Funções polinomiais de graus 3 e 4

Exercícios de Provas Nacionais e Testes Intermédios - Propostas de resolução

1.

1.1. Considerando o ponto P como o ponto de interseção da reta s com o eixo Oy temos que as respetivas coordenadas são $P(0,b)$, sendo b para calcular a ordenada na origem da reta s.

Assim, temos que o declive da reta s, é:

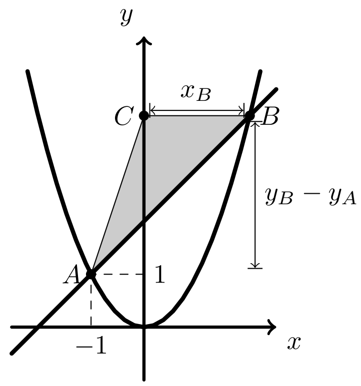
$$m = \frac{y_P - y_A}{x_P - x_A} = \frac{b-1}{0-(-1)} = \frac{b-1}{1} = b-1$$

Como $m = b - 1$, temos que:

$$m = b-1 \Leftrightarrow b = m+1$$

Resposta: **Opção A**

1.2. Como o ponto C é projeção ortogonal do ponto B sobre o eixo Oy, as coordenadas do ponto C são $(0,(m+1)^2)$, e o valor de m para o qual a área do triângulo $[ABC]$ é igual a 4 , é a solução da equação:

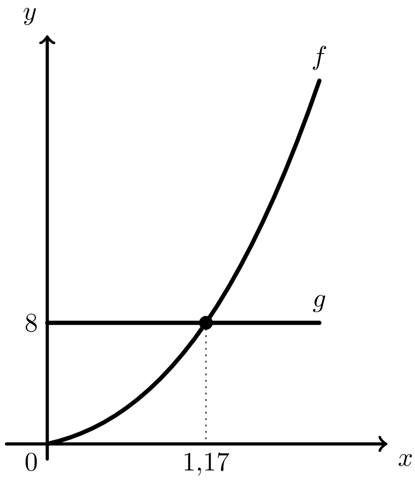


$$A_{[ABC]} = 4 \Leftrightarrow \frac{x_B \times (y_B - y_A)}{2} = 4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{(m+1)\times\left((m+1)^2-1\right)}{2} = 4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (m+1)^3 - (m+1) = 8$$

Desta forma, visualizando na calculadora gráfica os gráficos das funções $f(x) = (x+1)^3 - (x+1)$ e $g(x) = 8$, numa janela que permita a visualização da interseção dos dois gráficos, reproduzido na figura ao lado, e usando a funcionalidade da calculadora para determinar valores aproximados das coordenadas do ponto de interseção de dois gráficos, obtemos o valor aproximado (às centésimas) das coordenadas do ponto de interseção, cuja abcissa é o valor de m pretendido:



$$(1{,}17\,;\,8)$$

Assim, o valor arredondado às centésimas de m para o qual a área do triângulo $[ABC]$ é igual a 4, é 1,17.

Exame – 2022, Ép. especial

2.

2.1. Como a função f corresponde à distância ao solo de cada ponto da rampa situado x metros à direita da parede representada por $[AB]$, $f(0)$ corresponde à distância ao solo do ponto da rampa assente sobre esta parede, ou seja à altura desta parede, e da mesma forma $f(21)$ corresponde à altura da parede representada por $[CD]$:

$$\overline{AB} = f(0) = 0{,}0001 \times 0^4 - 0{,}005 \times 0^3 + 0{,}11 \times 0^2 - 0 + 3{,}4 = 3{,}4$$

$$\overline{CD} = f(21) = 0{,}0001 \times 21^4 - 0{,}005 \times 21^3 + 0{,}11 \times 21^2 - 21 + 3{,}4 = 4{,}0531$$

E assim, temos que o valor absoluto da diferença entre as alturas das duas paredes, em metros, com arredondamento às décimas, é:

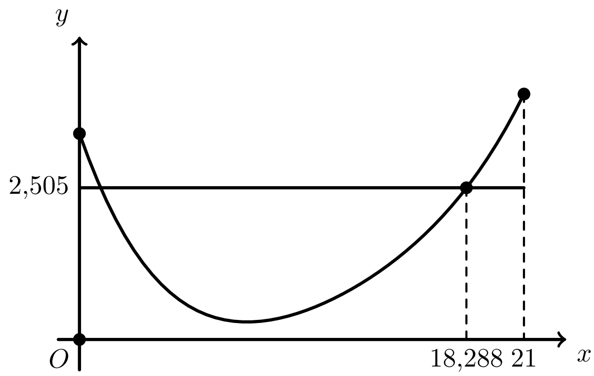
$$\left|\overline{CD} - \overline{AB}\right| = |f(21) - f(0)| \approx 0{,}7$$

Resposta: **Opção B**

2.2. Como o jovem que se encontra mais próximo da parede representada por $[AB]$ está a um metro desta parede, a sua distância ao solo é dada por $f(1)$. Como nesse instante, os dois jovens estão à mesma distância ao solo, a distância do jovem que se encontra mais próximo da parede representada por $[CD]$ está da parede representada por $[AB]$ é dada por:

$$f(x) = f(1)$$

Representado o gráfico da função f, numa janela adequada, ou seja, $x \in [0{,}21]$ e a reta de equação $y = f(1)$, e usando a ferramenta da calculadora gráfica para determinar os valores aproximados das coordenadas dos pontos de interseção, determinamos valores aproximados às centésimas das coordenadas do ponto com maior abcissa em que os dois gráficos se intersetam (por representar o jovem mais próximo da parede da direita), ou seja $(18{,}288; 2{,}505)$

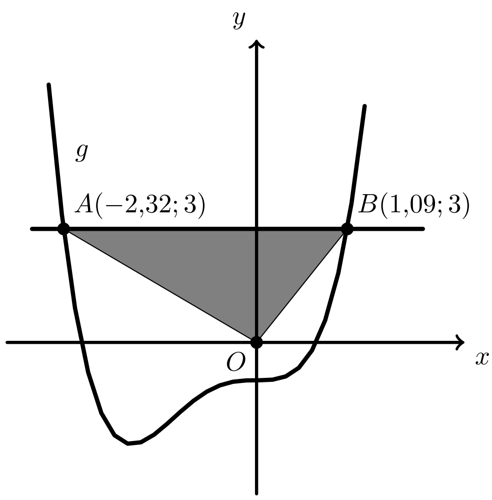


Assim temos que o jovem mais próximo da parede da direita está a 18,288 metros da parede da esquerda, e como as duas paredes distam 21 metros, a distância d, deste jovem à parede da esquerda, em metros, arredondado às décimas, é:

$$d \approx 21 - 18{,}288 \approx 2{,}7$$

Exame – 2020, Ép. especial

3. Representado o gráfico da função g, numa janela adequada e a reta de equação $y = 3$, podemos identificar o triângulo $[AOB]$.



Usando a ferramenta da calculadora gráfica para determinar os valores aproximados das coordenadas dos pontos de interseção, determinamos valores aproximados às centésimas para as coordenadas dos pontos A e B:

$$A(-2{,}32; 3) \text{ e } B(1{,}09; 3)$$

Assim temos que a altura do triângulo (h) é a ordenada do ponto A (ou do ponto B):

$$h = y_A = y_B = 3$$

E a base (b) é a distância entre os pontos A e B, ou mais simplesmente o valor absoluto da diferença das respetivas abcissas, porque têm ordenada igual:

$$b = \overline{AB} = x_B - x_A \approx 1{,}09 - (-2{,}32) \approx 1{,}09 + 2{,}32 \approx 3{,}41$$

E assim a área do triângulo, arredondada às décimas, é:

$$A_{[AOB]} = \frac{y_A \times \overline{AB}}{2} \approx 5{,}1$$

Teste Intermédio 10.º ano – 06.05.2011

4.

4.1. Como o gráfico da função f interseta o eixo das abcissas nos pontos de abcissas -3 e 1, estes valores correspondem a zeros da função, e também a raízes do polinómio $x^4 + x^3 - 7x^2 - x + 6$. Assim, usando a regra de Ruffini para fatorizar o polinómio (na figura ao lado), temos que:

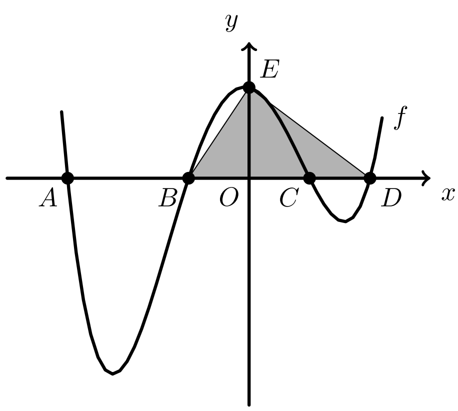
	1	1	−7	−1	6
−3		−3	6	3	−6
	1	−2	−1	2	0
1		1	−1	−2	
	1	−1	−2	0	

$$x^4 + x^3 - 7x^2 - x + 6 = (x+3)(x-1)(x^2 - x - 2)$$

Assim, determinando as raízes do fator $x^2 - x - 2$, temos:

$$x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4(1)(-2)}}{2 \times 1} \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{2} \Leftrightarrow x = 2 \vee x = -1$$

Assim temos que as coordenadas do ponto D são $(2,0)$ e as coordenadas do ponto B são $(-1,0)$.



Calculando a ordenada do ponto E, temos:

$$y_E = f(0) = 0^4 + 0^3 - 7(0)^2 - 0 + 6 = 6$$

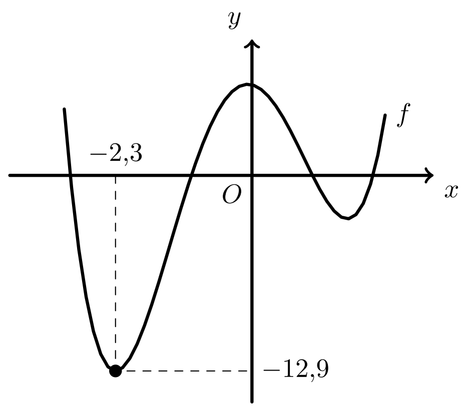
E assim a área do triângulo $[BED]$, é:

$$A_{[BED]} = \frac{\overline{BD} \times \overline{OE}}{2} = \frac{3 \times 6}{2} = \frac{18}{2} = 9$$

4.2. Representado o gráfico da função g, numa janela adequada, obtemos um gráfico semelhante ao que se reproduz na figura ao lado.

Usando a ferramenta da calculadora gráfica para determinar os valores aproximados do mínimo de uma função, determinamos um valor aproximado às décimas para o mínimo absoluto da função f:

$$a \approx 12{,}9$$



Teste Intermédio 10.º ano – 05.05.2010

5.

5.1. Começando por decompor a expressão algébrica da função num produto de polinómios, e como um dos zeros de f é 4, usando a regra de Ruffini (na figura ao lado), temos que:

	1	−3	−6	8
4		4	4	−8
	1	1	−2	$\boxed{0}$

$$f(x) = x^3 - 3x^2 - 6x + 8 = (x-4)(x^2+x-2)$$

Determinando as raízes do fator $x^2 + x - 2$, temos:

$$x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4(1)(-2)}}{2 \times 1} \Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{2} \Leftrightarrow x = 1 \vee x = -2$$

E assim, podemos obter uma nova fatorização da expressão da função f:

$$f(x) = x^3 - 3x^2 - 6x + 8 = (x-4)(x-1)(x+2)$$

Desta forma, recorrendo a um quadro de variação de sinal para estudar o sinal de f, vem:

x	$-\infty$	-2		1		4	$+\infty$
$x-4$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$x-1$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x+2$	$-$	0	0	0	$+$	$+$	$+$
f	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

E assim, pela observação da tabela, podemos verificar que $f(x) \leq 0$, se $x \in]-\infty, -2] \cup [1{,}4]$.

5.2. Calculando as ordenadas dos pontos A e B, temos:

- $y_A = f(-3) = (-3)^3 - 3(-3)^2 - 6(-3) + 8 = -28$
- $y_B = f(0) = 0^3 - 3(0)^2 - 6(0) + 8 = 8$

E assim, o declive da reta AB,é:

$$m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{8-(-28)}{0-(-3)} = \frac{8+28}{3} = \frac{36}{3} = 12$$

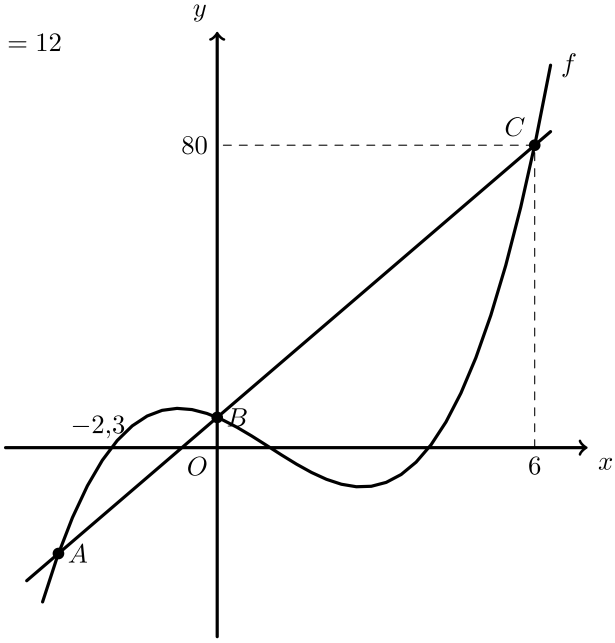
Pelo que, como o ponto $B(0{,}8)$ pertence à reta, a respetiva equação reduzida é:

$$y = 12x + 8$$

Desta forma, representando o gráfico da função g, e a reta AB, numa janela adequada que permita a visualização do ponto C, obtemos uma representação semelhante à que se reproduz na figura ao lado.

Usando a ferramenta da calculadora gráfica para determinar as coordenadas de um ponto de interseção, determinamos as coordenadas do ponto C:

$$C(6{,}80)$$



Teste Intermédio 10.º ano – 06.05.2009

6.

6.1. Observando que o termo x, é um fator comum a todos as parcelas do polinómio $x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 14x$, colocando em evidência o fator comum, temos:

$$x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 14x = x(x^3 - 3x^2 - 3x + 14)$$

Como o gráfico de f intersecta o eixo Ox no ponto de abcissa -2, -2 é raiz do polinómio $x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 14x$ e também do polinómio $x^3 - 3x^2 - 3x + 14$, pelo que usando a regra de Ruffini (na figura ao lado), temos que:

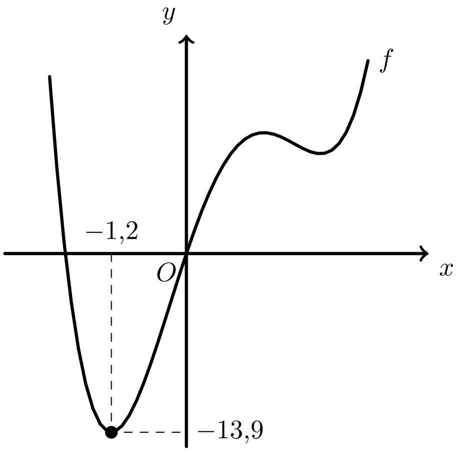
$$f(x) = x(x^3 - 3x^2 - 3x + 14) = x(x+2)(x^2 - 5x + 7)$$

	1	-3	-3	14
-2		-2	10	-14
	1	-5	7	0

6.2. Representado o gráfico da função g, numa janela adequada, obtemos um gráfico semelhante ao que se reproduz na figura ao lado.

Usando a ferramenta da calculadora gráfica para determinar os valores aproximados do mínimo de uma função, determinamos um valor aproximado às décimas para o mínimo absoluto da função f:

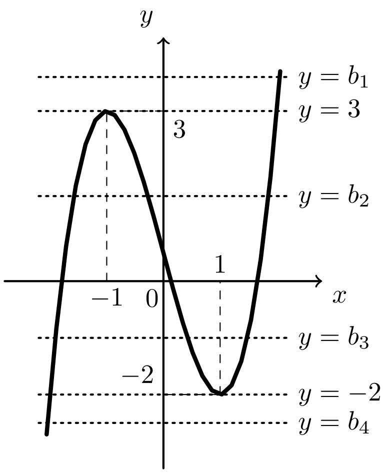
$$a \approx 12{,}9$$



Teste Intermédio 10.º ano – 28.05.2008

7. Observando o gráfico da função g, e diferentes valores de b, podemos observar que:

- se $b = 3 \vee b = -2$, a equação $g(x) = b$ tem duas soluções distintas;
- se $b > 3 \vee b < -2$, (por exemplo b_1 e b_4 assinalados na figura) a equação $g(x) = b$ tem uma solução;
- se $-2 < b < 3$, (por exemplo b_2 e b_3 assinalados na figura) a equação $g(x) = b$ tem três soluções distintas.



Assim, o conjunto dos valores de b correspondente a $-2 < b < 3$ é $]-2{,}3[$.

Resposta: **Opção D**

Exame – 2001, 2ª fase

8. Como se pode observar na representação gráfica da função g, esta tem dois zeros, ambos positivos. Como a função definida por $(x+3)^2$ tem apenas um zero que é -3, de entre as opções apresentadas, a única que pode ser o conjunto dos zeros da função h, é $\{-3{,}1{,}4\}$.

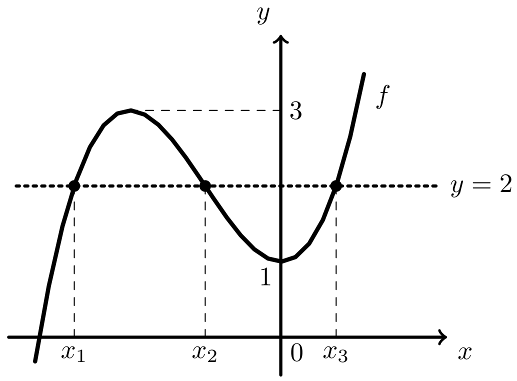
Resposta: **Opção B**

Exame – 2001, Prova modelo

9. As soluções da equação $f(x) = 2$ são as abcissas dos pontos de interseção do gráfico de g com a reta definida por $y = 2$.

   Assim, podemos observar que existem três pontos de interseção pelo que o número de soluções da equação é três.

   Resposta: **Opção C**



Exame – 2000, 2.ª fase