Geometria (10.º ano)

Conjuntos de pontos e condições

Exercícios de Provas Nacionais e Testes Intermédios - Propostas de resolução

1. Analisando a figura podemos verificar que os pontos do plano que pertencem à zona representada a sombreado, são os pontos:

   - que pertencem ao interior da circunferência (ou à circunferência) de raio 2 e centro no ponto de coordenadas (0,0), ou seja, os pontos que satisfazem a condição:

   $$(x-0)^2+(y-0)^2 \leq 2^2 \Leftrightarrow x^2+y^2 \leq 4$$

   - cuja abcissa é inferior a -1 ou superior a 1, ou seja, cuja distância ao eixo das ordenadas é superior a 1, pelo que verificam a condição:

   $$x \leq -1 \vee x \geq 1 \Leftrightarrow |x| \geq 1$$

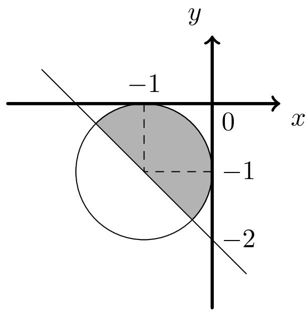
   Como os pontos verificam cumulativamente as duas condições, a região sombreada é definida por:

   $$x^2+y^2 \leq 4 \wedge |x| \geq 1$$

   Resposta: **Opção C**

Exame – 2018, 1.ª Fase

2. Observando que $(x+1)^2+(y+1)^2 \leq 1 \Leftrightarrow (x-(-1))^2+(y-(-1))^2 \leq 1^2$, temos que esta condição representa o círculo de centro no ponto $(-1,-1)$ e raio 1

   Observando que $x+y+2 \geq 0 \Leftrightarrow y \geq -x-2$, temos que esta condição representa o semiplano superior limitado pela reta de declive -1 e ordenada na origem -2

   Representando a sombreado a interseção dos dois conjuntos de pontos, como na figura ao lado, podemos observar que corresponde a um semi-círculo de raio 1

   Assim, o perímetro da região definida pela condição é a soma do semi-perímetro do círculo com o diâmetro do círculo $(2r)$:

   $$P = \frac{2\pi r}{2} + 2r = \frac{2\pi \times 1}{2} + 2 \times 1 = \pi + 2$$

   Resposta: **Opção C**

Exame – 2017, 2.ª Fase

3. Representando o quadrado definido pela condição dada, podemos verificar que o centro da circunferência é o ponto médio de uma das diagonais, ou seja o ponto:

$$C\,(2{,}3)$$

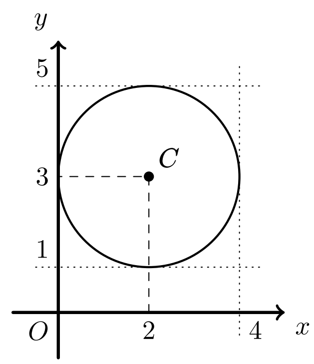
Da mesma forma, o raio da circunferência é metade do comprimento do lado:

$$r = \frac{4}{2} = 2$$

E assim, temos que a equação da circunferência inscrita no quadrado é:

$$(x-2)^2 + (y-3)^2 = 2^2 \;\Leftrightarrow\; (x-2)^2 + (y-3)^2 = 4$$

Resposta: **Opção C**



Exame – 2016, 2.ª Fase

4. Observando a figura podemos verificar que os pontos do plano que pertencem à zona representada a sombreado, são os pontos:

- que pertencem ao interior da circunferência (ou à circunferência) de raio 2 (ou seja, a distância $\overline{AO}$) e centro no ponto de coordenadas $(0,-2)$, isto é, os pontos que satisfazem a condição:

$$(x-0)^2 + (y-(-2))^2 \le 2^2 \;\Leftrightarrow\; x^2 + (y+2)^2 \le 4$$

- cuja ordenada é inferior à diferença do dobro da abcissa e uma unidade (por exemplo a origem não satisfaz a condição $y \le 2x - 1$ porque $0 > 2(0) - 1$, pelo que verificam a condição:

$$y \le 2x - 1$$

- cuja abcissa é não negativa, ou seja, verificam a condição:

$$x \ge 0$$

Como os pontos verificam cumulativamente as duas condições, a região sombreada é definida por:

$$x^2 + (y+2)^2 \le 4 \;\wedge\; y \le 2x - 1 \;\wedge\; x \ge 0$$

Teste Intermédio 10.º ano – 16.03.2012

5. Observando a condição $(x+1)^2 + (y-1)^2 \le 2$, podemos verificar que os pontos pertencem ao círculo de centro no ponto de coordenadas $(-1{,}1)$ e raio $\sqrt{2}$.

A condição $x \ge 0$ representa todos os pontos com abcissa positiva, ou seja os pontos do 1.º e 4.º quadrantes.

Assim, de entre as opções apresentadas, a que representa os pontos que satisfazem cumulativamente estas duas condições é a opção (C), porque a circunferência que delimita o círculo contém a origem, uma vez que a distância do centro à origem é $\sqrt{2}$, ao contrário do que é representado na opção (A), a região representada na opção (B) contém pontos do 2.º quadrante, ou seja, de abcissa negativa e o centro do círculo representado na opção (D) tem centro no ponto (1,1)

Resposta: **Opção C**

Teste Intermédio 10.º ano – 06.05.2011

6. Calculando o raio (r) da semicircunferência, temos:

$$r = \overline{AD} = \sqrt{(4-8)^2+(7-10)^2} = \sqrt{(-4)^2+(-3)^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$$

Assim, observando a figura podemos verificar que os pontos do plano que pertencem à zona representada a sombreado, são os pontos:

- que pertencem ao interior da circunferência (ou à circunferência) de raio 5 e centro no ponto de coordenadas (4,7), isto é, os pontos que satisfazem a condição:

$$(x-4)^2+(y-7)^2 \leq 5^2 \Leftrightarrow (x-4)^2+(y-7)^2 \leq 25$$

- cuja ordenada é inferior à ordenada do ponto A, ou seja, que verificam a condição:

$$y \leq y_A \Leftrightarrow y \leq 7$$

- cuja abcissa está compreendida entre 0 e a abcissa do pontos, ou seja:

$$0 \leq x \leq x_A \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 4$$

Como os pontos verificam cumulativamente as duas condições, a região sombreada é definida por:

$$(x-4)^2+(y-7)^2 \leq 25 \wedge y \leq 7 \wedge 0 \leq x \leq 4$$

Teste Intermédio 10.º ano – 29.01.2010

7. Analisando a figura podemos verificar que os pontos do plano que pertencem à zona representada a sombreado, são os pontos:

- que pertencem ao interior da circunferência (ou à circunferência) de raio 2 e centro no ponto de coordenadas $(2,-1)$, ou seja, os pontos que satisfazem a condição:

$$(x-2)^2+(y-(-1))^2 \leq 2^2 \Leftrightarrow (x-2)^2+(y+1)^2 \leq 4$$

- que pertencem ao semiplano limitado pelo eixo Ox, ou seja a reta de equação $y=0$, que contém os pontos de ordenada não negativa, isto é, o semiplano é definido pela condição:

$$y \geq 0$$

Como os pontos verificam cumulativamente as duas condições, a região sombreada é definida por:

$$(x-2)^2+(y+1)^2 \leq 4 \wedge y \geq 0$$

Resposta: **Opção B**

Teste Intermédio 10.º ano – 06.05.2009

8.

8.1. Analisando a figura podemos verificar que os pontos do plano que pertencem à zona representada a sombreado, são os pontos:

- que pertencem ao interior da circunferência (ou à circunferência) de raio 3 e centro no ponto de coordenadas (0,0), ou seja, os pontos que satisfazem a condição:

$$(x-0)^2+(y-0)^2 \leq 3^2 \Leftrightarrow x^2+y^2 \leq 9$$

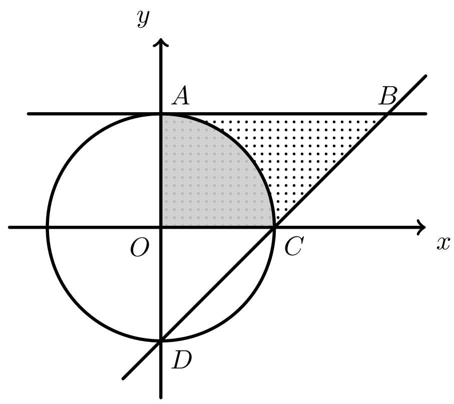
- que pertencem ao semiplano limitado pela reta DC que não contem a origem; considerando as coordenadas dos pontos $D(0,-3)$ e $C(3,0)$, temos que a reta DC tem ordenada na origem $b=-3$ e declive $m=\dfrac{0-(-3)}{3-0}=\dfrac{3}{3}=1$, pelo que o semiplano é definido pela condição:

$$y \leq x-3$$

Como os pontos verificam cumulativamente as duas condições, a região sombreada é definida por:

$$x^2+y^2 \leq 9 \wedge y \leq x-3$$

8.2. A área da região ponteada pode ser obtida pela diferença das áreas do trapézio $[ABCO]$ e do quarto de círculo sobreposto ao trapézio.



Assim, temos que:

- a área do quarto de círculo, de raio 3, é:

$$A_C=\frac{1}{4}\times \pi 3^2=\frac{9\pi}{4}$$

- a área do trapézio é:

$$A_{[ABCO]}=\frac{\overline{OC}+\overline{AB}}{2}\times \overline{OA}=\frac{3+6}{2}\times 3=\frac{27}{2}$$

E assim, a área da região ponteada, arredondado às centésimas, é:

$$A_P=A_{[ABCO]}-A_C=\frac{27}{2}-\frac{9\pi}{4}\approx 6{,}43$$

Teste Intermédio 10.º ano – 28.01.2009

9. Calculando o raio (r) da semicircunferência, temos:

$$r=\overline{QO}=\sqrt{(3-0)^2+(4-0)^2}=\sqrt{9+16}=\sqrt{25}=5$$

Assim, analisando a figura podemos verificar que os pontos do plano que pertencem à zona representada a sombreado, são os pontos:

- que pertencem ao interior da semicircunferência (ou ao arco da semicircunferência) de raio 5 e centro no ponto de coordenadas (0,0), ou seja, os pontos que satisfazem a condição:

$$(x-0)^2+(y-0)^2 \leq 5^2 \Leftrightarrow x^2+y^2 \leq 25$$

- cuja ordenada é superior ou igual a 4, pelo que verificam a condição:

$$y \geq 4$$

Como os pontos verificam cumulativamente as duas condições, a região sombreada é definida por:

$$x^2+y^2 \leq 25 \wedge y \geq 4$$

Resposta: **Opção B**

Teste Intermédio 10.º ano – 28.05.2008