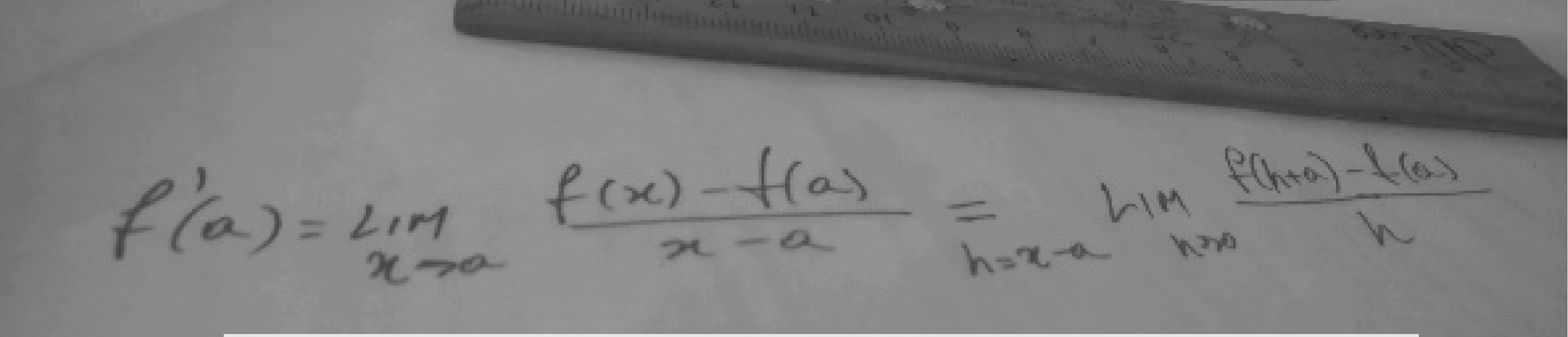


Funções (11.º ano)

Funções - Derivada

Exercícios de Provas Nacionais e Testes Intermédios - Propostas de resolução

1. Temos que, pela definição de derivada num ponto, $f'(2) = \lim\limits_{x \to 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2}$

   Assim, vem que:

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 2x}{f(x) - f(2)} = 4 \Leftrightarrow \lim_{x \to 2} \frac{1}{\frac{f(x) - f(2)}{x^2 - 2x}} = 4 \Leftrightarrow \frac{\lim\limits_{x \to 2} 1}{\lim\limits_{x \to 2} \frac{f(x) - f(2)}{x^2 - 2x}} = 4 \Leftrightarrow \frac{1}{\lim\limits_{x \to 2} \frac{f(x) - f(2)}{x(x - 2)}} = 4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\lim\limits_{x \to 2} \left(\frac{1}{x} \times \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} \right)} = 4 \Leftrightarrow \frac{1}{\lim\limits_{x \to 2} \frac{1}{x} \times \lim\limits_{x \to 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2}} = 4 \Leftrightarrow \frac{1}{\frac{1}{2} \times f'(2)} = 4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1 = 4 \times \frac{1}{2} \times f'(2) \Leftrightarrow 1 = \frac{4}{2} \times f'(2) \Leftrightarrow 1 = 2f'(2) \Leftrightarrow \frac{1}{2} = f'(2)$$

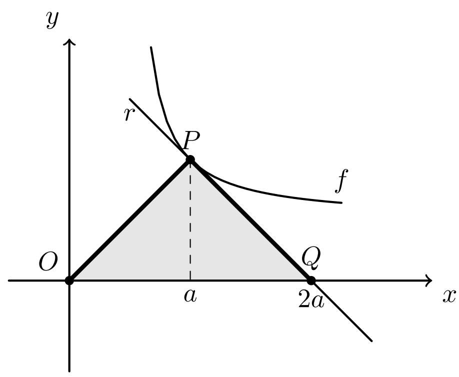
   Resposta: **Opção C**

Exame – 2017, 2.ª fase

2. Como $\overline{OP} = \overline{PQ}$, então o triângulo $[OPQ]$ é isósceles e $\overline{OQ} = 2a$

   Como as coordenadas do ponto P são $(a,f(a))$ e as do ponto Q são $(2a,0)$, temos que o declive da reta PQ, é:

$$m_{PQ} = \frac{0 - f(a)}{2a - a} = -\frac{f(a)}{a}$$



   Como a reta r é tangente ao gráfico da função f no ponto de abcissa a, então o declive da reta r, ou seja, da reta PQ, é igual a $f'(a)$, pelo que:

$$f'(a) = -\frac{f(a)}{a}$$

   Desta forma, temos que:

$$f'(a) + \frac{f(a)}{a} = -\frac{f(a)}{a} + \frac{f(a)}{a} = 0$$

Exame – 2017, 1.ª Fase

3. Temos que, pela definição de derivada num ponto $f'(2) = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{f(x)-f(2)}{x-2} = 6$

   Assim, vem que

$$\lim_{x\to 2} \frac{f(x)-f(2)}{x^2-2x} = \lim_{x\to 2} \frac{f(x)-f(2)}{x(x-2)} = \lim_{x\to 2} \left(\frac{1}{x} \times \frac{f(x)-f(2)}{x-2}\right) = \lim_{x\to 2} \frac{1}{x} \times \lim_{x\to 2} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \frac{1}{2} \times 6 = 3$$

   Resposta: **Opção A**

Exame – 2015, Ép. especial

4. Podemos descrever a monotonia da função g pela análise do gráfico, e relacionar com a variação do sinal da derivada:

x	$-\infty$	a		b	$+\infty$
$g(x)$	$\nearrow$	Máx	$\searrow$	min	$\nearrow$
$g'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

   Pela observação do gráfico de g podemos ainda afirmar que $-2 < a < 0$ e $0 < b < 2$.
   Como $f(x) = g(x-3)$, o gráfico de f resulta de uma translação horizontal do gráfico de g, de 3 unidades para a direita.
   Assim, temos que os extremos da função f têm abcissas $a+3$ e $b+3$, e a variação do sinal é dado por:

x	$-\infty$	$a+3$		$b+3$	$+\infty$
$f(x)$	$\nearrow$	Máx	$\searrow$	min	$\nearrow$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

   Como $-2 < a < 0$, temos que $1 < a+3 < 3$; e como $0 < b < 2$, sabemos que $3 < b+3 < 5$, pelo que o gráfico da opção (A) é o único compatível com as condições.

   Resposta: **Opção A**

Exame – 2013, 2ª fase

5. Podemos descrever a variação do sinal de h', pela análise do gráfico, e relacionar com a monotonia da função h:

x		0	
$h'(x)$	$+$	0	$-$
$h(x)$	$\nearrow$	Máx	$\searrow$

   Ou seja, a função h é crescente se $x \leq 0$ e decrescente se $x \geq 0$, e apenas o gráfico da opção (D), é compatível com esta conclusão.

   Resposta: **Opção D**

Exame – 2011, Prova especial

6. Como o declive (m), da reta tangente ao gráfico de g no ponto de abcissa 1 é $g'(1)$, começamos por determinar a expressão da derivada:

$$g'(x) = \big((2x-1)\times f(x)\big)' = (2x-1)'f(x) + (2x-1)\big(f(x)\big)' = 2f(x) + (2x-1)f'(x)$$

Calculando o declive da reta tangente temos:

$$m = g'(1) = 2f(1) + (2x-1)f'(1) = 2\times 1 + (2(1)-1)\times 1 = 2 + 1\times 1 = 3$$

Calculando as coordenadas do ponto de tangência, temos: $g(1) = (2(1)-1)\times f(1) = (2-1)\times 1 = 1$, ou seja, o ponto $P(1{,}1)$ é um ponto do gráfico de g que também pertence à reta tangente.
Substituindo o valor do declive na equação da reta, vem $y = 3x + b$
Substituindo as coordenadas do ponto na equação da reta, calculamos o valor da ordenada na origem:

$$1 = 3\times 1 + b \;\Leftrightarrow\; 1 - 3 = b \;\Leftrightarrow\; -2 = b$$

Logo, a equação reduzida da reta tangente ao gráfico da função g no ponto de abcissa $x = 1$ é:

$$y = 3x - 2$$

Resposta: **Opção A**

Exame – 2011, Prova especial

7. Pela observação do gráfico podemos afirmar que:

- Em $x = -3$ a função é crescente, ou seja, $f'(-3) > 0$
- Em $x = 0$ a função é decrescente, ou seja, $f'(0) < 0$
- Em $x = 6$ a função é crescente, ou seja, $f'(6) > 0$

Assim, temos que:

- $f'(0)\times f'(6) < 0$
- $f'(-3)\times f'(6) > 0$
- $f'(-3)\times f'(0) < 0$
- $f'(0)\times f'(6) < 0$

Resposta: **Opção D**

Exame – 2011, 1ª fase

8. Como o valor de $f'(2)$ é o declive da reta tangente ao gráfico de f, no ponto de abcissa 2 e esta reta intersecta o eixo Oy no ponto de ordenada -15, então a equação desta reta é:

$$y = 9x - 15$$

Como o ponto de tangência tem coordenadas $\big(2,f(2)\big)$ e este ponto também pertence à reta tangente, temos que:

$$f(2) = 9(2) - 15 = 18 - 15 = 3$$

Resposta: **Opção C**

Teste Intermédio 11º ano – 24.05.2011

9. Começamos por determinar a expressão da derivada:

$$f'(x) = \left(x^3+3x^2-9x-11\right)' = \left(x^3\right)' + \left(3x^2\right)' - \left(9x\right)' - \left(11\right)' = 3x^2+2\times 3x-9-0 = 3x^2+6x-9$$

Calculando os zeros da derivada, temos:

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow 3x^2+6x-9=0 \Leftrightarrow x^2+2x-3=0 \Leftrightarrow x=\frac{-2\pm\sqrt{2^2-4(1)(-3)}}{2} \Leftrightarrow x=\frac{-2\pm\sqrt{16}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{-2\pm 4}{2} \Leftrightarrow x=-3 \vee x=1$$

Como o gráfico da função f' é uma parábola com a concavidade voltada para cima, a função é negativa para os valores de x compreendidos entre os zeros e positiva para os restantes.
Analisando a variação do sinal da derivada e relacionando com a monotonia de f, temos:

x	$-\infty$	-3		1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	Max	$\searrow$	min	$\nearrow$

Assim, podemos concluir que a função f:

- é crescente no intervalo $]-\infty,-3]$ e no intervalo $[1,+\infty[$;
- é decrescente no intervalo $[-3,1]$;
- tem dois extremos relativos:
  - um máximo cujo valor é $f(-3)=(-3)^3+3(-3)^2-9(-3)-11=-27+27+27-11=16$
  - um mínimo cujo valor é: $f(1)=1^3+3(1)^2-9(1)-11=1+3-9-11=-16$

Teste Intermédio 11º ano – 24.05.2011

10. Através da análise do gráfico, podemos descrever a variação do sinal da derivada para relacionar com a monotonia da função f:

x		a		b	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	Máx	$\searrow$	min	$\nearrow$

Logo, o único gráfico apresentado compatível com a monotonia estudada é o gráfico da opção (A).

Resposta: **Opção A**

Exame – 2010, Ép. especial

11.

11.1. Para calcular o declive da reta tangente ao gráfico da função f, no ponto P começamos por determinar a expressão da derivada da função:

$$f'(x) = \left(3 + \frac{6}{x}\right)' = (3)' + \left(\frac{6}{x}\right)' = 0 + \frac{(6)' \times x - 6 \times (x)'}{x^2} = \frac{0 \times x - 6 \times 1}{x^2} = -\frac{6}{x^2}$$

Assim, como a abcissa do ponto P é 2, temos que o declive da reta tangente no ponto P é:

$$m = f'(2) = -\frac{6}{2^2} = -\frac{6}{4} = -\frac{3}{2}$$

Logo a equação da reta tangente é da forma $y = -\frac{3}{2}x + b$

Como $f(2) = 3 + \frac{6}{2} = 3 + 3 = 6$, sabemos que o ponto $P(2,6)$ pertence ao gráfico da função e também à reta tangente.

Assim, substituindo as coordenadas do ponto de tangência na equação da reta, podemos calcular o valor de b:

$$6 = -\frac{3}{2} \times 2 + b \Leftrightarrow 6 = -3 + b \Leftrightarrow 6 + 3 = b \Leftrightarrow 9 = b$$

Pelo que a equação da reta tangente é:

$$y = -\frac{3}{2}x + 9$$

11.2. Para calcular as coordenadas do ponto A e a abcissa do ponto B, vamos determinar os zeros da função derivada de g, porque correspondem às abcissas dos extremos da função.

Assim, temos que a expressão da derivada da função g é:

$$g'(x) = \left(\frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 8x - 3\right)' = \left(\frac{1}{3}x^3\right)' - (3x^2)' + (8x)' - (3)' = 3 \times \frac{1}{3}x^2 - 2 \times 3x + 8 - 0 = x^2 - 6x + 8$$

Calculando os zeros da função derivada temos:

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 8 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \times 1 \times 8}}{2 \times 1} \Leftrightarrow x = \frac{6 \pm \sqrt{4}}{2} \Leftrightarrow x = 4 \vee x = 2$$

Analisando a variação do sinal da derivada e relacionando com a monotonia de g, temos:

x	$-\infty$	2		4	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(x)$	$\nearrow$	Max	$\searrow$	min	$\nearrow$

Assim, podemos concluir que:

- A abcissa do máximo da função é 2, pelo que a ordenada é

$$\overline{DA} = y_A = g(2) = \frac{1}{3} \times 2^3 - 3 \times 2^2 + 8 \times 2 - 3 = \frac{8}{3} - 12 + 16 - 3 = \frac{8}{3} + 1 = \frac{8}{3} + \frac{3}{3} = \frac{11}{3}$$

- A abcissa do mínimo da função é 4. ou seja, $\overline{OC} = x_B = 4$

E assim, temos que a área do triângulo é:

$$A_{[OAC]} = \frac{x_B \times y_A}{2} = \frac{4 \times \frac{11}{3}}{2} = 2 \times \frac{11}{3} = \frac{22}{3}$$

Teste Intermédio 11º ano – 06.05.2010

12. Como a derivada de g é:

$$g'(x) = \big(f(x) + x\big)' = \big(f(x)\big)' + (x)' = f'(x) + 1$$

Assim, o gráfico de g' é a translação do gráfico de f' pelo vetor $\vec{u} = (1{,}0)$, ou seja com um deslocamento vertical de uma unidade no sentido positivo.
Desta forma o gráfico da opção (D) é o único compatível com esta informação.

Resposta: **Opção D**

Exame – 2009, 2ª fase

13. Como gráfico de g é uma reta de declive negativo, temos que, sendo $y = ax + k$ a equação dessa reta, $g'(x) = a$, e $a < 0$.

Assim, a expressão da derivada de h, é:

$$h'(x) = \big(f(x) + g(x)\big)' = f'(x) + g'(x) = (x^2 + 1)' + k = 2x + a$$

Ou seja, o gráfico de h' é uma reta de declive 2 e ordenada na origem igual a $g'(x)$.

- Como $m = 2$, temos que $m > 0$,
- e como $b = a$ e $a < 0$, então $b < 0$.

Resposta: **Opção B**

Teste Intermédio 12º ano – 27.05.2009

14. Como o gráfico da função f é uma parábola com a concavidade voltada para baixo cujo vértice é o ponto de abcissa 3, podemos relacionar a monotonia da função com o sinal da derivada:

x	$-\infty$	3	$+\infty$
$f(x)$	$\nearrow$	Max	$\searrow$
$f'(x)$	$+$	0	$-$

Assim, podemos concluir que $f'(1) > 0$, $f'(2) > 0$, $f'(3) = 0$ e $f'(4) < 0$

Resposta: **Opção D**

Teste Intermédio 11º ano – 07.05.2009

15. Começamos por determinar a expressão da derivada da função V:

$$V'(a) = \left(3a^2 - a^3\right)' = \left(3a^2\right)' - \left(a^3\right)' = 2 \times 3a - 3 \times a^2 = 6a - 3a^2$$

Calculando os zeros da derivada, temos:

$$V'(a) = 0 \Leftrightarrow 6a - 3a^2 = 0 \Leftrightarrow 3a(2-a) = 0 \Leftrightarrow 3a = 0 \vee 2 - a = 0 \Leftrightarrow a = 0 \vee 2 = a$$

Como o gráfico da função V' é uma parábola com a concavidade voltada para baixo (porque o coeficiente de a^2 é negativo), a função é positiva para os valores de a compreendidos entre os zeros e negativa para os restantes.
Analisando a variação do sinal da derivada e relacionando com a monotonia de V, no domínio da função, temos:

a	0		2		3
$V'(a)$	n.d.	+	0	−	n.d.
$V(a)$	n.d.	↗	Max	↘	n.d.

Assim, podemos concluir que a função V:

- é crescente no intervalo $]0,2]$;
- é decrescente no intervalo $[2,3[$;
- o volume do prisma é máximo para $a = 2$

Teste Intermédio 11º ano – 07.05.2009

16. Pela observação do gráfico sabemos que f' é constante, e positiva, para $x < 0$, porque a função varia num ritmo constante e é crescente, pelo que apenas as os gráficos das opções (A), (B) e (C) são coerentes com esta informação.

Como a semitangente ao gráfico de f à esquerda de 0 tem declive positivo, e a semitangente ao gráfico de f à direta de 0 tem declive negativo, ou seja,

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \neq \lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$$

Podemos concluir que não existe $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0}$, pelo que f' não está definida em $x = 0$; e os únicos gráficos que são compatíveis com esta informação são os das opções (C) e (D).

Resposta: **Opção C**

Exame – 2008, 1ª fase

17. Como a reta t é tangente ao gráfico de h no ponto de abcissa 1, então o valor de $h'(1)$ é igual ao declive da reta t

Como os pontos de coordenadas $A(-2,0)$ e $B(0,1)$ pertencem à reta t, temos que o declive da reta (e o valor de $h'(1)$) é dado por:

$$h'(1) = m_t = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{0 - 1}{-2 - 0} = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2}$$

Resposta: **Opção C**

Teste Intermédio 11º ano – 06.05.2008

18. Começamos por determinar a expressão da derivada da função V:

$$V'(x) = \left(8x^2 - \frac{4}{3}x^3\right)' = \left(8x^2\right)' - \left(\frac{4}{3}x^3\right)' = 2 \times 8x - 3 \times \frac{4}{3}x^2 = 16x - 4x^2$$

Calculando os zeros da derivada, temos:

$$V'(x) = 0 \Leftrightarrow 16x - 4x^2 = 0 \Leftrightarrow 4x(4-x) = 0 \Leftrightarrow 4x = 0 \lor 4 - x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \lor 4 = x$$

Como o gráfico da função V' é uma parábola com a concavidade voltada para baixo (porque o coeficiente de x^2 é negativo), a função é positiva para os valores de x compreendidos entre os zeros e negativa para os restantes.
Analisando a variação do sinal da derivada e relacionando com a monotonia de V, no domínio da função, temos:

x	0		4		6
$V'(x)$	n.d.	+	0	−	n.d.
$V(x)$	n.d.	$\nearrow$	Max	$\searrow$	n.d.

Assim, podemos concluir que a função V:

- é crescente no intervalo $]0,4]$;
- é decrescente no intervalo $[4,6[$;
- o volume do prisma é máximo para $x = 4$

Assim, temos que o volume máximo é:

$$V(4) = 8(4)^2 - \frac{4}{3} \times 4^3 = 8 \times 16 - \frac{4^4}{3} = 128 - \frac{256}{3} = \frac{384}{3} - \frac{256}{3} = \frac{128}{3}$$

Teste Intermédio 11º ano – 06.05.2008

19. Como o declive da reta tangente ao gráfico da função num ponto é igual ao valor da derivada da função nesse ponto, determinando a expressão da função derivada vem:

$$f'(x) = \left(1 - x^2\right)' = (1)' - \left(x^2\right)' = 0 - 2x = -2x$$

E assim, temos que o declive da reta t é:

$$m_t = f'\left(\frac{1}{2}\right) = -2 \times \frac{1}{2} = -1$$

Como o declive de uma reta é a tangente da sua inclinação, vem que a inclinação da reta t é:

$$\alpha_t = \operatorname{tg}^{-1}(-1) = 135°$$

Resposta: **Opção C**

Teste Intermédio 11º ano – 10.05.2007

20. Começamos por determinar a expressão da derivada da função v:

$$v'(t) = \left(t^3 - 15t^2 + 63t\right)' = \left(t^3\right)' - \left(15t^2\right)' + (63t)' = 3t^2 - 30t + 63$$

Calculando os zeros da derivada, temos:

$$v'(t) = 0 \Leftrightarrow 3t^2 - 30t + 63 = 0 \Leftrightarrow t^2 - 10t + 21 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{-(10) \pm \sqrt{(-10)^2 - 4 \times 1 \times 21}}{2 \times 1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 84}}{2} \Leftrightarrow t = \frac{10 \pm 4}{2} \Leftrightarrow t = 7 \vee t = 3$$

Como o gráfico da função v' é uma parábola com a concavidade voltada para cima (porque o coeficiente de t^2 é positivo), a função é negativa para os valores de t compreendidos entre os zeros e positiva para os restantes.
Analisando a variação do sinal da derivada e relacionando com a monotonia de v, no domínio da função, temos:

t	0	3		7	8
$v'(t)$	+	0	−	0	+
$v(t)$	↗	Max	↘	min	↗

Assim, podemos concluir que a função v atinge o máximo no instante $t = 3$, pelo que a velocidade máxima atingida, nos primeiros oito minutos da experiência, em centenas de rotações por minuto, é:

$$v(3) = 3^3 - 15 \times 3^2 + 63 \times 3 = 81$$

Teste Intermédio 11º ano – 10.05.2007

21. Relacionando a monotonia de f com o sinal de f', temos:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	↗	Máx.	↘
$f'(x)$	+	0	−

Determinando a expressão da derivada de g:

$$g'(x) = \left(\left(f(x)\right)^2\right)' = \left(f(x) \times f(x)\right)' = f'(x) \times f(x) + f(x) \times f'(x) = 2f(x)f'(x)$$

Logo, como o máximo de f é -1, sabemos que $f(x) < 0\,, \forall x \in \mathbb{R}$, pelo que podemos estudar a variação do sinal de g', para relacionar com a monotonia de g:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	−
$f(x)$	−	−	−
2	+	+	+
$g'(x)$	−	0	+
$g(x)$	↘	min.	↗

Assim, como g é decrescente em $]-\infty,0]$ e é crescente em $[0,+\infty[$, podemos afirmar que 0 é um minimizante de g.
Assim, calculando o valor do mínimo de g, temos:

$$g(0) = \left(f(0)\right)^2 = (-1)^2 = 1$$

Exame – 2005, Ép. especial (cód. 435)

22. Pela observação do gráfico podemos afirmar que:
    - Como a função h é contínua em $\mathbb{R}$, $f(0) = \lim\limits_{x \to 0} h(x)$, pelo que como $f(0) \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{x \to 0} h(x) \neq +\infty$; logo a afirmação da opção (A) não é verdadeira.
    - $\exists x \in \mathbb{R} : f(x) \neq -f(-x)$, ou seja a função h **não** é ímpar; pelo que a afirmação da opção (B) não é verdadeira.
    - Como a h é decescente em $[0,3]$, $\forall x \in]0,3[, h'(x) < 0$, ou seja, a afirmação da opção (D) não é verdadeira.

    Nem o gráfico, nem a informação complementar do enunciado permitem decidir sobre o valor de $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x)$, pelo que a afirmação da opção (C) **pode** ser verdadeira.

    Resposta: **Opção C**

    Exame – 2004, Ép. especial (cód. 435)

23. Começamos por determinar a expressão da derivada, para $x > 0$:

$$\left(\frac{3x+2}{2x+2}\right)' = \frac{(3x+2)'(2x+2)-(3x+2)(2x+2)'}{(2x+2)^2} = \frac{(3+0)(2x+2)-(3x+2)(2+0)}{(2x+2)^2} =$$

$$= \frac{6x+6-(6x+4)}{(2x+2)^2} = \frac{6x+6-6x-4}{(2x+2)^2} = \frac{2}{(2x+2)^2}$$

Assim, $\forall x \in \mathbb{R}^+, f'(x) > 0$ (visto ser o quociente de funções estritamente positivas).
Logo, f é estritamente crescente em $\mathbb{R}^+$

Exame – 2004, Ép. especial (cód. 435)

24. Pela observação do gráfico de f', podemos verificar que $f'(x) < 0, \forall x \in [0,3]$, pelo que podemos afirmar que, f é decrescente em $[0,3]$.

    Como $f(0) = 2$, e a função decresce em $[0,3]$, logo $f(3) < 2$.
    Assim, temos que o valor da opção (A) é o único compatível com esta condição.

    Resposta: **Opção A**

    Exame – 2004, 2ª Fase (cód. 435)

25. Como x_0 é uma raiz dupla do polinómio que define a função g, então $g(x) = (x-x_0)^2(ax^2+bx+c)$, determinando a expressão da derivada, vem:

$$g'(x) = \left((x-x_0)^2(ax^2+bx+c)\right)' = \left((x^2-2x_0x+x_0^2)(ax^2+bx+c)\right)' =$$

$$= (x^2-2x_0x+x_0^2)'(ax^2+bx+c) + (x^2-2x_0x+x_0^2)(ax^2+bx+c)' =$$

$$= (2x-2x_0)(ax^2+bx+c) + (x^2-2x_0x+x_0^2)(2ax+b)$$

Como o declive (m) da reta tangente ao gráfico de g em $x = x_0$ é $g'(x_0)$, temos que:

$$m = g'(x_0) = (2x_0-2x_0)(ax_0^2+bx_0+c) + (x_0^2-2x_0x+x_0^2)(2ax_0+b) =$$

$$= 0(ax_0^2+bx_0+c) + (2x_0^2-2x_0x)(2ax_0+b) = 0 + 0(2ax_0+b) = 0$$

Determinando a ordenada do ponto do gráfico da função que tem abcissa x_0, temos:

$$g(x_0) = (x_0-x_0)^2(ax_0^2+bx_0+c) = 0(ax_0^2+bx_0+c) = 0$$

Como o ponto de abcissa x_0, também pertence à reta tangente, substituímos as coordenadas deste ponto e o declive da reta, em $y = mx+b$, para calcular o valor de b: $0 = 0 \times 0 + b \Leftrightarrow b = 0$

Desta forma, a equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa x_0, é: $y = 0 \times x + 0 \Leftrightarrow y = 0$

Como $y = 0$ define o eixo Ox, temos o eixo Ox é tangente ao gráfico de g no ponto de abcissa x_0.

Exame – 2003, Prova para militares (cód. 435)

26. Como qualquer função quadrática, f, é definida pela expressão $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $b \in \mathbb{R}$ e $c \in \mathbb{R}$, determinando a expressão da derivada, vem:

$$f'(x) = (ax^2 + bx + c)' = (ax^2)' + (bx)' + (c)' = 2ax + b + 0 = 2ax + b$$

Assim, o declive (m) da reta tangente ao gráfico de uma função quadrática num ponto $x = x_0$ é $f'(x_0)$, pelo que:

$$m = f'(x_0) = 2ax_0 + b$$

E para que a reta tangente seja paralela à bissetriz dos quadrantes ímpares, $m = 1$ (porque a bissetiz dos quadrantes ímpares é uma reta de declive 1, e os declives de retas paralelas são iguais), logo:

$$m = 1 \;\Leftrightarrow\; 2ax_0 + b = 1 \;\Leftrightarrow\; 2ax_0 = 1 - b \;\Leftrightarrow\; x_0 = \frac{1-b}{2a}$$

Ou seja, sendo $f(x) = ax^2 + bx + c$ uma função quadrática, com $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $b \in \mathbb{R}$ e $c \in \mathbb{R}$, a reta tangente ao gráfico da função só tem declive 1 no ponto de abcissa $x = \frac{1-b}{2a}$; ou seja, só existe um ponto do gráfico cuja reta tangente é paralela à bissetriz dos quadrantes ímpares.

Exame – 2003, 1ª fase - 1ª chamada (cód. 435)

27. Para determinar o minimizante, e o mínimo, da função, começamos por determinar a expressão da derivada:

$$A'(x) = \left(\frac{2x^3+8}{x}\right)' = \frac{(2x^3+8)'x - (2x^3+8)(x)'}{x^2} = \frac{((2x^3)' + (8)')x - (2x^3+8) \times 1}{x^2} =$$

$$= \frac{(6x^2+0)x - (2x^3+8)}{x^2} = \frac{6x^3 - 2x^3 - 8}{x^2} = \frac{4x^3-8}{x^2}$$

Calculando os zeros da derivada, temos:

$$A'(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; \frac{4x^3-8}{x^2} = 0 \;\Leftrightarrow\; 4x^3 - 8 = 0 \;\wedge\; x^2 \neq 0 \;\Leftrightarrow\; 4x^3 = 8 \;\wedge\; x \neq 0 \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; x^3 = \frac{8}{4} \;\wedge\; x \neq 0 \;\Leftrightarrow\; x = \sqrt[3]{2} \;\wedge\; x \neq 0 \;\Leftrightarrow\; x = \sqrt[3]{2}$$

Assim, estudando a variação do sinal da derivada e relacionando com a monotonia da função A, para $x > 0$, temos:

x	0		$\sqrt[3]{2}$	$+\infty$
$A'(x)$		$-$	0	$+$
$A(x)$		$\searrow$	min	$\nearrow$

Logo, como a função A é decrescente no intervalo $]0, \sqrt[3]{2}]$ e crescente no intervalo $[\sqrt[3]{2}, +\infty[$; podemos concluir $\sqrt[3]{2}$ é o minimizante da função A, ou seja o valor de x, para o qual a área total da embalagem é mínima.

Exame – 2002, 2ª fase (cód. 435)

28. Como o declive de uma reta tangente ao gráfico de uma função, é dado pelo valor da derivada para a abcissa do ponto de tangência, os declives das retas r e s são $f'(a)$ e $f'(b)$, respetivamente ($m_r = f'(a)$ e $m_s = f'(b)$).

Como a função f é crescente, a função derivada, f', é sempre não negativa ($f'(x) \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$).

Como retas perpendiculares têm declives com sinais contrários, as retas r e s não podem ser perpendiculares porque têm ambas declives positivos $\left(\left(f'(a) \geq 0 \;\wedge\; f'(b) \geq 0\right) \Rightarrow f'(a) \neq -\frac{1}{f'(b)}\right)$.

Exame – 2002, 2ª fase (cód. 435)

29. Calculando os zeros da derivada, temos:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$$

Estudando a variação do sinal da derivada e relacionando com a monotonia de f, vem:

x	$-\infty$	2		$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$\searrow$	min	$\nearrow$	

Logo, como f é decrescente no intervalo $]-\infty,2]$ e crescente no intervalo $[2,+\infty[$; podemos concluir que f em um máximo para $x = 2$.

Resposta: **Opção C**

Exame – 2001, Ép. especial (cód. 435)

30. Como $f'(3) = 4$, logo, pela definição de derivada num ponto, $f'(3) = \lim\limits_{x \to 3} \dfrac{f(x) - f(3)}{x - 3} = 4$

Como $x^2 - 9 = x^2 - 3^2 = (x+3)(x-3)$, temos que:

$$\lim_{x \to 3} \frac{f(x) - f(3)}{x^2 - 9} = \lim_{x \to 3} \frac{f(x) - f(3)}{(x+3)(x-3)} = \lim_{x \to 3} \left(\frac{1}{x+3} \times \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} \right) =$$

$$= \lim_{x \to 3} \frac{1}{x+3} \times \lim_{x \to 3} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = \frac{1}{6} \times 4 = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

Resposta: **Opção A**

Exame – 2001, 2ª fase (cód. 435)

31. Para que a reta de equação $y = x$ seja tangente ao gráfico de uma certa função f, no ponto de abcissa 0, têm que se verificar as condições:

- $f(0) = 0$, ou seja, o ponto de coordenadas $(0,0)$ é o ponto de tangência pelo que deve pertencer ao gráfico de f (pelo que podemos excluir expressões das opções (C) e (D)).
- $f'(0) = 1$, ou seja o declive da reta tangente no ponto de abcissa 0, deve ser 1, porque é o declive da reta $y = x$ (pelo que podemos excluir a expressão da opção (B) porque $(x^2 + 2x)' = 2x + 2$ e substituindo x por 0, obtemos o valor 2 para o declive).

A expressão da opção (A) é a única que verifica cumulativamente as duas condições anteriores (substituindo x por 0, obtemos 0 para a ordenada do ponto de tangência e o valor da derivada $(x^2 + x)' = 2x + 1$ para $x = 0$ é 1).

Resposta: **Opção A**

Exame – 2001, 1ª fase - 1ª chamada (cód. 435)

32. Da análise do gráfico de g, podemos inferir a monotonia da função, e depois relacionar esta informação com a variação do sinal da derivada:

x	$-\infty$	0		$+\infty$
$f(x)$	$\searrow$	n.d.	$\nearrow$	
$f'(x)$	$-$	n.d.	$+$	

Assim, a única representação gráfica coerente com esta informação é a representação da opção (A).

Resposta: **Opção A**

Exame – 2000, 1ª fase - 1ª chamada (cód. 435)

33. Como a função tem uma assíntota horizontal, quando $x \to +\infty$, o declive da reta tangente ao gráfico de h, num ponto de abcissa arbitrariamente grande aproxima-se de 0, porque é o declive da assíntota, ou seja, a variação da função tende para zero, porque o gráfico da função aproxima-se de uma reta (que tem variação nula).

    Resposta: **Opção A**

    Exame – 1999, Prova para militares (cód. 135)

34. Como o declive da reta tangente é igual ao valor da derivada para a abcissa do ponto de tangência, e a derivada de g é:
$$g'(x) = \left(\sqrt{3}x^2 - 1\right)' = \sqrt{3}(x^2)' - (1)' = \sqrt{3}(2x) - 0 = 2\sqrt{3}x$$

    Logo o declive da reta r é: $m_r = g'(a) = 2\sqrt{3} \times a$

    Como o declive de uma reta é igual à tangente da respetiva inclinação, temos que $m_r = \operatorname{tg} 60° = \sqrt{3}$

    Assim, igualando os dois valores do declive, temos que:

$$2\sqrt{3} \times a = \sqrt{3} \quad \Leftrightarrow \quad a = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} \quad \Leftrightarrow \quad a = \frac{1}{2}$$

    Resposta: **Opção D**

    Exame – 1999, 1ª fase - 1ª chamada (cód. 135)

35. Da análise do gráfico de g, podemos inferir a monotonia da função, e depois relacionar esta informação com a variação do sinal da derivada:

x		-2		2	
$h(x)$	$\longrightarrow$	n.d.	$\searrow$	n.d.	$\nearrow$
$h'(x)$	0	n.d.	$-$	n.d.	$+$

    Assim, a única representação gráfica coerente com esta informação é a representação da opção (C).

    Resposta: **Opção C**

    Exame – 1998, Prova modelo (cód. 135)

36. Como a reta t contém os pontos de coordenadas (0,0) e (6,3), podemos calcular o seu declive:

$$m_t = \frac{3-0}{6-0} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

    Assim, como o declive (m) da reta tangente ao gráfico de h em $x = a$ é $h'(a)$, temos que

$$h'(a) = m_t = \frac{1}{2}$$

    Resposta: **Opção D**

    Exame – 1997, 1ª fase - 1ª chamada (cód. 135)