Geometria (10.º ano)

Vetores e equação vetorial da reta

Exercícios de Provas Nacionais e Testes Intermédios - Propostas de resolução

1. Como a base da pirâmide está contida no plano xOz e o vértice que não pertence à base, o vértice E, tem coordenadas $(-2,6,2)$, então a altura da pirâmide é a distância do ponto E ao plano xOz, ou seja 6.

   Como o volume da pirâmide é 20, podemos calcular a área da base:

   $$V_{[ABCDE]} = \frac{1}{3} \times A_{[ABCD]} \times 6 \Leftrightarrow 20 = \frac{6 \times A_{[ABCD]}}{3} \Leftrightarrow 20 = 2 \times A_{[ABCD]} \Leftrightarrow \frac{20}{2} = A_{[ABCD]} \Leftrightarrow 10 = A_{[ABCD]}$$

   E assim, com $[ABCD]$ é um quadradado, podemo determinar a medida do lado $[AB]$, ou seja a norma do vetor $\overrightarrow{AB}$:

   $$\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \sqrt{10}$$

   Como o $\overrightarrow{BE}$ tem coordenadas $(-1,6,2)$ podemos determinar as coordenadas do ponto B a partir das coordenadas do ponto E:

   $$B + \overrightarrow{BE} = E \Leftrightarrow B = E - \overrightarrow{BE} \Leftrightarrow B = (-2,6,2) - (-1,6,2) = (-2-(-1),6-6,2-2) = (-1,0,0)$$

   Como o vértice A pertence ao semieixo positivo Oz, tem abcissa e ordenada nulas, ou seja, as suas coordenadas são da forma $(0,0,z)$; $z \in \mathbb{R}^+$, pelo que as coordenadas do vetor $\overrightarrow{AB}$ são da forma:

   $$\overrightarrow{AB} = B - A = (-1,0,0) - (0,0,z) = (-1,0,-z);\ z \in \mathbb{R}^+$$

   Desta forma determinamos o valor de z, recorrendo ao valor da norma:

   $$\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \sqrt{10} \Leftrightarrow \sqrt{(-1)^2 + 0^2 + z^2} = \sqrt{10} \Rightarrow (-1)^2 + 0^2 + z^2 = 10 \Leftrightarrow z^2 = 10 - 1 \Leftrightarrow z = \pm\sqrt{9} \Leftrightarrow z = \pm 3$$

   Como $\overrightarrow{AB} = (-1,0,-z)$; $z \in \mathbb{R}^+$, temos que $\overrightarrow{AB} = (-1,0,-3)$

   Exame – 2021, Ép. especial

2. Como o ponto B pertence ao semieixo positivo Oy e à reta de equação $y = 2x + 4$, as suas coordenadas são $(0,4)$

   Como o ponto A pertence ao semieixo negativo Ox, tem ordenada nula, pelo que a sua abcissa é: $0 = 2x + 4 \Leftrightarrow -4 = 2x \Leftrightarrow -\frac{4}{2} = x \Leftrightarrow -2 = x$

   Desta forma, podemos determinar as coordenadas do vetor $\overrightarrow{BA}$:

$$\overrightarrow{BA} = A - B = (-2,0) - (0,4) = (-2 - 0,0 - 4) = (-2, -4)$$

   E assim, as coordenadas do ponto médio, M, do segmento de reta $[AB]$, são:

$$B + \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} = (0,4) + \frac{1}{2}(-2, -4) = \left(0 + \frac{-2}{2}, 4 + \frac{-4}{2}\right) = (0 - 1, 4 - 2) = (-1,2)$$

   Resposta: **Opção B**

Exame – 2019, 2.ª Fase

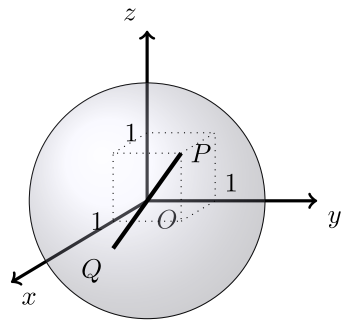
3. Determinando as coordenadas do vetor $\overrightarrow{OP}$ e depois do vetor $\overrightarrow{u}$, temos:

$$\overrightarrow{OP} = P - O = (1,1,1) - (0,0,0) = (1,1,1)$$

$$\overrightarrow{u} = -2\overrightarrow{OP} = -2(1,1,1) = (-2, -2, -2)$$

   Assim, temos que as coordenadas do ponto Q são:

$$Q = P + \overrightarrow{u} = (1,1,1) + (-2, -2, -2) = (-1, -1, -1)$$



   No contexto do problema, como $[OP]$ é um raio da superfície esférica (porque O é o centro da esfera e P um ponto da superfície esférica), então o ponto $Q = P - 2\overrightarrow{OP} = P + 2\overrightarrow{PO}$ é o ponto simétrico do ponto P relativamente a O, ou seja, $[PQ]$ é um diâmetro da superfície esférica.

Exame – 2018, Época especial

4. Escrevendo a equação da reta r na forma reduzida, para identificar o valor do declive, temos:

$$ax + 2y + 1 = 0 \Leftrightarrow 2y = -ax - 1 \Leftrightarrow y = \frac{-ax - 1}{2} \Leftrightarrow y = -\frac{a}{2}x - \frac{1}{2}, \text{ e assim } m_r = -\frac{a}{2}$$

   Calculando o valor do declive da reta s, através das coordenadas do vetor diretor, vem:

$$m_s = \frac{2a}{a} = 2$$

   Como as retas r e s são paralelas, os respetivos declives são iguais, pelo que podemos calcular o valor de a:

$$m_r = m_s \Leftrightarrow -\frac{a}{2} = 2 \Leftrightarrow -a = 2 \times 2 \Leftrightarrow a = -4$$

   Resposta: **Opção A**

Exame – 2018, Época especial

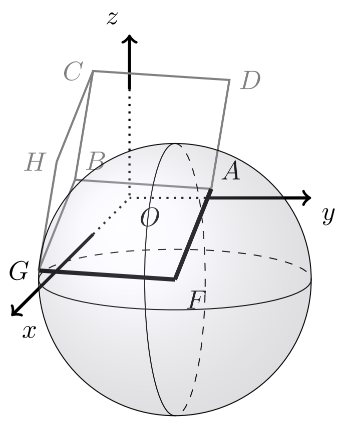
5. Como $[ABCDEFGH]$ é um cubo então as arestas são iguais, ou seja, o raio da superfície esférica (r) é igual à norma do vetor $\overrightarrow{FA}$:

$$r = \overline{FG} = \overline{FA} = \left\|\overrightarrow{FA}\right\| = \sqrt{2^2+3^2+6^2} = \sqrt{4+9+36} = \sqrt{49} = 7$$

Desta forma uma condição cartesiana que define a superfície esférica de centro no ponto $F(1,3,-4)$ e de raio 7, é:

$$(x-1)^2+(y-3)^2+\big(z-(-4)\big)^2 = 7^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2+(y-3)^2+(z+4)^2 = 49$$

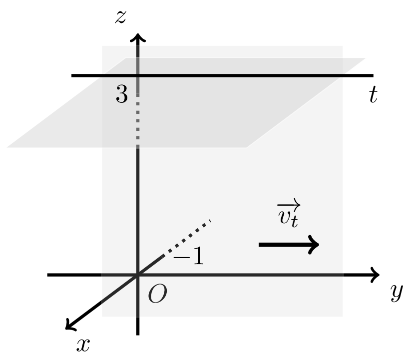


Teste Intermédio 11.º ano – 06.03.2013

6. Como o vetor diretor da reta t ($\overrightarrow{v_t} = (0,1,0)$) tem abcissa e cota nulas, a reta é paralela ao eixo das ordenadas.

Assim, de entre as opções apresentadas, a única que define a reta t é a interseção de um plano paralelo ao plano yOz, ou seja o plano definido por $x=-1$ com um plano paralelo ao plano xOy, ou seja, o plano definido por $z=3$

Resposta: **Opção C**



Teste Intermédio 10.º ano – 16.03.2012

7. Observando a equação que define a reta r, $y=2x-1$, podemos verificar que o ponto de interseção da reta com o eixo das ordenadas tem coordenadas $(0,-1)$, e também que o declive é 2, pelo que, o vetor $\overrightarrow{v} = (1,2)$ é um vetor diretor da reta.

Assim, uma equação vetorial da reta r, é:

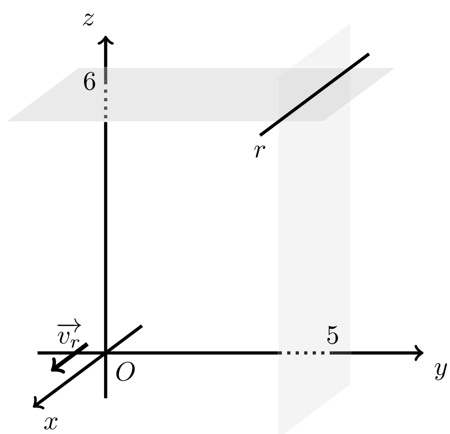
$$(x,y) = (0,-1) + k(1,2), k \in \mathbb{R}$$

Teste Intermédio 10.º ano – 16.03.2012

8. Como o vetor diretor da reta r ($\overrightarrow{v_r} = (0,0,1)$) tem ordenada e cota nulas, a reta é paralela ao eixo das abcissas.

Assim, de entre as opções apresentadas, a única que define a reta r é a interseção de um plano paralelo ao plano xOz, ou seja o plano definido por $y=5$ com um plano paralelo ao plano xOy, ou seja, o plano definido por $z=6$

Resposta: **Opção A**



Teste Intermédio 11.º ano – 24.05.2011

9.

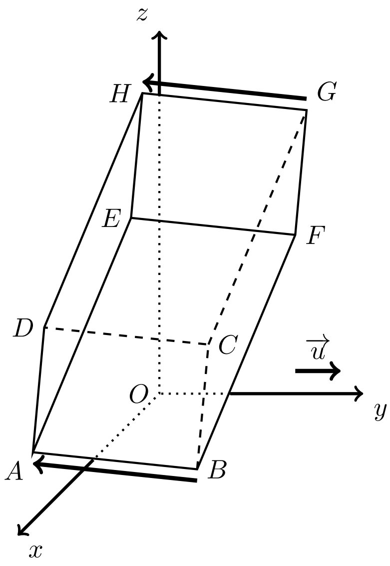
9.1. Como $[ABCDEFGH]$ é um prisma quadrangular regular, as bases são quadrados, pelo que $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{GH}$

Calculando as coordenadas do vetor $\overrightarrow{BA}$, temos:

$\overrightarrow{BA} = A - B = (11,-1,2) - (8,5,0) = (11-8,-1-5,2-0) = (3,-6,2)$

E assim, as coordenadas do ponto H são:

$$H = \overrightarrow{GH} + G = (3,-6,2) + (6,9,15) = (9,3,17)$$



9.2. Como a reta é paralela ao eixo Oy, então um vetor diretor da reta tem abcissa e cota nulas, por exemplo $\overrightarrow{u} = (0,1,0)$

Como a reta contém o ponto G, é definida pela condição:

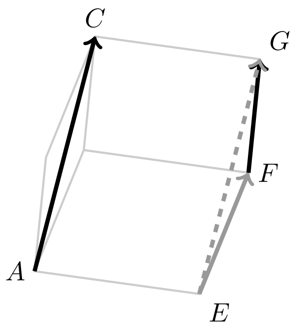
$(x,y,z) = G + k.\overrightarrow{u}, k \in \mathbb{R} \Leftrightarrow (x,y,z) = (6,9,15) + k(0,1,0), k \in \mathbb{R}$

Teste Intermédio 10.º ano – 06.05.2011

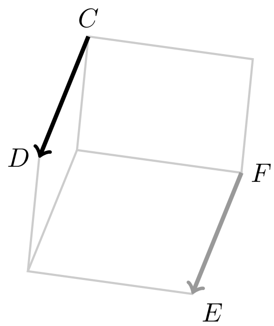
10.

10.1.

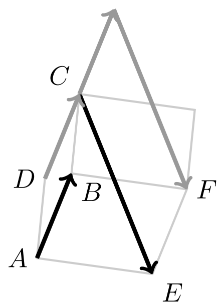
$\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FG} = \overrightarrow{AC}$



$F + \overrightarrow{CD} = E$



$D + 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CE} = F$



10.1.1. A secção produzida no cubo pelo plano ABG é o retângulo $[ABGH]$

Determinando a medida da aresta do cubo temos que:

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (13,2,8) - (11,-1,2) = (13-11,2-(-1),8-2) = (2,3,6)$$

$$\overline{AB} = \left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \sqrt{2^2+3^2+6^2} = \sqrt{4+9+36} = \sqrt{49} = 7$$

E assim, a medida da diagonal da face é:

$$\overline{BG} = \sqrt{\left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2 + \left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2} = \sqrt{2 \times 7^2} = \sqrt{2} \times 7 = 7\sqrt{2}$$

E assim, a área da secção produzida no cubo pelo plano ABG, é:

$$A_{[ABGH]}) = \overline{AB} \times \overline{BG} = 7 \times 7\sqrt{2} = 49\sqrt{2}$$

10.1.2. Como $\overrightarrow{AB} = (2,3,6)$ e $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AB}$, temos que:

$$F = E + \overrightarrow{EF} = E + \overrightarrow{AB} = (8,5,0) + (2,3,6) = (10,8,6)$$

Como a reta deve ser paralela ao eixo Oz, então um vetor diretor da reta tem abcissa e ordenada nulas, por exemplo $\overrightarrow{v} = (0,0,1)$, e assim a reta deve conter o ponto F, é definida pela condição:

$$(x,y,z) = F + k.\overrightarrow{v}, k \in \mathbb{R} \Leftrightarrow (x,y,z) = (10,8,6) + k(0,0,1), k \in \mathbb{R}$$

Teste Intermédio 10.º ano – 29.01.2010

11. Como uma das bases do prisma está contida no plano xOy e as arestas laterais são perpendiculares a esta base, temos que a reta AD é paralela ao eixo Oz, e assim o ponto D tem abcissa e ordenada iguais ao ponto A e conta igual ao ponto E, ou seja:

$$D(x_A,y_A,z_E) = D(4,0,8)$$

Como o ponto F é simétrico do ponto E relativamente ao plano xOz, os dois pontos têm as mesmas abcissas e cotas e ordenadas siméticas, ou seja:

$$F(x_E, -y_E,z_E) = F(0,-3,8)$$

Desta forma as coordenadas do vetor $\overrightarrow{DF}$ são:

$$\overrightarrow{DF} = F - D = (0,-3,8) - (4,0,8) = (0-4,-3-0,8-8) = (-4,-3,0)$$

Assim, uma equação vectorial da reta DF é:

$$(x,y,z) = (4,0,8) + k(-4,-3,0), k \in \mathbb{R}$$

Teste Intermédio 10.º ano – 06.05.2009

12. Verificando que o ponto simétrico do ponto V, em relação ao plano xOy tem a mesma abcissa, a mesma ordenada e cota simétrica, temos que as coordenadas do ponto W são:

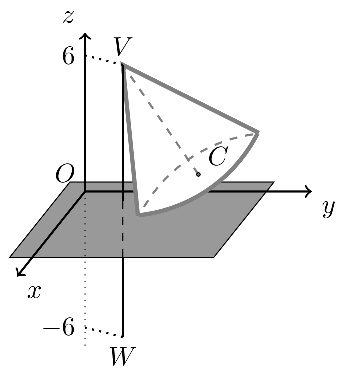
$$W(x_V,y_V,-z_V) = W(1,2,-6)$$

Para definir o segmento de reta $[WV]$, podemos verificar que o vetor $\overrightarrow{WV}$ é paralelo ao eixo das cotas e tem 12 unidades de comprimento, ou seja:

$$\overrightarrow{WV} = V - W = (1,2,6) - (1,2,-6) = (0,0,12)$$

E assim, uma condição vetorial que define o segmento de reta $[WV]$, é, por exemplo:

$$(x,y,z) = (1,2,-6) + \lambda(0,0,12), \lambda \in [0,1]$$



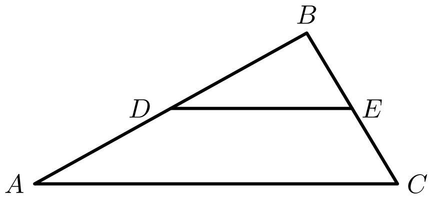
Teste Intermédio 11.º ano – 29.01.2009

13. Observando as quatro equações vetoriais, podemos verificar que o único vetor diretor com abcissa e ordenada nulas, ou seja, com direção paralela ao eixo Oz é o vetor de coordenadas $\overleftarrow{v} = (0,0,7)$.
Assim, temos que, de entre as opções apresentadas a única condição que define uma reta paralela ao eixo Oz é $(x,y,z) = (1,1,0) + k(0,0,7), k \in \mathbb{R}$

Resposta: **Opção B**

Teste Intermédio 10.º ano – 28.01.2009

14. Percorrendo sucessivamente as etapas indicadas na sugestão, temos:
   - $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$
   - $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{DB}$ (porque D é o ponto médio do lado $[AB]$
   - $\overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{BE}$ (porque E é o ponto médio do lado $[BC]$



Assim, temos que:

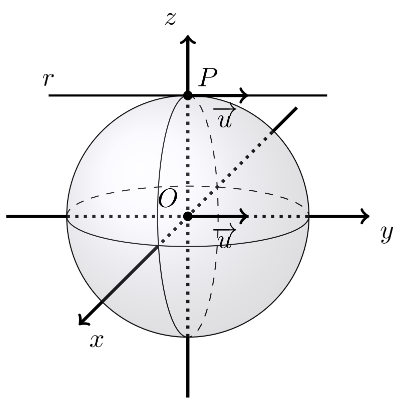
$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{DB} + 2\overrightarrow{BE} = 2\left(\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BE}\right) = 2\overrightarrow{DE}$$

Deta forma, como $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{DE}$, os dois vetores são colineares, ou seja, as retas AC e DE são paralelas.

Teste Intermédio 10.º ano – 28.01.2009

15. Pela observação da condição que define a esfera $\left(x^2 + y^2 + z^2 \leq 4\right)$, podemos verificar que:
   - tem centro no ponto $C(0,0,0)$
   - o comprimento r do raio é $r = \sqrt{4} = 2$
   - o ponto de coordenadas $(0,0,2)$ é o ponto da esfera com maior cota.

E também pela observação da equação vetorial da reta, podemos verificar que:
   - é paralela ao eixo das ordenadas (porque o vetor diretor tem abcissa e conta nula);
   - interseta o eixo das cotas no ponto de coordenadas $(0,0,2)$.



Desta forma podemos verificar que a reta é tangente à esfera no ponto de coordenadas $(0,0,2)$, como se ilustra na figura anterior, pelo que a interseção da reta com a esfera é este ponto.

Resposta: **Opção C**

Teste Intermédio 10.º ano – 28.05.2008

16. O vértice Q tem abcissa e ordenada respetivamente iguais às do vértice U, e cota nula (porque pertence ao plano xOy), ou seja, temos que $Q(x_U,y_U,0) = Q(2,2,0)$

Assim, podemos calcular as coordenadas do vetor $\overrightarrow{QU}$:

$$\overrightarrow{QU} = U - Q = (2,2,2) - (2,2,0) = (0,0,2)$$

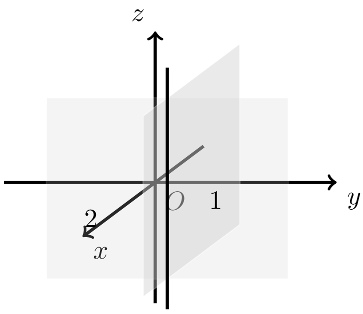
Pelo que uma condição que define a aresta $[QU]$ é:

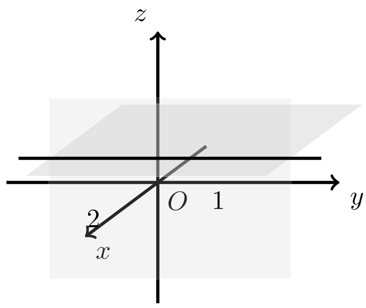
$$(x,y,z) = Q + k.\overrightarrow{QU}, k \in [0,1] \Leftrightarrow (x,y,z) = (2,2,0) + k(0,0,2), k \in [0,1]$$

Teste Intermédio 10.º ano – 28.05.2008

17. O vetor diretor de uma reta paralela à reta r é colinear com o vetor diretor da reta r.
Assim, como os vetores $\vec{u_A} = (0,1,0)$ e $\vec{u_B} = (1,2,3)$ não são colineares com o vetor diretor da reta r, $\vec{u_r} = (0,0,1)$ então as retas definidas pelas equações das opções (A) e (B) não são paralelas à reta r

Verificando que o vetor diretor da reta r, tem a direção do eixo Oz e representado os planos de equação $x = 2$ e $y = 1$ e também os planos de equação $x = 2$ e $z = 1$, podemos verificar que a interseção dos dois planos é uma reta paralela ao eixo Ox apenas no primeiro caso, pelo que, de entre as opções apresentadas, apenas a reta definida por $x = 2 \wedge y = 1$ é paralela à reta r





Resposta: **Opção C**

Teste Intermédio 11.º ano – 06.05.2008

18. Como o ponto A pertencente ao semieixo positivo Ox, então as coordenadas são da forma $(a,0,0), a \in \mathbb{R}^+$
Como o ponto B pertencente ao semieixo positivo Oy, então as coordenadas são da forma $(0,b,0), b \in \mathbb{R}^+$

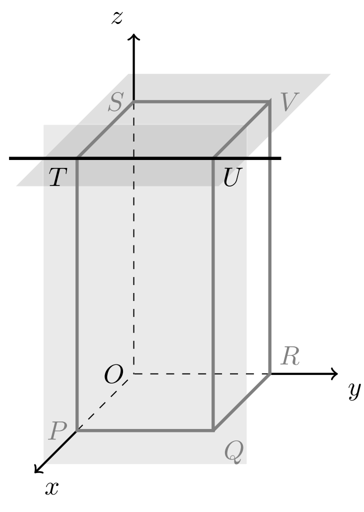
Assim as coordenadas do vetor $\overrightarrow{AB}$ são da forma: $\overrightarrow{AB} = B - A = (0,b,0) - (a,0,0) = (-a,b,0)$

Como a e b são valores reais positivos, de entre as opções apresentadas, a única que é compatível com a forma identificada para as coordenadas do vetor $\overrightarrow{AB}$ é $(-2,1,0)$

Resposta: **Opção C**

Exame – 2001, Época especial (cód. 135)

19. O vértice T tem cota e abcissa respetivamente iguais às do vértice U, e ordenada nula (porque pertence ao plano POS, ou seja ao plano xOz), ou seja, temos que $T(x_U,0,z_U) = T(2,0,4)$



Assim, podemos calcular as coordenadas do vetor $\overrightarrow{TU}$:

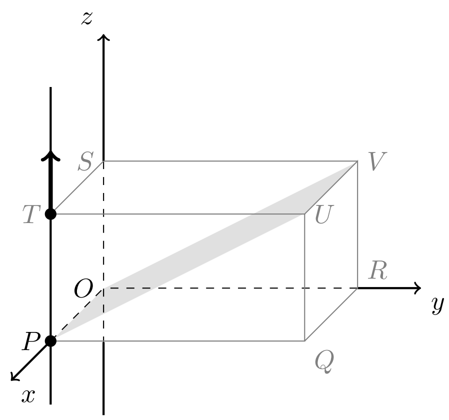
$$\overrightarrow{TU} = U - T = (2,2,4) - (2,0,4) = (0,2,0)$$

Pelo que uma condição que define a reta TU é uma equação vetorial da reta TU:

$$(x,y,z) = T + k.\overrightarrow{TU}, k \in \mathbb{R} \Leftrightarrow (x,y,z) = (2,0,4) + k(0,2,0), k \in \mathbb{R}$$

Exame – 2001, Época especial (cód. 135)

20. Como a reta contém o vértice $T(2,0,2)$ e tem a direção do vetor $\vec{u}=(0,0,1)$, a reta r é a reta TP, pelo que o ponto de intersecção da reta r com o plano OUV é o ponto P, que também pertence ao plano OUV



Resposta: **Opção A**

Exame – 2001, 2.ª fase (cód. 135)

21. Como a base do cone está contida no plano yOz, o centro é a origem do referencial e o vértice pertence ao semieixo positivo Ox, então a altura do cone é a abcissa do vértice (x_V), ou seja a abcissa do ponto da reta r, com ordenada e cota nulas ($y_V=0$ e $z_V=0$)

A partir da equação da reta r, podemos verificar que as coordenadas de todos os pontos da reta r são da forma $(3k,3-k,0), k\in\mathbb{R}$

$(x,y,x)=(0,3,0)+k(3,-1,0), k\in\mathbb{R} \Leftrightarrow (x,y,x)=(0,3,0)+(3k,-k,0), k\in\mathbb{R} \Leftrightarrow (x,y,x)=(3k,3-k,0), k\in\mathbb{R}$

Como a ordenada é nula, temos que:

$$y_V=0 \Leftrightarrow 3-k=0 \Leftrightarrow 3=k$$

E assim podemos determinar a abcissa do vértice, ou seja, a altura do cone:

$$x_V=3k \underset{k=3}{=} 3\times 3=9$$

Exame – 2000, Prova para Militares (cód. 135)
Exame – 2000, Época Especial (cód. 135)

22. Observando as coordenadas dos vetores diretores de cada uma das retas relativas às opções apresentadas, podemos verificar que:
   - O vetor de coordenadas $(1,0,0)$ tem a mesma direção do eixo Ox, pelo que a reta com a direção deste vetor não intersecta nem o plano xOy, nem o plano xOz
   - O vetor de coordenadas $(0,2,0)$ tem a mesma direção do eixo Oy, pelo que a reta com a direção deste vetor não intersecta nem o plano xOy, nem o plano yOz
   - O vetor de coordenadas $(1,2,0)$ tem uma direção do plano xOy, e como a reta contém o ponto de coordenadas $(1,1,1)$ pelo que a reta não intersecta nem o plano xOy
   - O vetor de coordenadas $(1,1,1)$ não é paralelo a nenhum dos eixos, pelo que a reta com a direção deste vetor interseta os três planos coordenados.

   Resposta: **Opção D**

Exame – 2000, 1.ª fase - 1.ª chamada (cód. 135)

23.

23.1. Calculando as coordenadas dos vetores, temos:
   - $\overrightarrow{AB}=B-A=(10,13,25)-(2,3,10)=(8,10,15)$
   - $\overrightarrow{AC}=C-A=(98,123,190)-(2,3,10)=(96,120,180)$

Verificando que os vetores são colineares, vem que:

$$\overrightarrow{AC} = \lambda\overrightarrow{AB}, \lambda \in \mathbb{R}\setminus\{0\} \Leftrightarrow (96,120,180) = \lambda(8,10,15) \Leftrightarrow \begin{cases} 96 = 8\lambda \\ 120 = 10\lambda \\ 180 = 15\lambda \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{96}{8} = \lambda \\ \frac{120}{10} = \lambda \\ \frac{180}{15} = \lambda \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 12 \\ \lambda = 12 \\ \lambda = 12 \end{cases}$$

Assim temos que $\overrightarrow{AC} = 12\overrightarrow{AB}$, ou seja, os vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ são colineares, o que permite garantir que os pontos A, B e C devem ser colineares, logo se o projétil seguir uma trajetória retilínea, o alvo é atingido.

23.2. Calculando a distância entre os pontos C (o alvo) e o ponto A (o local onde o projétil é disparado), temos:

$$\overline{CA} = \left\|\overrightarrow{CA}\right\| = \left\|\overrightarrow{AC}\right\| = \sqrt{96^2 + 120^2 + 180^2} = \sqrt{56016} \approx 236{,}7$$

Assim, como $\overline{CA} < 300$, ou seja, o alvo encontra-se a menos de 300 unidades do local onde o projétil é disparado, pelo que é garantida a trajetória retilínea,no caso presente.

Exame – 1999, Prova para Militares (cód. 135)

24. Como as arestas $[AD]$ e $[EH]$ são paralelas (e têm o mesmo comprimento) temos que $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{EH}$, pelo que podemos calcular as coordenadas do ponto H observando que $H = \overrightarrow{AD} + E$
Assim, calculando as coordenadas do vetor $\overrightarrow{AD}$ e do ponto H, temos:

- $\overrightarrow{AD} = D - A = (-3,3,6) - (3,5,3) = (-3-3,3-5,6-3) = (-6,-2,3)$
- $H = \overrightarrow{AD} + E = (-6,-2,3) + (1,2,-3) = (-6+1,-2+2,3-3) = (-5,0,0)$

Como duas das coordenadas do ponto H são nulas, então o ponto H pertence a um dos eixos coordenados.

Exame – 1999, Época Especial (cód. 135)

25. A partir da equação vetorial da reta BC, podemos verificar que o ponto B, e também o ponto C, são da forma:

$$(x,y,z) = (5,4,-1) + k(1,2,-1), k \in \mathbb{R} \;\Leftrightarrow\; (x,y,z) = (5+k,4+2k,-1-k), k \in \mathbb{R}$$

Assim, temos que:

- Como o ponto B pertence ao plano xOz, tem ordenada nula ($y_B = 0$), e assim, anulando a ordenada genérica dos pontos da reta BC, vem que:

  $$4 + 2k = 0 \;\Leftrightarrow\; 2k = -4 \;\Leftrightarrow\; k = -2$$

  E assim, as coordenadas do ponto B, podem ser obtidas substituindo o valor de k:

  $$(x,y,z) = (5+k,4+2k,-1-k) \underset{k=-2}{=} \big(5+(-2),4+2(-2),-1-(-2)\big) = (5-2,4-4,-1+2) = (3,0,1)$$

- Da mesma forma, como o ponto C pertence ao plano xOy, tem cota nula ($z_C = 0$), e assim, anulando a cota genérica dos pontos da reta BC, vem que:

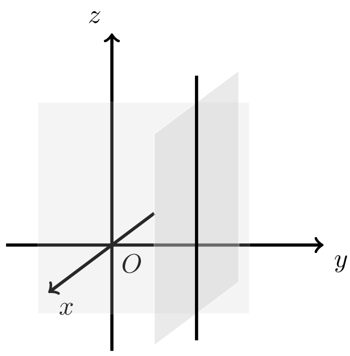
  $$-1 - k = 0 \;\Leftrightarrow\; -1 = k$$

  E assim, as coordenadas do ponto C, podem ser obtidas substituindo o valor de k:

  $$(x,y,z) = (5+k,4+2k,-1-k) \underset{k=-1}{=} \big(5+(-1),4+2(-1),-1-(-1)\big) = (5-1,4-2,-1+1) = (4,2,0)$$

Exame – 1999, 2.ª fase (cód. 135)

26. A condição $x = 1$ define um plano perpendicular ao eixo Ox e a condição $y = 2$ define um plano perpendicular ao eixo Oy. Assim, os dois planos intersectam-se segunda uma reta paralela ao eixo Oz, pelo que, observando as opções apresentadas, podemos identificar as coordenadas do vetor diretor da reta: $\vec{v_r} = (0,0,2)$



Como os pontos da reta têm abcissa igual a 1 e ordenada igual a 2, de entre as opções apresentadas, a equação deve ser definida com o ponto de coordenadas (1,2,0), ou seja, a reta $x = 1 \wedge y = 2$ é definida pela equação vetorial $(x,y,z) = (1,2,0) + k(0,0,2), k \in \mathbb{R}$

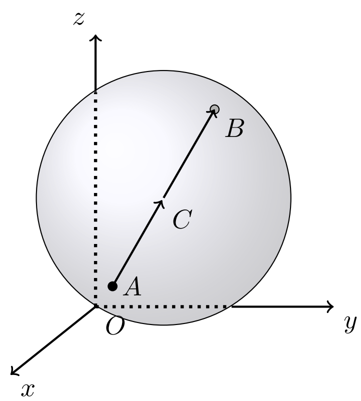
Resposta: **Opção A**

Exame – 1999, 1.ª fase - 1.ª chamada (cód. 135)

27. Pela observação da condição da esfera, podemos verificar que o centro da esfera é o ponto C de coordenadas (2,3,4)

Como $[AB]$ é um diâmetro da esfera, então C é o ponto médio de $[AB]$, e assim, temos que:

- $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB}$
- $C + \overrightarrow{CB} = B$



Logo, calculando as coordenadas do vetor $\overrightarrow{AC}$, temos:

$$\overrightarrow{AC} = C - A = (2,3,4) - (1,1,1) = (1,2,3)$$

E assim, podemos calcular as coordenadas do ponto B:

$$B = C + \overrightarrow{CB} = (2,3,4) + (1,2,3) = (3,5,7)$$

Resposta: **Opção B**

Exame – 1998, 2.ª fase (cód. 135)

28. Analisando cada uma das opções apresentadas, temos que:

- A condição $3x + 5y + 4z = 0$ representa um plano
- A condição $x = 3 \wedge y = 5 \wedge z = 4$ representa o ponto de coordenadas (3,4,5)
- A condição $(x,y,z) = (3,0,-4) + k(3,5,0), k \in \mathbb{R}$ representa uma reta que contém o ponto $(3,0,-4)$, ou seja que interseta o plano xOz, ao contrário da reta PQ paralela ao eixo Oy
- A condição $(x,y,z) = (3,5,0) + k(3,0,-4), k \in \mathbb{R}$ representa a reta que contém o ponto Q e tem a direção do vetor $\overrightarrow{PQ} = Q - P = (3,5,0) - (0,5,4) = (3,0,-4)$, ou seja, a reta PQ

Resposta: **Opção D**

Exame – 1998, 1.ª fase - 2.ª chamada (cód. 135)

29. Identificando o centro da esfera ε, podemos verificar que é o ponto de coordenadas $(1,2,3)$ e que é um ponto da reta r
Assim, temos que a intersecção da reta r com a esfera ε é um diâmetro da esfera.
Desta forma, identificando o raio da esfera ($\sqrt{36} = 6$) calculamos o comprimento do diâmetro, ou seja do segmento de reta que é a intersecção da reta r com a esfera ε: $2 \times 6 = 12$

Resposta: **Opção C**

Exame – 1998, 1.ª fase - 1.ª chamada (cód. 135)

30. Para escrever uma equação vetorial da reta UV, determinamos as coordenadas do vetor $\overrightarrow{UV}$:

$$\overrightarrow{UV} = V - U = (3,3,12) - (6,6,6,) = (-3,-3,6)$$

E assim, a reta UV é definida pela equação vetorial $(x,y,z) = (6,6,6) + k(-3,-3,6), k \in \mathbb{R}$
Desta forma sabemos que as coordenadas de todos os pontos da reta UV são da forma
$(6-3k,6-3k,6+6k), k \in \mathbb{R}$

Assim, podemos calcular o valor de k relativo ao ponto que é a intersecção da reta UV com o plano de equação $x = 4$, igualando a abcissa do ponto genérico a 4:

$$4 = 6 - 3k \Leftrightarrow 3k = 6 - 4 \Leftrightarrow 3k = 2 \Leftrightarrow k = \frac{2}{3}$$

E desta forma, calculamos as coordenadas do ponto de interseção:

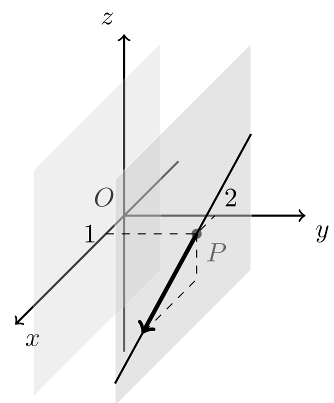
$$\left(6 - 3 \times \frac{2}{3}, 6 - 3 \times \frac{2}{3}, 6 + 6 \times \frac{2}{3}\right) = (6-2,6-2,6+4) = (4,4,10)$$

Exame – 1998, 1.ª fase - 1.ª chamada (cód. 135)

31. Como a equação vetorial da reta r é $(x,y,z) = (1,2,0) + k(3,0,-1), k \in \mathbb{R}$, então as coordenadas de todos os pontos da reta r são da forma $(1+3k,2,-k), k \in \mathbb{R}$, ou seja, têm todos ordenada 2, pelo que a reta r está contida no plano $y = 2$

Como o plano de equação $y = 2$ é paralelo ao plano de equação $y = 0$, ou seja o plano xOy, então a reta r é paralela ao plano xOz (como se pretende ilustrar na figura ao lado).

Resposta: **Opção B**



Exame – 1997, Prova para militares (cód. 135)

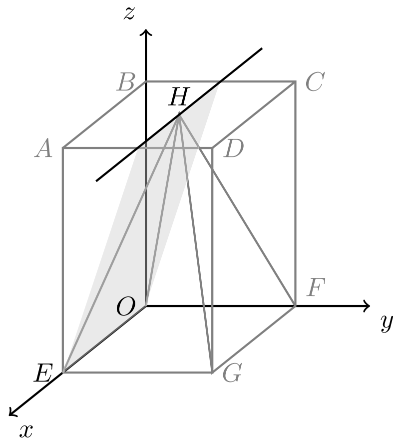
32. Como a interseção do plano OEH com o plano ABC é uma reta paralela ao eixo Ox (como se pretende ilustrar na figura ao lado), então tem a direção do vetor

$$\overrightarrow{OE} = E - O = (4{,}0{,}0) - (0{,}0{,}0 = (4{,}0{,}0)$$

Como a reta contém o ponto H uma equação vetorial da reta é:

$$(x{,}y{,}z) = H + \lambda\overrightarrow{OE},\ \lambda \in \mathbb{R}\ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x{,}y{,}z) = (2{,}2{,}6) + \lambda(4{,}0{,}0),\ \lambda \in \mathbb{R}$$



Exame – 1997, Prova para militares (cód. 135)

33. Como a reta r e é paralela ao eixo Oz, tem a direção do vetor $\vec{u} = (0{,}0{,}1)$ e como passa no ponto B, uma equação vetorial da reta r é:

$$(x{,}y{,}z) = B + \lambda\vec{u},\ \lambda \in \mathbb{R}\ \ \Leftrightarrow (x{,}y{,}z) = (0{,}5{,}0) + \lambda(0{,}0{,}1),\ \lambda \in \mathbb{R}$$

Exame – 1997, 1.ª fase - 1.ª chamada (cód. 135)