Funções (10.º ano)

Função quadrática

Exercícios de Provas Nacionais e Testes Intermédios - Propostas de resolução

1. Como o vértice da parábola tem coordenadas $(2, -1)$, temos que a função é definida por $f(x) = a(x-2)^2 - 1$, ou seja:
   - $k = 2$
   - $h = -1$

   E como o ponto de coordenadas (0,1) pertence ao gráfico da função, ou seja, $f(0) = 1$ então, substituindo as coordenadas do plano na expressão anterior, determinamos o valor de a:

$$f(0) = 1 \Leftrightarrow a(0-2)^2 - 1 = 1 \Leftrightarrow a(-2)^2 = 1+1 \Leftrightarrow 4a = 2 \Leftrightarrow a = \frac{2}{4} \Leftrightarrow a = \frac{1}{2}$$

Teste Intermédio 10.º ano – 16.03.2012

2.

2.1. Temos que:

- As coordenadas do ponto A são $(-1,0)$, porque pertence simultaneamente ao eixo Ox e à reta definida pela equação $x = -1$
- o ponto B tem ordenada nula porque pertence ao eixo Ox, pelo que podemos determinar a sua abcissa substituindo a ordenada por zero na equação da reta t:

$$0 = -2x + 8 \Leftrightarrow 2x = 8 \Leftrightarrow x = \frac{8}{2} \Leftrightarrow x = 4$$

- o ponto P tem de coordenadas $(x, -2x+8)$ por tem abcissa x e pertence à reta t
- o ponto Q tem de coordenadas $(-1, -2x+8)$ porque é o ponto da reta r com ordenada igual à do ponto P

Assim, vem que a abcissa do ponto P pode variar entre as abcissas dos pontos A e B, ou seja, $x \in]-1,4[$

E a área do trapézio é:

$$S(x) = A_{[ABPQ]} = \frac{\overline{AB} + \overline{PQ}}{2} \times \overline{AQ} = \frac{x_B - x_A + x_P - x_Q}{2} \times y_Q = \frac{4-(-1)+x-(-1)}{2} \times (-2x+8) =$$

$$= \frac{5+x+1}{2} \times (-2x+8) = \frac{6+x}{2} \times (-2x+8) = \left(3 + \frac{x}{2}\right)(-2x+8) = -6x+24-x^2+4x = -x^2-2x+24$$

2.2. Traduzindo a condição definida por meio de uma inequação, temos:

$$-x^2-2x+24>21 \Leftrightarrow -x^2-2x+24-21>0 \Leftrightarrow -x^2-2x+3>0$$

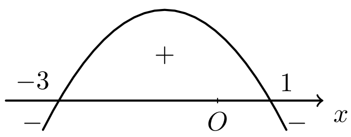
Como:

$$-x^2-2x+3=0 \Leftrightarrow x=\frac{-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-4(-1)(3)}}{2(-1)} \Leftrightarrow x=-3 \vee x=1$$

Temos que: $-x^2-2x+3>0$ se $x\in]-3{,}1[$

Como, pela definição da função S, $x\in]-1{,}4[$, o conjunto dos valores de x para os quais a área do trapézio $[ABPQ]$ é superior a 21, é:

$$]-3{,}1[\cap]-1{,}4[=]-1{,}1[$$



Teste Intermédio 10.º ano – 16.03.2012

3.

3.1. Considerando x a abcissa do ponto P, temos que a sua ordenada é $y_P=2x-2$, porque o ponto está sobre a reta, e assim vem que:

- o comprimento do lado horizontal do retângulo é: $x_B-x_P=6-x$
- o comprimento do lado vertical do retângulo é: $y_P=2x-2$

Assim, vem que a abcissa do ponto P pode variar entre as abcissas dos pontos A e B, ou seja, $x\in]1{,}6[$
E a área do retângulo é:

$$S(x)=(x_B-x_P)(y_P))=(6-x)(2x-2)=12x-12-2x^2+2x=-2x^2+14x-12$$

3.2. Traduzindo a condição definida por meio de uma inequação, temos:

$$-2x^2+14x-12<8 \Leftrightarrow -2x^2+14x-12-8<0 \Leftrightarrow -2x^2+14x-20<0$$

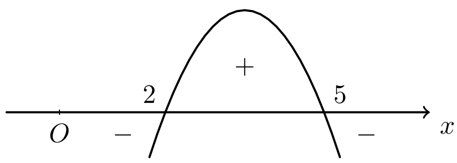
Como:

$$-2x^2+14x-20=0 \Leftrightarrow -x^2+7x-10=0 \Leftrightarrow x=\frac{-7\pm\sqrt{7^2-4(-1)(-10)}}{2(-1)} \Leftrightarrow x=2 \vee x=5$$

Temos que: $-2x^2+14x-20<0$ se $x\in]-\infty{,}2[\cup]5,+\infty[$

Como, pela definição da função S, $x\in]1{,}6[$, o conjunto dos valores de x para os quais a área do retângulo é inferior a 8, é:

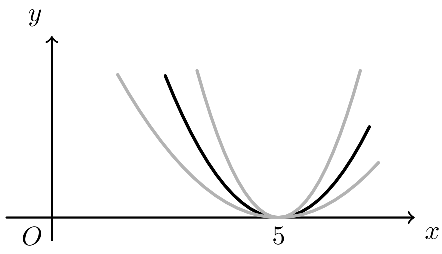
$$\big(]-\infty{,}2[\cup]5,+\infty[\big)\cap]1{,}6[=]1{,}2[\cup]5{,}6[$$



Teste Intermédio 10.º ano – 06.05.2011

4. Como o gráfico da função f é uma parábola (porque f é uma função quadrática) e o a (o coeficiente de x^2) é positivo, sabemos que a abertura da parábola está voltada para cima.

Como 5 é o único zero da função, ou seja, $f(5) = 0$ podemos concluir que a abcissa do vértice, cuja ordenada é zero, pelo que todas as imagens da função são positivas (à excepção da imagem do objeto 5, que é zero).



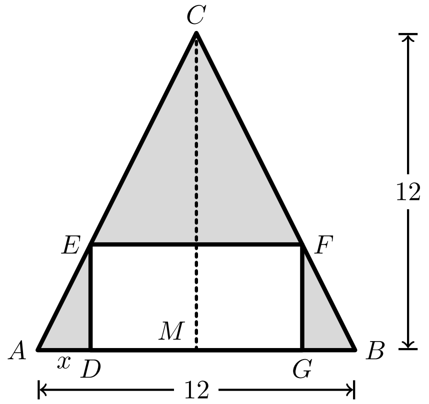
Assim, qualquer que seja o valor de a (positivo), o contradomínio de f é $[0, +\infty[$.

Resposta: **Opção B**

Teste Intermédio 10.º ano – 05.05.2010

5.

5.1. Temos que:



- A área do triângulo $[ABC]$ é:

$$A_{[ABC]} = \frac{12 \times 12}{2} = \frac{144}{2} = 72 \text{ m}^2$$

- o comprimento do lado $[DG]$ do retângulo é:

$$\overline{DG} = \overline{AB} - \overline{AD} - \overline{GB} = \overline{AB} - 2 \times \overline{AD} = 12 - 2x$$

- designado por M o ponto médio do lado $[AB]$, temos que os triângulos $[ADE]$ e $[AMC]$ são semelhantes, e como $\overline{AM} = \frac{12}{2} = 6$, vem que:

$$\frac{\overline{DE}}{\overline{CM}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{AM}} \Leftrightarrow \frac{\overline{DE}}{12} = \frac{x}{6} \Leftrightarrow \overline{DE} = \frac{12x}{6} \Leftrightarrow \overline{DE} = 2x$$

- a área do retângulo $[DGFE]$, é:

$$A_{[DGFE]} = \overline{DG} \times \overline{DE} = (12 - 2x)2x = 24x - 4x^2$$

Assim, a área, em metros quadrados, da zona relvada é dada, em função de x, pela diferença entre as áreas do triângulo $[ABC]$ e do retângulo $[DGFE]$, ou seja,

$$S(x) = A_{[ABC]} - A_{[DGFE]} = 72 - (24x - 4x^2) = 72 - 24x + 4x^2 = 4x^2 - 24x + 72$$

5.2. Como o gráfico da função S é parte de uma parábola com a abertura voltada para cima (porque o coeficiente de x^2 é positivo), o valor mínimo da função é a ordenada do vértice da parábola.

Verificando que o ponto de coordenadas (0,72) pertence à parábola, podemos determinar o outro ponto da parábola com ordenada 72 resolvendo a equação seguinte:

$$4x^2 - 24x + 72 = 72 \Leftrightarrow 4x^2 - 24x = 0 \Leftrightarrow x(4x - 24) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \lor 4x - 24 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \lor x = \frac{24}{4} \Leftrightarrow x = 0 \lor x = 6$$

Assim, sabemos que os pontos (0,72) e (6,72) pertencem ambos à parábola, e como têm a mesma ordenada, são simétricos relativamente ao vértice. Desta forma, o eixo de simetria da parábola é a reta definida por $x = \frac{0+6}{2} = 3$, ou seja, a abcissa do vértice é 3, e por isso, a sua ordenada, que neste caso é o mínimo da função, é:

$$S(3) = 4(3)^2 - 24(3) + 72 = 4 \times 9 - 72 + 72 = 36$$

Assim, o valor de x para o qual a área da zona relvada é mínima é 3 e o valor da área correspondente é 36 m^2

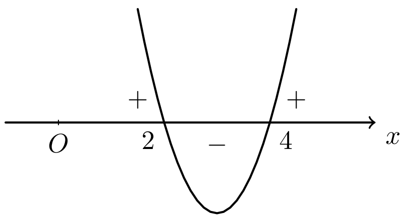
5.3. Traduzindo a condição definida por meio de uma inequação, temos:

$$4x^2 - 24x + 72 > 40 \Leftrightarrow 4x^2 - 24x + 72 - 40 > 0 \Leftrightarrow 4x^2 - 24x + 32 > 0$$

Como:

$$4x^2 - 24x + 32 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 8 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4(1)(8)}}{2(1)} \Leftrightarrow x = 2 \lor x = 4$$

Temos que: $4x^2 - 24x + 72 - 40 > 0$ se $x \in]-\infty,2[\cup]4,+\infty[$



Como, pela definição da função S, $x \in [0,6]$, o conjunto dos valores de x para os quais a área da zona relvada é superior a 40 m^2, é:

$$\big(\,]-\infty,2[\cup]4,+\infty[\,\big) \cap [0,6] = [0,2[\cup]4,6]$$

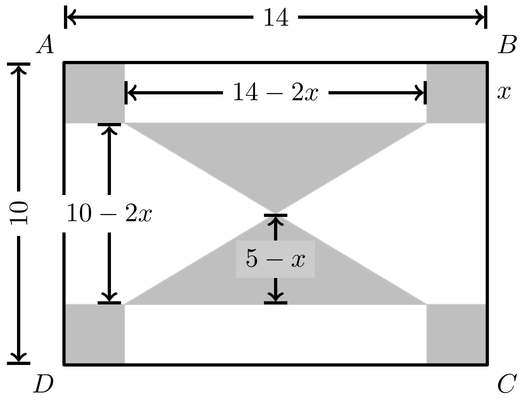
Teste Intermédio 10.º ano – 05.05.2010

6.

6.1. A área da placa de metal pode ser obtida pela soma das áreas de quatro quadrados iguais com a área de dois quadrados iguais.

Assim, temos que:

- Como o lado de cada quadrado tem comprimento x, a área de cada quadrado é dada por x^2
- considerando como base dos triângulos o lado horizontal, a sua medida é a diferença entre o lado maior da peça e os comprimentos dos dois quadrados, ou seja: $14 - 2x$
- considerando as alturas relativas às bases consideradas, a sua medida é a metade da diferença entre o lado menor da peça e os comprimentos dos dois quadrados, ou seja: $\dfrac{10-2x}{2} = 5 - x$



Desta forma, a área da placa de metal, em função de x, é:

$$A(x) = 4 \times A_{\square} + 2 \times A_{\triangle} = 4x^2 + 2 \times \frac{(14-2x)(5-x)}{2} = 4x^2 + 70 - 14x - 10x + 2x^2 =$$

$$= 4x^2 + 70 - 24x + 2x^2 = 6x^2 - 24x + 70$$

6.2. Como o gráfico da função A é parte de uma parábola com a abertura voltada para cima (porque o coeficiente de x^2 é positivo), o valor mínimo da função é a ordenada do vértice da parábola.

Verificando que o ponto de coordenadas $(0{,}70)$ pertence à parábola, podemos determinar o outro ponto da parábola com ordenada 70 resolvendo a equação seguinte:

$$6x^2 - 24x + 70 = 70 \;\Leftrightarrow\; 6x^2 - 24x = 0 \;\Leftrightarrow\; x(6x - 24) = 0 \;\Leftrightarrow\; x = 0 \,\vee\, 6x - 24 = 0 \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; x = 0 \,\vee\, x = \frac{24}{6} \;\Leftrightarrow\; x = 0 \,\vee\, x = 4$$

Assim, sabemos que os pontos $(0{,}70)$ e $(4{,}70)$ pertencem ambos à parábola, e como têm a mesma ordenada, são simétricos relativamente ao vértice. Desta forma, o eixo de simetria da parábola é a reta definida por $x = \dfrac{0+4}{2} = 2$, ou seja, a abcissa do vértice é 2, e por isso, a sua ordenada, que neste caso é o mínimo da função, é:

$$A(2) = 6(2)^2 - 24(2) + 70 = 6 \times 4 - 48 + 70 = 46$$

Assim, o valor de x para o qual a área da parte em metal é mínima é 2 e o valor da área correspondente é 46 cm^2

6.3. Como a peça tem área $10 \times 14 = 140$ cm^2 e a área da parte em metal é igual à área da parte em madeira, se ambas ocuparem metade da peça, o valor de x correspondente é a solução da equação $A(x) = \dfrac{140}{2} \;\Leftrightarrow\; A(x) = 70$

Assim, resolvendo a equação, temos:

$$A(x) = 70 \;\Leftrightarrow\; 6x^2 - 24x + 70 = 70 \;\Leftrightarrow\; 6x^2 - 24x = 0 \;\Leftrightarrow\; x(6x - 24) = 0 \;\Leftrightarrow$$

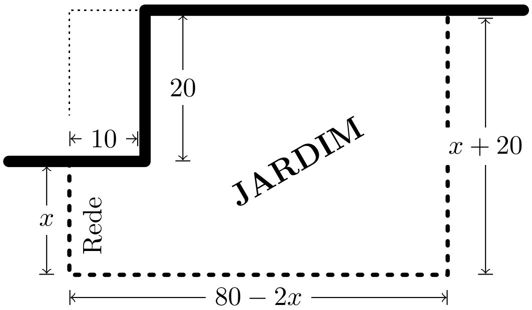
$$\Leftrightarrow\; x = 0 \,\vee\, 6x - 24 = 0 \;\Leftrightarrow\; x = 0 \,\vee\, x = \frac{24}{6} \;\Leftrightarrow\; x = 0 \,\vee\, x = 4$$

Como $x \in]0{,}5[$, então a única solução da equação é $x = 4$

7.

7.1. Podemos vericar que:

- A área do jardim pode ser obtida pela diferença da áreas de dois retângulos, um situado sobre o lago, e o outro correspondente aos dois comprimentos limitados pela rede, com comprimentos diferentes de x
- o menor deles dos retângulos, situado sobre o lago, tem área $10 \times 20 = 200$ m^2
- Um dos lados do retângulo maior mede $20+x$ e o outro tem a medida correspondente ao que resta dos 100 metros de rede, depois de vedada a parte de comprimento x e a parte de comprimento $x+20$, ou seja:



$$100 - x - (x+20) = 100 - x - x - 20 = 80 - 2x$$

Assim, a área, em m^2, do jardim, é dada, em função de x, por:

$$a(x) = (80-2x)(x+20) - 200 = 80x + 1600 - 2x^2 - 40x - 200 = -2x^2 + 40x + 1400$$

7.2. Como o gráfico da função a é parte de uma parábola com a abertura voltada para baixo (porque o coeficiente de x^2 é negativo), o valor máximo da função é a ordenada do vértice da parábola.

Verificando que o ponto de coordenadas (0,1400) pertence à parábola, podemos determinar o outro ponto da parábola com ordenada 1400 resolvendo a equação seguinte:

$$-2x^2 + 40x + 1400 = 1400 \Leftrightarrow -2x^2 + 40x + 1400 - 1400 = 0 \Leftrightarrow -2x^2 + 40x = 0 \Leftrightarrow$$

$$x(-2x+40) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee -2x + 40 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = \frac{-40}{-2} \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 20$$

Assim, sabemos que os pontos (0,1400) e (20,1400) pertencem ambos à parábola, e como têm a mesma ordenada, são simétricos relativamente ao vértice. Desta forma, o eixo de simetria da parábola é a reta definida por $x = \frac{0+20}{2} = 10$, ou seja, a abcissa do vértice é 10, e por isso, a sua ordenada, que neste caso é o máximo da função, é:

$$a(10) = -2(10)^2 + 40(10) + 1400 = -200 + 400 + 1400 = 1600$$

Assim, o valor de x para o qual é máxima a área do jardim é máxima é 10 e essa área máxima é 1600 m^2

Teste Intermédio 10.º ano – 28.05.2008