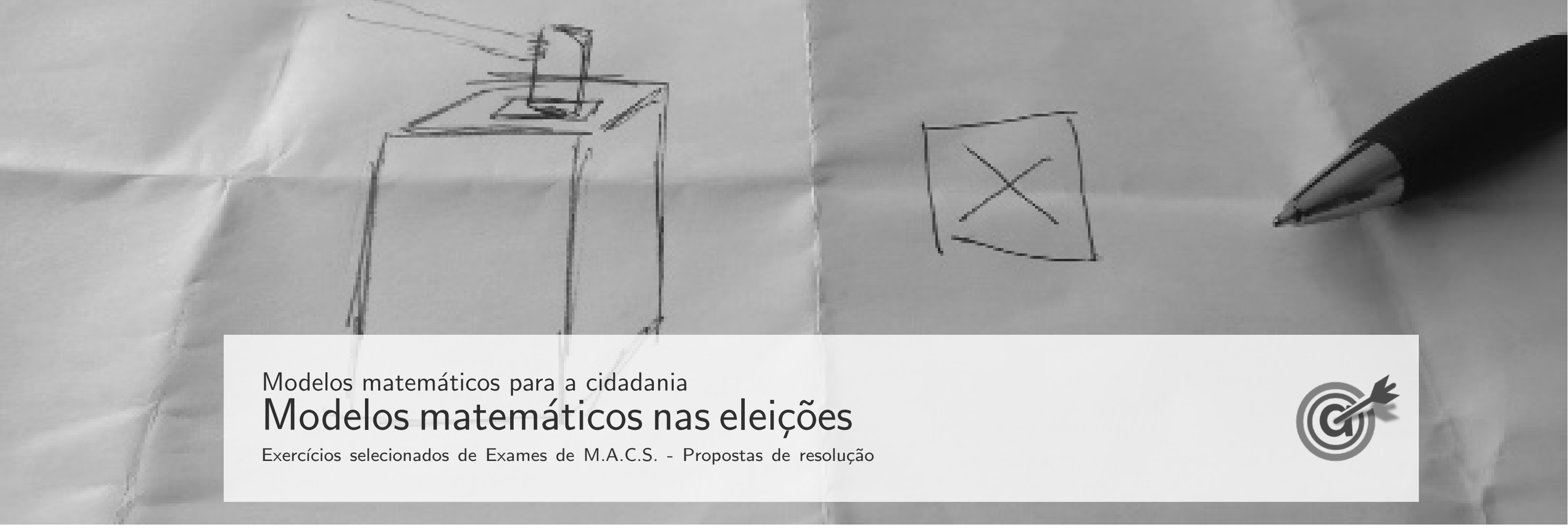

Modelos matemáticos para a cidadania

Modelos matemáticos nas eleições

Exercícios selecionados de Exames de M.A.C.S. - Propostas de resolução

1. Aplicando o método descrito, sem contemplar o voto da Daniela, ou seja, apenas com os dados da tabela, temos:

   - Pontuação do Artur: $3 \times 5 + 2 \times 3 + 3 \times 1 + 1 \times 5 = 15 + 6 + 3 + 5 = 29$
   - Pontuação do Bruno: $3 \times 3 + 2 \times 1 + 3 \times 5 + 1 \times 1 = 9 + 2 + 15 + 1 = 27$
   - Pontuação do César: $3 \times 1 + 2 \times 5 + 3 \times 3 + 1 \times 3 = 3 + 10 + 9 + 3 = 25$

   Como existem seis possibilidades de ordenação do voto da Daniela, podemos verificar qual delas verifica as constatações que se apuraram:

Ordenação	Total **A**	Total **B**	Total **C**	Análise e justificação
A>B>C	$29 + 5 = 34$	$27 + 3 = 30$	$25 + 1 = 26$	Impossível, porque o César não ficaria em segundo lugar.
A>C>B	$29 + 5 = 34$	$27 + 1 = 28$	$25 + 3 = 28$	Impossível, porque haveriam candidatos com o mesmo número de pontos.
B>A>C	$29 + 3 = 32$	$27 + 5 = 32$	$25 + 1 = 26$	Impossível, porque haveriam candidatos com o mesmo número de pontos.
B>C>A	$29 + 1 = 30$	$27 + 5 = 32$	$25 + 3 = 28$	Impossível, porque o candidato escolhido não seria o Artur.
C>A>B	$29 + 3 = 32$	$27 + 1 = 28$	$25 + 5 = 30$	Todas as constatações se verificam.
C>B>A	$29 + 1 = 30$	$27 + 3 = 30$	$25 + 5 = 30$	Impossível, porque haveriam candidatos com o mesmo número de pontos.

   Assim, vem que:

   Antes de contabilizar o voto da Daniela, o candidato que estava em primeiro lugar tinha **29** pontos, e o candidato **B** estava em segundo lugar.
   Depois de contabilizados os 10 votos, o candidato vencedor obteve **32** pontos.
   Na lista de preferências da Daniela, o candidato **C** estava na primeira preferência.

Logo, as correspondências corretas são:

- **I → b)**
- **II → b)**
- **III → a)**
- **IV → c)**

Exame – 2024, 2.ª Fase

2. De acordo com o método descrito, temos que a pontuação total do jogador P, é:

$$4 \times 200 + 3 \times 400 + 2 \times 600 = 3200$$

Como o jogador Q obteve um total de 1400 pontos, e sabemos que não ficou na 4.ª preferência da lista 1 (porque essa preferência foi dada ao jogador S), então ficou na 4.ª preferência das listas 2 e 3, e na 3.ª preferência da lista 1, porque é a única forma de somar apenas 1400 pontos:

$$2 \times 200 + 1 \times 400 + 1 \times 600 = 1400$$

Relativamente à pontuação do jogador S, sabemos que não ficou na primeira preferência da lista e, porque assim teria mais pontos que o jogador S: $(1 \times 200 + 2 \times 400 + 4 \times 600 = 3400)$, e como também não ficou na 4.ª preferência (jogador Q) nem na 3.ª (jogador S), então a sua preferência é a 2.ª.

Assim o jogador R deve ocupar a 1.ª preferência da lista 3, por ser o único jogador e a única preferência ainda não determinados. Desta forma a ordenação dos jogadores na lista 3, é:

	1.ª Preferência	**2.ª Preferência**	**3.ª Preferência**	**4.ª Preferência**
Jogador	R	S	P	Q

Exame – 2022, Ép. especial

3. Aplicando o método descrito para obter a composição da atual direção, temos:
   - Pontuação do António (124 votos na 1.ª preferência, 90 votos na 1.ª preferência e 160 votos na 3.ª preferência):
   $$125 \times 5 + 90 \times 3 + 160 \times 1 = 1055$$
   - Pontuação do Bernardo (160 votos na 1.ª preferência, 125 votos na 1.ª preferência e 90 votos na 3.ª preferência):
   $$160 \times 5 + 125 \times 3 + 90 \times 1 = 1265$$
   - Pontuação da Carla (90 votos na 1.ª preferência, 160 votos na 2.ª preferência e 125 votos na 3.ª preferência):
   $$90 \times 5 + 160 \times 3 + 125 \times 1 = 1055$$

   Como não existem candidatos empatados, os seus lugares na direção são decididos utilizando a idade como critério de desempate, e como a Carla é mais velha que o António, será ela a assumir o cargo de maior importância.

   Assim, a composição da direção da rádio OnOfff, é:
   - Diretor: Bernardo (1265 votos)
   - Vice-diretor: Carla (1055 votos - 29 anos)
   - Adjunto da direção: António (1055 votos - 27 anos)

Exame – 2021, Ép. especial

4. Temos que:
   - O número total de votos que não eram válidos foi 96, correspondentes a 25% dos eleitores que votaram (porque 75% foram considerados válidos), pelo que o número votantes (NV), é:
   $$\frac{NV}{96} = \frac{100}{25} \Leftrightarrow NV = \frac{96 \times 100}{25} \Leftrightarrow NV = 384$$
   - Como existiam 480 e votaram 384, o número de eleitores inscritos que não votou foi $480 - 384 = 96$, pelo que a taxa de abstenção (TA) corresponde à percentagem a que corresponde 96 eleitores que não votaram no total 480 eleitores inscritos, ou seja:
   $$\frac{TA}{100} = \frac{96}{480} \Leftrightarrow TA = \frac{100 \times 96}{480} \Leftrightarrow TA = 20$$

   Resposta: **Opção D**

Exame – 2021, Ép. especial

5. Temos que:

   - O número total de votos validamente expressos foi 7200, correspondentes a 96% dos votos apurados, pelo que o número de votos apurados (VA), é:

$$\frac{VA}{7200} = \frac{100}{96} \Leftrightarrow VA = \frac{7200 \times 100}{96} \Leftrightarrow VA = 7500$$

   - Como a abstenção foi de 20%, o número de votos apurados (VA), corresponde a $100 - 20 = 80\%$ do número de acionistas da empresa que poderiam ter votado (NA), ou seja:

$$\frac{NA}{7500} = \frac{100}{80} \Leftrightarrow NA = \frac{7500 \times 100}{80} \Leftrightarrow VA = 9375$$

Resposta: **Opção C**

Exame – 2021, 1.ª Fase

6. Aplicando o método descrito, temos:

   - Número de votos necessário para obter maioria absoluta: 12 (porque $\frac{23}{2} = 11{,}5$)
   - Observando o número de votos em cada cidade, como primeira preferência, verifica-se que nenhuma delas obtém a maioria absoluta (a cidade mais votada foi Veneza com 8 votos)
   - Reestruturando novamente a tabela, de acordo com o método descrito, ou seja, eliminando a cidade que obteve o menor número de votos, como primeira preferência - Milão - temos:

Preferências \ Votos	8	7	5	3
1ª	Veneza	Florença	Milão	Veneza
2ª	Florença	Milão	Florença	Milão
3ª	Milão	Veneza	Veneza	Florença

   - Observando o número de votos em cada cidade, como primeira preferência na tabela reestruturada, verifica-se que nenhuma delas obtém a maioria absoluta novamente (a cidade mais votada é, de novo, Veneza com $8 + 3 = 11$ votos)
   - Reestruturando a tabela, de acordo com o método descrito, ou seja, eliminando a cidade que obteve o menor número de votos, como primeira preferência - Milão - temos:

Preferências \ Votos	8	7	5	3
1ª	Veneza	Florença	Florença	Veneza
2ª	Florença	Veneza	Veneza	Florença

E assim, a cidade selecionada pelos amigos para visitar depois de Roma, ou seja a cidade com maioria absoluta de votos ($7 + 5 = 12$, ou seja, mais que 11,5), é Florença.

Exame – 2020, 2.ª Fase

7. Aplicando o método descrito antes de ser contabilizado o voto do Filipe, temos:
   - Pontuação do festival A (4 votos na 1.ª preferência e 5 votos na 3.ª preferência):
   $$4 \times 5 + 5 \times 1 = 20 + 5 = 25$$
   - Pontuação do festival B (3 votos na 1.ª preferência, 4 votos na 2.ª preferência e 2 votos na 3.ª preferência):
   $$3 \times 5 + 4 \times 3 + 2 \times 1 = 15 + 12 + 2 = 29$$
   - Pontuação do festival C (2 votos na 1.ª preferência, 5 votos na 2.ª preferência e 2 votos na 3.ª preferência:
   $$2 \times 5 + 5 \times 3 + 2 \times 1 = 10 + 15 + 2 = 27$$

   Como após a contabilização do votos do Filipe o festival C ficou em último lugar, e não se verificaram empates, o voto do Filipe colocou o festival C na 3.ª preferência, porque se fosse a 2.ª ou a 1.ª, mesmo com 5 pontos o festival A não iria obter um número de pontos superior).

   Relativamente à 1.ª preferência, o Filipe escolheu o festival A (porque se fosse a 2.ª alternativa iria totalizar o mesmo número de pontos do festival C, e é sabido que não se registou qualquer empate).

   Desta forma, o voto do Filipe indicou na 1.ª preferência o festival A, na 2.ª o festival B e na 3.ª o festival C.

   E assim, a pontuação de cada filme, após a contabilização do voto do Filipe, é:
   - Festival A: $25 + 5 = 30$
   - Festival B: $29 + 3 = 32$
   - Festival C: $27 + 1 = 28$

Exame – 2020, 1.ª Fase

8. Temos que:
   - O número total de votos validamente expressos é: $373 + 602 + 318 + 157 = 1450$
   - O número total de votos necessários para obter a maioria absoluta é: $\frac{1450}{2} + 1 = 726$

   Assim podemos verificar que a lista X, em coligação com qualquer outra lista obteria a maioria absoluta. Desta forma a coligação X com Z obteria uma votação de $602 + 157 = 759$, e portanto mais do que os 726 votos necessários para a maioria absoluta.

   Resposta: **Opção B**

Exame – 2017, 2.ª Fase

9. Aplicando o método descrito, incluindo o tema Festas, temos:

   - Pontuação do tema *Bulling*: $3 \times 415 + 1 \times 370 + 2 \times 200 = 2015$
   - Pontuação do tema Solidariedade: $2 \times 415 + 3 \times 370 + 1 \times 200 = 2140$
   - Pontuação do tema Festas: $1 \times 415 + 2 \times 370 + 3 \times 200 = 1755$

   Excluindo o tema Festas, a tabela reorganizada, não alterando os números de votos nem a ordem de cada uma das preferências, é a seguinte:

	415 votos	**370 votos**	**200 votos**
1ª Preferência	*Bullying*	Solidariedade	*Bullying*
2ª Preferência	Solidariedade	*Bullying*	Solidariedade

   E assim, aplicando o método descrito, excluindo o tema Festas, temos:

   - Pontuação do tema *Bulling*: $2 \times 415 + 1 \times 370 + 2 \times 200 = 1600$
   - Pontuação do tema Solidariedade: $1 \times 415 + 2 \times 370 + 1 \times 200 = 1355$

   Assim, temos que com a inclusão do tema Festas, o tema escolhido é Solidariedade, porque tem a maior pontuação (2140 pontos) e, se o tema Festas for excluído, o tema escolhido é *Bulling* porque tem maior número de pontos (1600), pelo que podemos concluir que a exclusão do tema Festas altera a escolha do tema.

Exame – 2013, 1.ª Fase

10. Aplicando o método de contagem de Borda, temos:

   - Pontuação da cidade de Braga: $3 \times 8 + 1 \times 6 + 1 \times 4 + 2 \times 3 = 40$
   - Pontuação da cidade de Lamego: $2 \times 8 + 3 \times 6 + 2 \times 4 + 1 \times 3 = 45$
   - Pontuação da cidade de Amarante: $1 \times 8 + 2 \times 6 + 3 \times 4 + 3 \times 3 = 41$

   Logo, pelo método de contagem de Borda a cidade escolhida é Lamego (porque tem o maior número de pontos). Assim, podemos verificar que esta eleição não respeita a primeira preferência mais votada, que é a cidade de Braga (com 8 votos, enquanto Amarante tem 7 votos e Lamego apenas 6 votos).

Exame – 2011, 2.ª Fase

11. Aplicando o método de contagem de Borda, temos:

   - Pontuação do Nuno: $4 \times 25 + 2 \times 40 + 4 \times 15 + 3 \times 10 + 3 \times 5 = 285$
   - Pontuação da Ana: $3 \times 25 + 1 \times 40 + 2 \times 15 + 2 \times 10 + 1 \times 5 = 170$
   - Pontuação da Inês: $2 \times 25 + 3 \times 40 + 3 \times 15 + 1 \times 10 + 2 \times 5 = 235$
   - Pontuação do Pedro: $1 \times 25 + 4 \times 40 + 1 \times 15 + 4 \times 10 + 4 \times 5 = 260$

   Assim, o candidato vencedor é o Nuno, porque tem o maior número de pontos.

Exame – 2009, 1ª Fase

12. Pela observação do gráfico podemos verificar que o partido A obteve mais de 40% dos votos na eleição de 2001, sendo o partido mais votado. Assim, o Presidente da Câmara eleito em 1997 pelo partido A foi reeleito porque se recandidatou pelo partido A em 2001 e este foi o partido mais votado.

Exame – 2006, 2.ª Fase