

Modelos matemáticos para a cidadania
Modelos matemáticos na partilha

Exercícios selecionados de Exames de M.A.C.S. - Propostas de resolução



1. Na eleição da direção da Associação Ambientalista de Avelares (AAA), constituída por 7 elementos, concorreram as listas X, Y e Z.

Na tabela seguinte, está registado o número de votos, validamente expressos, obtidos por cada uma das listas.

Lista	X	Y	Z
N.º de votos	142	231	425

Para converter os votos nos sete mandatos, aplicou-se o método que a seguir se descreve.

- Divide-se o número de votos de cada lista concorrente, sucessivamente, por 1, 3, 5, 7, 9, etc.
- Ordenam-se os quocientes obtidos, arredondados às unidades, por ordem decrescente, numa série de tantos termos quantos os mandatos previstos.
- Atribuem-se os mandatos às listas a que correspondem os termos da série estabelecida pela regra anterior, recebendo cada uma das listas tantos mandatos quantos os seus termos na série.
- No caso de ficar somente um mandato por atribuir e de os termos seguintes da série serem iguais e correspondentes a listas diferentes, o mandato é atribuído à lista que tiver menor número de votos.

Determine a constituição da direção da AAA, referindo quantos elementos de cada lista a compõem.

2. A Escola de Vilar de Sadeija inscreveu-se num concurso em que vai participar com uma equipa de 10 alunos.

Para formar a equipa, foi realizada uma eleição à qual concorreram as listas V, X, Y e Z.

Na tabela seguinte, está registado o número de votos, validamente expressos, obtidos por cada uma das listas.

Lista	V	X	Y	Z
Número de votos	373	602	318	157

Na seleção dos 10 alunos da equipa, a direção da escola optou por aplicar o método de Hondt.

Um dos alunos, ao observar a tabela anterior, afirmou que, usando-se o método de Hondt, a equipa teria tantos alunos da Lista V como da Lista Y.

Verifique se o aluno tinha razão.

Na sua resposta, apresente:

- os quocientes da aplicação do método de Hondt arredondados às unidades;
- o número de elementos de cada lista na equipa constituída.

Exame – 2017, 2.^a Fase



3. No concelho de Avelares, realizaram-se recentemente eleições para a constituição de um órgão consultivo da população. Este órgão tem 9 consultores.

A tabela seguinte apresenta o número de votos, validamente expressos, obtidos pelas 4 listas concorrentes a esse ato eleitoral.

Os votos em branco ou nulos não foram considerados como votos validamente expressos.

Lista	A	B	C	D
Número de votos	220	530	650	150

Para converter os votos em mandatos, aplicou-se o método que a seguir se descreve:

- divide-se o número de votos obtidos por cada lista sucessivamente por 1, 3, 5, 7, 9, etc.;
- ordenam-se todos os quocientes obtidos, arredondados às décimas, pela ordem decrescente da sua grandeza, numa série de tantos termos quantos os mandatos atribuídos ao órgão consultivo da população;
- atribuem-se os mandatos às listas a que correspondem os termos da série estabelecida pela regra anterior, recebendo cada uma das listas tantos mandatos quantos os seus termos na série;
- no caso de só ficar um mandato por atribuir e de os termos seguintes da série serem iguais e de listas diferentes, o mandato cabe à lista que tiver obtido o menor número de votos.

Na referida eleição, foram atribuídos os 9 mandatos, correspondentes aos lugares disponíveis para o órgão consultivo da população.

Depois de publicados os resultados, os representantes da lista A afirmaram que os mandatos poderiam ter sido atribuídos na proporção direta dos votos obtidos por cada uma das listas, com arredondamento à unidade. Aplicando este método, à lista C, por exemplo, seriam atribuídos quatro mandatos, uma vez que $\frac{650}{1550} \times 9 \approx 3,774$.

Verifique se a adoção do método proposto pelos representantes da lista A modificaria, ou não, o número de mandatos a atribuir a cada lista concorrente.

Exame – 2015, 1.ª Fase



4. Os alunos da escola de Penha Alta estudam a aplicação dos métodos eleitorais e de partilha a várias situações.

Os métodos eleitorais procuram garantir a representação proporcional. No entanto, a atribuição de mandatos segundo o método de Hondt pode ter um resultado diferente da atribuição de mandatos segundo o método de Saint-Laguë.

Na tabela seguinte, estão indicados os números de votos, validamente expressos, obtidos pelas listas de cada um dos cinco partidos mais votados na eleição dos representantes para a assembleia municipal de Penha Alta.

Os votos em branco ou nulos não foram considerados como votos validamente expressos.

Partido	A	B	C	D	E
Número de votos	22 010	17 124	15 144	12 333	11 451

Na eleição dos representantes para a assembleia municipal, são atribuídos 15 mandatos correspondentes ao círculo eleitoral de Penha Alta.

Segundo o método de Saint-Laguë, a conversão de votos em mandatos faz-se da forma seguinte.

- Divide-se o número de votos obtidos por cada lista por 1, 3, 5, 7, 9, etc.
- Alinham-se os quocientes, pela ordem decrescente da sua grandeza, numa série de tantos termos quantos os mandatos atribuídos ao círculo eleitoral em causa.
- Atribuem-se os mandatos às listas a que correspondem os termos da série estabelecida pela regra anterior, recebendo cada uma das listas tantos mandatos quantos os seus termos na série.
- No caso de só ficar um mandato por distribuir e de os termos da série serem iguais e de listas diferentes, o mandato cabe à lista que tiver obtido o menor número de votos.

Determine as diferenças entre os números de mandatos atribuídos às listas dos cinco partidos mais votados no círculo eleitoral de Penha Alta resultantes da aplicação do método de Hondt e da aplicação do método de Saint-Laguë.

Caso proceda a arredondamentos, conserve uma casa decimal.

Exame – 2014, 2.^a Fase



5. Em 2009, os habitantes de Cabeço-dos-Moinhos votaram em dois momentos distintos.

Na tabela seguinte, estão indicados os números de votos, validamente expressos, obtidos pelas listas dos cinco partidos mais votados, na eleição para a assembleia de freguesia.

Os votos em branco ou nulos não foram considerados como votos validamente expressos.

Partido	A	B	C	D	E
Número de votos	5243	3475	1211	1153	657

Nessa eleição, os 8 mandatos correspondentes ao círculo eleitoral da freguesia foram distribuídos pelo método de Hondt.

Em eleições semelhantes, alguns países aplicam o método de Saint-Laguë, em vez do método de Hondt.

Segundo o método de Saint-Laguë, a conversão de votos em mandatos faz-se da forma seguinte.

- Divide-se o número de votos obtidos por cada lista por 1, 3, 5, 7, 9, etc.
- Alinham-se os quocientes, pela ordem decrescente da sua grandeza, numa série de tantos termos quantos os mandatos atribuídos ao círculo eleitoral em causa.
- Atribuem-se os mandatos às listas a que correspondem os termos da série estabelecida pela regra anterior, recebendo cada uma das listas tantos mandatos quantos os seus termos na série.
- No caso de só ficar um mandato por distribuir e de os termos seguintes da série serem iguais e de listas diferentes, o mandato cabe à lista que tiver obtido o menor número de votos.

Um candidato não eleito, que concorreu à referida eleição na lista de um dos partidos, afirmou:

«Se a distribuição de mandatos tivesse sido feita pelo método de Saint-Laguë, eu teria obtido um mandato.»

Determine a lista a que pertence o candidato que fez a afirmação.

Na sua resposta, deve:

- aplicar o método de Hondt para determinar a distribuição dos 8 mandatos;
- aplicar o método de Saint-Laguë para determinar a distribuição dos 8 mandatos;
- concluir a que lista pertence o candidato, a partir da comparação entre os dois resultados.

Apresente os valores dos quocientes arredondados com uma casa decimal.

Exame – 2013, Ép. especial



6. Na Nova Zelândia, o método aplicado para a conversão de votos em mandatos é o método de Saint-Laguë.

Na tabela seguinte, estão indicados o número de votos, validamente expressos, obtidos pelas listas de cada um dos seis partidos mais votados na eleição dos representantes de um estado neozelandês.

Partido	A	B	C	D	E	F
Número de votos	23 023	13 245	12 345	2564	2543	2463

Na eleição, são atribuídos 10 mandatos, correspondentes ao círculo eleitoral desse estado neozelandês.

Segundo o método de Saint-Laguë, a conversão de votos em mandatos faz-se da forma seguinte.

- Divide-se o número de votos obtidos por cada lista por 1, 3, 5, 7, 9, etc.
- Alinham-se os quocientes, pela ordem decrescente da sua grandeza, numa série de tantos termos quantos os mandatos atribuídos ao círculo eleitoral em causa.
- Atribuem-se os mandatos às listas a que correspondem os termos da série estabelecida pela regra anterior, recebendo cada uma das listas tantos mandatos quantos os seus termos na série.
- No caso de só ficar um mandato por distribuir e de os termos seguintes da série serem iguais e de listas diferentes, o mandato cabe à lista que tiver obtido o menor número de votos.

A Maria, uma aluna de Matemática Aplicada às Ciências Sociais, afirma que:

«Em comparação com o método de Hondt, o método de Saint-Laguë possibilita a participação dos partidos menos votados.»

Verifique se a Maria tem razão, relativamente à eleição dos representantes do estado neozelandês.

Na sua resposta deve:

- aplicar o método de Hondt para determinar a distribuição dos 10 mandatos;
- aplicar o método de Saint-Laguë para determinar a distribuição dos 10 mandatos;
- concluir se a Maria tem razão, a partir da comparação entre os dois resultados.

Apresente os quocientes arredondados com uma casa decimal.

Exame – 2012, 2.^a Fase



7. No dia 27 de Setembro de 2009, realizaram-se, em Portugal, eleições para a Assembleia da República.

Na tabela seguinte, estão indicados o número de votos validamente expressos e o número de mandatos distribuídos pelo método de Hondt, obtidos num certo círculo eleitoral por cada um dos cinco partidos mais votados nas referidas eleições. Os votos em branco ou nulos não foram considerados como votos validamente expressos.

Partido	A	B	C	D	E
Número de votos	80 676	74 745	28 867	13 971	6 148
Número de mandatos	4	4	1	0	0

O presidente do Partido C considera que o resultado da distribuição dos nove mandatos se alteraria caso o seu partido se tivesse coligado ou com o Partido D ou com o Partido E.

Admita que, em cada uma dessas coligações, o número de votos obtido pela coligação era igual à soma dos números de votos validamente expressos nos partidos que formavam a coligação, e que o número de votos dos outros partidos não sofria alteração.

Averigüe se existe fundamento na consideração do presidente do Partido C, aplicando o método de Hondt nos dois casos: C coligado com D e C coligado com E.

Apresente os quocientes do método de Hondt arredondados com uma casa decimal.

Exame – 2011, 1.^a Fase



8. No dia 11 de Outubro de 2009, realizaram-se, em Portugal, eleições autárquicas.

O território de um concelho constitui um único círculo eleitoral, para efeito de eleição dos órgãos autárquicos.

No círculo eleitoral de um dado concelho, concorreram à Câmara Municipal os partidos que constam na tabela seguinte. Após o apuramento geral, os partidos concorrentes foram ordenados por número de votos obtidos, para se distribuírem os 7 mandatos correspondentes aos 7 vereadores a eleger.

Partidos	Número de votos
A	7744
B	4918
C	1666
D	1572
E	308

A atual lei eleitoral prevê que a distribuição de mandatos seja feita, de forma proporcional, pelo método de Hondt.

Alguns movimentos partidários defendem que a distribuição de mandatos, para cada círculo eleitoral, deveria ser feita de forma diretamente proporcional ao respetivo número de votos, com arredondamento às unidades. Por exemplo, ao partido B deveriam ser atribuídos 2 mandatos, uma vez que

$$\frac{4918}{\text{número total de votos}} \times 7 \approx 2,124.$$

Verifique se os resultados deste concelho se modificariam com a aprovação da alteração à lei eleitoral proposta por esses movimentos partidários.

Na sua resposta, deve:

- distribuir os 7 mandatos destinados à vereação da Câmara Municipal do concelho pelos partidos constantes na tabela, utilizando o método de Hondt;
- distribuir os 7 mandatos destinados à vereação da Câmara Municipal do concelho pelos partidos constantes na tabela, de forma diretamente proporcional ao respetivo número de votos;
- concluir a partir da comparação entre os dois resultados.

Exame – 2010, 1.^a Fase



9. O clube desportivo «O Duelo» oferece aos seus sócios cinco modalidades desportivas: Basquetebol, Futebol, Ténis, Golfe e Râguebi. Cada candidato a praticante pode escolher, de entre as cinco, a modalidade que pretende praticar, mas só pode inscrever-se numa delas.

No quadro seguinte, está registado o número total de praticantes inscritos, distribuídos por cada uma dessas modalidades desportivas.

	Modalidade desportiva					TOTAL
	Basquetebol	Futebol	Ténis	Golfe	Râguebi	
N.º praticantes	186	218	91	45	191	731

A direção deste clube é composta por doze elementos. Para garantir a representatividade dos praticantes das diversas modalidades, os doze lugares da direção devem ser atribuídos segundo o critério de distribuição proporcional ao número de praticantes de cada modalidade. A distribuição dos doze lugares da direção pelos representantes das diferentes modalidades vai ser feita pelo método de Hondt.

Verifique se, para garantir, na direção, representatividade baseada na distribuição de lugares proporcional ao número de praticantes das diversas modalidades, existe alguma vantagem ou desvantagem em se agruparem duas delas, Golfe e Ténis.

Na sua resposta deve:

- calcular o número de lugares atribuídos aos representantes de cada modalidade, antes de se agruparem Golfe e Ténis;
- calcular o número de lugares atribuídos aos representantes de cada modalidade, depois de se agruparem Golfe e Ténis;
- concluir da existência de vantagem ou de desvantagem do agrupamento proposto para assegurar, na direção, a representatividade dos praticantes.

Exame – 2009, 2.ª Fase



10. No dia 14 de Dezembro de 1997, realizaram-se eleições autárquicas em Portugal.

Num certo concelho, concorreram quatro partidos às eleições para a Câmara Municipal. Estavam em disputa sete mandatos.

Esses quatro partidos são aqui designados pelas letras A, B, C e D.

A distribuição dos votos pelos quatro partidos, nessas eleições de 1997, foi a seguinte.

Partidos	A	B	C	D
Número de votos	13 442	8 723	6 033	1 120

Houve 1 258 votos brancos e nulos.

Na página de Internet do STAPE (Secretariado Técnico dos Assuntos para o Processo Eleitoral), pode ler-se o seguinte: «*Entre as características do método de Hondt, importa assinalar o encorajamento à formação de coligações, uma vez que o agrupamento de partidos os leva a conseguir um maior número de mandatos do que se concorressem isoladamente.*»

Numa composição, comente esta frase, tendo por base os resultados das eleições de 1997, para a referida Câmara Municipal (tenha em atenção que, como já foi referido, estavam em disputa sete mandatos).

A sua composição deve contemplar os três pontos que a seguir se referem.

- Cálculo do número de mandatos obtidos por cada partido (de acordo com o método de Hondt).
- Simulação do que aconteceria se os partidos B e C tivessem concorrido em coligação (admitindo que o número de votos da coligação B+C seria a soma do número de votos do partido B com o número de votos do partido C e que os outros partidos mantinham a votação). Esta simulação deve incluir:
 - o cálculo do número de votos que seriam obtidos, neste caso, por cada força política;
 - uma referência a uma eventual alteração na Presidência da Câmara.
- Conclusão da vantagem, ou não, para os partidos B e C, da formação de uma coligação.

Exame – 2006, 2.^a Fase



11. No dia 9 de Outubro de 2005, realizaram-se eleições autárquicas em Portugal.

Os dados apresentados no quadro seguinte dizem respeito às eleições para a Câmara Municipal de um certo Concelho.

Total de eleitores inscritos: 141 160
Número de mandatos: 11
Partido concorrentes: A, B, C, D, E e F

Os resultados provisórios das eleições para a Câmara Municipal deste concelho, divulgados pelo Secretariado Técnico dos Assuntos para o Processo Eleitoral (STAPE), pouco tempo depois do encerramento das urnas, foram os seguintes:

Número de votos brancos: 2 225

Número de votos nulos: 1 550

Partidos	A	B	C	D	E	F
Número de votos	28 799	17 437	11 959	4 785	948	340

No dia 11 de Outubro, um jornal diário, referindo-se às eleições para a mesma Câmara Municipal, publicou uma notícia, na qual se podia ler:

O partido D vai exigir a recontagem dos votos por considerar que persistem dúvidas quanto ao resultado oficial divulgado na noite de domingo. Por apenas 15 votos (...), o partido D não elegeu o seu cabeça-de-lista como vereador. (...) A eleição de um vereador do partido D alteraria a relação de forças no executivo dessa Câmara. (...) «Era fundamental que o partido D estivesse representado, não só pela sua força já tem, mas também porque obrigaria o presidente a dialogar com a oposição e a aprofundar a democracia e a pluralidade de ideias», frisou o cabeça de lista do partido D.

Tendo em conta os resultados eleitorais, elabore uma composição na qual comente esta notícia. Na sua composição, deve:

- determinar o número de mandatos obtidos por cada força política, aplicando o método de Hondt (apresente os quocientes arredondados às décimas);
- explicar por que razão foi por 15 votos que o partido D não elegeu nenhum vereador e qual o partido que perderia um mandato se o partido D tivesse mais 15 votos (admitindo que os restantes partidos mantinham a votação);
- explicar o sentido da frase (acima sublinhada) do cabeça-de-lista do partido D, relacionando-a com o tipo de maioria (simples ou absoluta) obtida pela força vencedora e com o que teria acontecido, caso ele tivesse sido eleito.

Exame – 2006, 1.^a Fase

