Geometria (11.º ano)

Produto escalar de vetores

Exercícios de Provas Nacionais e Testes Intermédios - Propostas de resolução

1. Temos que:
   - como $[PQ]$ é um diâmetro da circunferência, e o triângulo $[PQR]$ está inscrito na circunferência, então o triângulo é retângulo;
   - como a circunferência é definida pela equação $(x-1)^2+y^2=9$, então o seu raio é $\sqrt{9}=3$, pelo que:

   $$\overline{PQ} = \left\|\overrightarrow{QP}\right\| = 2\times 3 = 6$$

   - pela definição de seno, relativamente ao ângulo QPR, sabemos que:

   $$\operatorname{sen}\alpha = \frac{\overline{QR}}{\overline{PQ}} \Leftrightarrow \operatorname{sen}\alpha = \frac{\overline{QR}}{6} \Leftrightarrow 6\operatorname{sen}\alpha = \overline{QR}$$

   - $\overrightarrow{QR}\,\hat{}\,\overrightarrow{QP} = P\hat{Q}R = \frac{\pi}{2} - Q\hat{P}R = \frac{\pi}{2} - \alpha$
   - $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \operatorname{sen}\alpha$

   Logo, vem que:

   $$\overrightarrow{QR}\cdot\overrightarrow{QP} = 27 \Leftrightarrow \cos\left(\overrightarrow{QR}\,\hat{}\,\overrightarrow{QP}\right)\times\left\|\overrightarrow{QR}\right\|\times\left\|\overrightarrow{QP}\right\| = 27 \Leftrightarrow \cos\left(\overrightarrow{QR}\,\hat{}\,\overrightarrow{QP}\right) = \frac{27}{\left\|\overrightarrow{QR}\right\|\times\left\|\overrightarrow{QP}\right\|} \Leftrightarrow$$

   $$\Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \frac{27}{6\operatorname{sen}\alpha\times 6} \Leftrightarrow \operatorname{sen}\alpha = \frac{27}{36\operatorname{sen}\alpha} \Leftrightarrow \operatorname{sen}^2\alpha = \frac{27}{36} \Leftrightarrow \operatorname{sen}^2\alpha = \frac{3}{4} \Leftrightarrow$$

   $$\Leftrightarrow \operatorname{sen}\alpha = \pm\sqrt{\frac{3}{4}} \Leftrightarrow \operatorname{sen}\alpha = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$$

   Como α é um ângulo agudo, $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$, então $\operatorname{sen}\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$ e $\alpha = \frac{\pi}{3}$.

   Exame – 2024, 2.ª Fase

2. Como o ponto B pertence à reta BC, então as suas coordenadas são da forma:

$$B(3+2k,5+3k,1+6k), k \in \mathbb{R}$$

Por outro lado, como sabemos que que a sua ordenada é o dobro da abcissa, x_B, temos que as coordenadas do ponto B também são da forma:

$$B(x_B,2x_B,z_B)$$

Assim, temos que:

$$\begin{cases} 3+2k=x_B \\ 5+3k=2x_B \\ 1+6k=z_B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3+2k=x_B \\ 5+3k=2(3+2k) \\ 1+6k=z_B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3+2k=x_B \\ 5+3k=6+4k \\ 1+6k=z_B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3+2k=x_B \\ 5-6=4k-3k \\ 1+6k=z_B \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3+2(-1)=x_B \\ -1=k \\ 1+6(-1)=z_B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3-2=x_B \\ -1=k \\ 1-6=z_B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1=x_B \\ -1=k \\ -5=z_B \end{cases}$$

Ou seja, as coordenadas do ponto B são $(1,2,-5)$.

Assim temos que, como O é a origem do referencial $\overrightarrow{OA}\,(4,-4,-3)$ e $\overrightarrow{OB}(1,2,-5)$, pelo que:

- $\left\|\overrightarrow{OA}\right\| = \sqrt{4^2+(-4)^2+(-3)^2} = \sqrt{16+16+9} = \sqrt{41}$
- $\left\|\overrightarrow{OB}\right\| = \sqrt{1^2+2^2+(-5)^2} = \sqrt{1+4+25} = \sqrt{30}$

Logo, recorrendo à fórmula do produto escalar vem:

$$\cos\left(\overrightarrow{OA}\hat{\ }\overrightarrow{OB}\right) = \frac{\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}}{\left\|\overrightarrow{OA}\right\|\times\left\|\overrightarrow{OB}\right\|} = \frac{(4,-4,-3)\cdot(1,2.-5)}{\sqrt{41}\times\sqrt{30}} = \frac{4-8+15}{\sqrt{41}\times\sqrt{30}} = \frac{11}{\sqrt{41}\times\sqrt{30}}$$

Logo, a amplitude do ângulo convexo AOB, em graus, arredondado às unidades, é:

$$A\hat{O}B = \cos^{-1}\left(\frac{11}{\sqrt{41}\times\sqrt{30}}\right) \approx 72^\circ$$

Exame – 2024, 1.ª Fase

3. Designado por d a abcissa do ponto D, ou seja, $\overline{OD} = d$, temos que:
   - $D(d,0)$
   - $C\left(0,\overline{OC}\right) = \left(0,\frac{\overline{OA}}{4}\right) = \left(0,\frac{3\overline{OD}}{4}\right) = \left(0,\frac{3d}{4}\right)$
   - $E\left(\overline{CE},\overline{OC}\right) = \left(\overline{CB} - \overline{EB},\frac{3d}{4}\right) = \left(\overline{OA} - \overline{OD},\frac{3d}{4}\right) = \left(3d - d,\frac{3d}{4}\right) = \left(2d,\frac{3d}{4}\right)$
   - $\overrightarrow{DC} = C - D = \left(0,\frac{3d}{4}\right) - (d,0) = \left(-d,\frac{3d}{4}\right)$
   - $\overrightarrow{DE} = E - D = \left(2d,\frac{3d}{4}\right) - (d,0) = \left(d,\frac{3d}{4}\right)$

   Assim, calculando o produto escalar com as coordenadas dos vetores, temos:

$$\overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{DE} = -7 \Leftrightarrow \left(-d,\frac{3d}{4}\right) \cdot \left(d,\frac{3d}{4}\right) = -7 \Leftrightarrow -d^2 + \frac{9d^2}{16} = -7 \Leftrightarrow -\frac{16d^2}{16} + \frac{9d^2}{16} = -7 \Leftrightarrow$$

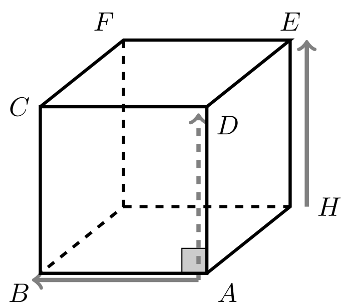
$$\Leftrightarrow -\frac{7d^2}{16} = -7 \Leftrightarrow d^2 = \frac{7 \times 16}{7} \Leftrightarrow d^2 = 16 \Leftrightarrow d = \pm\sqrt{16} :\Leftrightarrow d = \pm 4$$

   Como o ponto D pertence ao semieixo positivo Ox, então $d > 0$, ou seja $d = 4$.

   E assim, vem que: $\overline{OA} = 3 \times \overline{OD} = 3 \times d = 3 \times 4 = 12$

Exame – 2023, 2.ª Fase

4. Como $[ABCDEFGH]$ é um cubo, as arestas têm o mesmo comprimento e são todas paralelas ou perpendiculares entre si.



   Em particular as arestas $[AD]$ e $[HE]$ são paralelas, e $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{HE}$

   Assim, como as arestas $[AD]$ e $[AB]$ são perpendiculares, temos que:

   $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{HE} = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD} = \cos(90°)\times\left\|\overrightarrow{AB}\right\|\times\left\|\overrightarrow{AD}\right\| = 0\times\left\|\overrightarrow{AB}\right\|\times\left\|\overrightarrow{AD}\right\| = 0$

   Resposta: **Opção B**

Exame – 2022, 2.ª Fase

5. Como os pontos A e B pertencem ao gráfico de f, designado por a a abcissa do ponto A e por B a abcissa do ponto B, temos que as coordenadas destes pontos são $A(a,a^2)$ e $B(b,b^2)$.

   Assim, o declive da reta r (reta AB) é dado por:

$$m = \frac{b^2 - a^2}{b - a} = \frac{(b-a)(b+a)}{(b-a)} = b + a$$

   Como o ponto de coordenadas (0,1) pertence à reta r, temos que a sua equação é: $y = (b+a)x + 1$.

   Temos ainda que, como o ponto A pertence à reta r, as suas coordenadas verificam a equação da reta:

$$a^2 = (b+a)(a) + 1 \Leftrightarrow a^2 = ab + a^2 + 1 \Leftrightarrow a^2 - a^2 - ab = 1 \Leftrightarrow -ab = 1 \Leftrightarrow ab = -1$$

   Determinando as coordenadas dos vetores $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$, temos:

   - $\overrightarrow{OA} = A - O = (a,a^2) - (0,0) = (a,a^2)$
   - $\overrightarrow{OB} = B - O = (b,b^2) - (0,0) = (b,b^2)$

   E assim, calculado o produto escalar, temos:

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = (a,a^2).(b,b^2) = a \times b + a^2 \times b^2 = ab + (ab)^2 = -1 + (-1)^2 = -1 + 1 = 0$$

   Como $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 0$, então o ângulo AOB é reto.

Exame – 2022, 2.ª Fase

6. Como a circunferência tem raio 3, o respetivo perímetro é $2 \times \pi \times 3 = 6\pi$

   Assim, o comprimento do arco AB é 2π, a amplitude do ângulo ACB é:

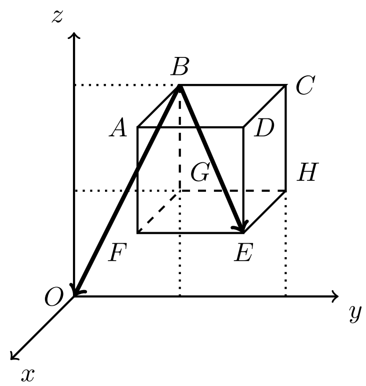
$$\frac{A\hat{C}B}{2\pi} = \frac{2\pi}{2\pi \times 3} \Leftrightarrow A\hat{C}B = \frac{2\pi \times 2\pi}{6\pi} \Leftrightarrow A\hat{C}B = \frac{4\pi}{6} \Leftrightarrow A\hat{C}B = \frac{2\pi}{3}$$

   Desta forma, como ambos os vetores têm norma 3, recorrendo à fórmula do produto escalar, vem:

$$\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = \cos\left(\overrightarrow{CB}\hat{\ }\overrightarrow{CB}\right) \times \left\|\overrightarrow{CA}\right\| \times \left\|\overrightarrow{CB}\right\| = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) \times 3 \times 3 = -\frac{1}{2} \times 9 = -\frac{9}{2}$$

Exame – 2022, 1.ª Fase

7. Como as coordenadas do ponto B são $(0,2,4)$, o vetor $\overrightarrow{OB}$ tem as mesmas coordenadas, pelo que as coordenadas do vetor $\overrightarrow{BO}$ são:



$$\overrightarrow{BO} = -\overrightarrow{OB} = -(0,2,4) = (0,-2,-4)$$

E a sua norma é:

$$\left\|\overrightarrow{BO}\right\| = \left\|\overrightarrow{OB}\right\| = \sqrt{0^2+2^2+4^2} = \sqrt{4+16} = \sqrt{20}$$

Calculando a norma do vetor $\overrightarrow{BE}$, temos:

$$\left\|\overrightarrow{BE}\right\| = \sqrt{2^2+2^2+(-2)^2} = \sqrt{4+4+4} = \sqrt{12}$$

Como o ângulo OBE é o ângulo formado pelos vetores $\overrightarrow{BO}$ e $\overrightarrow{BE}$, podemos determinar a sua amplitude a partir do respetivo produto escalar:

$$\cos\left(\overrightarrow{BO}\hat{\ }\overrightarrow{BE}\right) = \frac{\overrightarrow{BO}\cdot\overrightarrow{BE}}{\left\|\overrightarrow{BO}\right\|\times\left\|\overrightarrow{BE}\right\|} = \frac{(0,-2,-4)\cdot(2,2,-2)}{\sqrt{20}\times\sqrt{12}} = \frac{-4+8}{\sqrt{20\times 12}} = \frac{4}{\sqrt{240}}$$

Logo, a amplitude do ângulo OBE, em graus, arredondado às unidades, é

$$O\hat{B}E = \cos^{-1}\left(\frac{4}{\sqrt{240}}\right) \approx 75^\circ$$

Exame – 2020, Ép. especial

8. Calculando as coordenadas do vetor $\overrightarrow{AV}$, e a sua norma:

$$\overrightarrow{AV} = V - A = (3,-1,2) - (2,1,0) = (1,-2,2)$$

$$\left\|\overrightarrow{AV}\right\| = \sqrt{1^2+(-2)^2+(2)^2} = \sqrt{1+4+4} = \sqrt{9} = 3$$

Calculando as coordenadas do vetor $\overrightarrow{AC}$, e a sua norma:

$$\overrightarrow{AC} = C - A = (0,-1,2) - (2,1,0) = (-2,-2,2)$$

$$\left\|\overrightarrow{AC}\right\| = \sqrt{(-2)^2+(-2)^2+(2)^2} = \sqrt{4+4+4} = \sqrt{12}$$

Recorrendo à fórmula do produto escalar vem:

$$\cos\left(\overrightarrow{AV}\hat{\ }\overrightarrow{AC}\right) = \frac{\overrightarrow{AV}\cdot\overrightarrow{AC}}{\left\|\overrightarrow{AV}\right\|\times\left\|\overrightarrow{AC}\right\|} = \frac{(1,-2,2)\cdot(-2,-2,2)}{3\sqrt{12}} = \frac{-2+4+4}{3\sqrt{12}} = \frac{6}{3\sqrt{12}} = \frac{2}{\sqrt{12}}$$

Logo, a amplitude do ângulo VAC, em graus, arredondado às unidades, é

$$V\hat{A}C = \cos^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{12}}\right) \approx 55^\circ$$

Exame – 2019, 1.ª Fase

9. Como o ponto R pertence ao semieixo negativo das ordenadas, tem coordenadas da forma $(0,y_R,0)$, com $y_R \in \mathbb{R}^-$. Assim, fazendo a substituição na equação da superfície esférica, podemos calcular o valor de y_R:

$$0^2 + {y_R}^2 + 0^2 = 3 \Leftrightarrow 0 + {y_R}^2 + 0 = 3 \Leftrightarrow y_R = \pm\sqrt{3}$$

Como $y_R \in \mathbb{R}^-$, as coordenadas do do ponto R são $\left(0,-\sqrt{3},0\right)$.
Assim temos que, como O é a origem do referencial $\overrightarrow{OR} = \left(0,-\sqrt{3},0\right)$ e $\overrightarrow{OP} = (1,1,1)$, pelo que:

- $\left\|\overrightarrow{OR}\right\| = \sqrt{0^2 + (-\sqrt{3})^2 + 0^2} = \sqrt{0+3+0} = \sqrt{3}$
- $\left\|\overrightarrow{OP}\right\| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{1+1+1} = \sqrt{3}$

Logo, recorrendo à fórmula do produto escalar vem:

$$\cos\left(\overrightarrow{OR}\,\widehat{}\,\overrightarrow{OP}\right) = \frac{\overrightarrow{OR}\cdot\overrightarrow{OP}}{\left\|\overrightarrow{OR}\right\| \times \left\|\overrightarrow{OP}\right\|} = \frac{\left(0,-\sqrt{3},0\right)\cdot(1,1,1)}{\sqrt{3}\times\sqrt{3}} = \frac{0-\sqrt{3}+0}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

Logo, a amplitude do ângulo ROP, em graus, arredondado às unidades, é:

$$R\hat{O}P = \cos^{-1}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \approx 125^\circ$$

Exame – 2018, Ép. especial

10. Como a superfície esférica tem de equação

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 10 \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-(-1))^2 = 10$$

As coordenadas do centro são $C(1,2,-1)$, pelo que as coordenadas do ponto A são $(1,2,1)$
Assim temos que, como O é a origem do referencial $\overrightarrow{OA} = (1,2,1)$ e $\overrightarrow{OC} = (1,2,-1)$, pelo que:

- $\left\|\overrightarrow{OA}\right\| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{1+4+1} = \sqrt{6}$
- $\left\|\overrightarrow{OC}\right\| = \sqrt{1^2 + 2^2 + (-1)^2} = \sqrt{1+4+1} = \sqrt{6}$

E assim, recorrendo à fórmula do produto escalar vem:

$$\cos\left(\overrightarrow{OA}\,\widehat{}\,\overrightarrow{OC}\right) = \frac{\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}}{\left\|\overrightarrow{OA}\right\| \times \left\|\overrightarrow{OC}\right\|} = \frac{(1,2,1)\cdot(1,2,-1)}{\sqrt{6}\times\sqrt{6}} = \frac{1+4-1}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

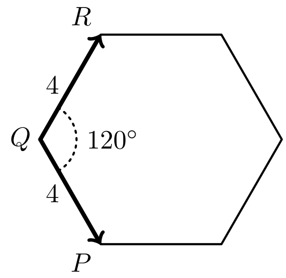
Logo, a amplitude do ângulo AOC, em graus, arredondado às unidades, é:

$$A\hat{O}C = \cos^{-1}\left(\frac{2}{3}\right) \approx 48^\circ$$

Exame – 2018, 2.ª Fase

11. Como os segmentos de reta $[QP]$ e $[QR]$ são lados consecutivos de um hexágono regular de lado 4, então temos que:

$$\left\|\overrightarrow{QP}\right\| = \left\|\overrightarrow{QR}\right\| = 4$$



Como os hexágonos regulares podem ser decompostos em seis triângulos equiláteros, cada ângulo interno do hexágono regular tem o dobro da amplitude dos ângulos internos de um triângulo equilátero, ou seja,

$$\overrightarrow{BA}\hat{\ }\overrightarrow{BC} = 2 \times 60 = 120°$$

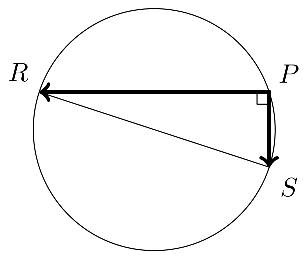
Assim, vem que:

$$\overrightarrow{QP} \cdot \overrightarrow{QR} = \cos\left(\overrightarrow{QP}\hat{\ }\overrightarrow{QR}\right) \times \left\|\overrightarrow{QP}\right\| \times \left\|\overrightarrow{QR}\right\| = \cos(120°) \times 4 \times 4 = -\cos(60°) \times 16 = -\frac{1}{2} \times 16 = -\frac{16}{2} = -8$$

Exame – 2018, 1.ª Fase

12. Como para qualquer ponto P da circunferência de diâmetro $[RS]$ o ângulo RPQ é reto, então para qualquer ponto P da circunferência, temos que:

$$\overrightarrow{PR} \cdot \overrightarrow{PS} = 0$$



Temos ainda que:

- para qualquer ponto P no interior da circunferência o ângulo RPQ é obtuso, vem que $\overrightarrow{PR} \cdot \overrightarrow{PS} > 0$
- para qualquer ponto P no exterior da circunferência o ângulo RPQ é agudo, vem que $\overrightarrow{PR} \cdot \overrightarrow{PS} < 0$

Desta forma, o conjunto A dos pontos P tais que $\overrightarrow{PR} \cdot \overrightarrow{PS} = 0$, é a circunferência de diâmetro $[RS]$

Resposta: **Opção D**

Exame – 2017, Ép. especial

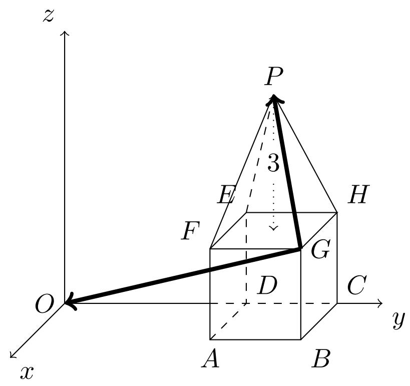
13. Como a base do cubo é um quadrado de lado 2 ($\overline{AD} = 2$), temos que a área da base é:

$$A_{[EFGH]} = \overline{AD}^2 = 2^2 = 4$$

Como o volume da pirâmide é 4, então calculando a altura h da pirâmide, temos:

$$V_{[ABCDEFGHP]} = \frac{1}{3} \times A_{[EFGH]} \times h \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4 = \frac{1}{3} \times 4 \times h \Leftrightarrow \frac{4 \times 3}{4} = h \Leftrightarrow h = 3$$



Como a cota do ponto P é superior a 2 e a aresta do cubo é 2, então a cota do ponto P é

$$z_P = 2 + h = 2 + 3 = 5$$

Como a projeção do ponto P no plano xOy é o centro do quadrado $[ABCD]$, temos que a abcissa é $x_P = 1$ e a ordenada é $y_P = 5$, pelo que as coordenadas do ponto P são $(1,5,5)$

Como as coordenadas do ponto G são $(2,6,2)$, podemos calcular as coordenadas do vetor $\overrightarrow{GP}$, e a sua norma:

$$\overrightarrow{GP} = P - G = (1,5,5) - (2,6,2) = (-1,-1,3)$$

$$\left\|\overrightarrow{PG}\right\| = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2 + 3^2} = \sqrt{1+1+9} = \sqrt{11}$$

Como O é a origem do referencial, podemos calcular as coordenadas do vetor $\overrightarrow{GO}$, e a sua norma:

$$\overrightarrow{GO} = O - G = (0,0,0) - (2,6,2) = (-2,-6,-2)$$

$$\left\|\overrightarrow{GO}\right\| = \sqrt{(-2)^2 + (-6)^2 + (-2)^2} = \sqrt{4+36+4} = \sqrt{44}$$

Recorrendo à fórmula do produto escalar vem:

$$\cos\left(\overrightarrow{GP}\,\overrightarrow{GO}\right) = \frac{\overrightarrow{GP} \cdot \overrightarrow{GO}}{\left\|\overrightarrow{GP}\right\| \times \left\|\overrightarrow{GO}\right\|} = \frac{(-1,-1,3) \cdot (-2,-6,-2)}{\sqrt{11} \times \sqrt{44}} = \frac{2+6-6}{\sqrt{11 \times 44}} = \frac{2}{\sqrt{484}}$$

Logo, a amplitude do ângulo OGP, em graus, arredondado às unidades, é

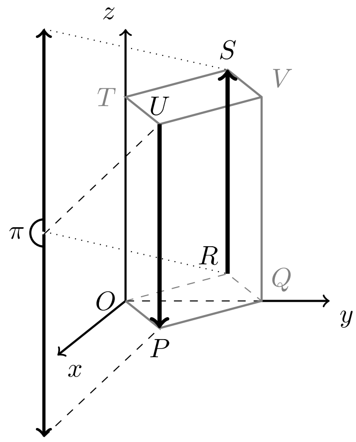
$$O\hat{G}P = \cos^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{484}}\right) \approx 85^\circ$$

Exame – 2017, 2.ª Fase

14. Como as arestas $[UP]$ e $[RS]$ são arestas laterais do prisma, logo são paralelas, e ambas têm comprimento igual a 3
Assim, como os vetores $\overrightarrow{UP}$ e $\overrightarrow{RS}$ têm a mesma direção e sentidos contrários, pelo que o ângulo por eles formado tem amplitude de π radianos.
Desta forma, o valor do produto escalar $\overrightarrow{UP} \cdot \overrightarrow{RS}$ é:

$$\overrightarrow{UP} \cdot \overrightarrow{RS} = \left\|\overrightarrow{UP}\right\| \times \left\|\overrightarrow{RS}\right\| \times \cos\left(\overrightarrow{UP}\,\hat{}\,\overrightarrow{RS}\right) =$$

$$= 3 \times 3 \times \cos\pi = 9 \times (-1) = -9$$



Exame – 2017, 1.ª Fase

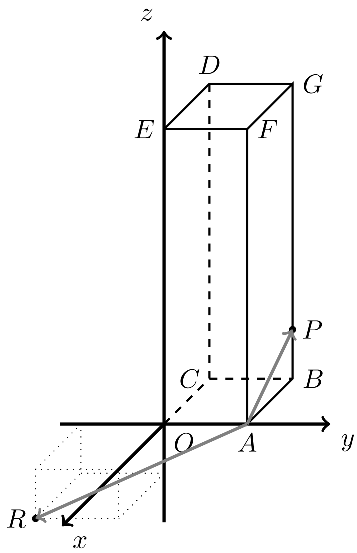
15. Como o ponto P pertence à aresta $[BG]$, pela observação da figura, verificamos que tem abcissa e ordenada iguais aos pontos B e G, pelo que as suas coordenadas são:

$$P(-2{,}2{,}1)$$

Como o ponto R é simétrico do ponto P relativamente à origem, tem as três coordenadas simétricas, ou seja, tem as suas coordenadas são:

$$R(2,-2,-1)$$

Podemos determinar a amplitude do ângulo RAP através do produto escalar dos vetores $\overrightarrow{AP}$ e $\overrightarrow{AR}$, pelo que, determinando as coordenadas destes vetores e as respetivas normas, temos:



- $\overrightarrow{AP} = P - A = (-2{,}2{,}1) - (0{,}2{,}0) = (-2{,}0{,}1)$
  $\left\|\overrightarrow{AP}\right\| = \sqrt{(-2)^2 + 0^2 + 1^2} = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$
- $\overrightarrow{AR} = R - A = (2,-2,-1) - (0{,}2{,}0) = (2,-4,-1)$
  $\left\|\overrightarrow{AR}\right\| = \sqrt{2^2 + (-4)^2 + (-1)^2} = \sqrt{4+16+1} = \sqrt{21}$

Recorrendo à fórmula do produto escalar vem:

$$\cos\left(\overrightarrow{AP}\,\hat{}\,\overrightarrow{AR}\right) = \frac{\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AR}}{\left\|\overrightarrow{AP}\right\| \times \left\|\overrightarrow{AR}\right\|} = \frac{(-2{,}0{,}1) \cdot (2,-4,-1)}{\sqrt{5} \times \sqrt{21}} = \frac{-4+0-1}{\sqrt{5 \times 21}} = \frac{-5}{\sqrt{105}} = -\frac{5}{\sqrt{105}}$$

Logo, a amplitude do ângulo RAP, em graus, arredondado às unidades, é

$$R\hat{A}P = \cos^{-1}\left(-\frac{5}{\sqrt{105}}\right) \approx 119^\circ$$

Exame – 2016, Ép. especial

16. Como o ponto A pertence ao semieixo positivo Ox, tem ordenada e cota nulas, ou seja as suas coordenadas são: $A(x_A,0,0)$, $x_A \in \mathbb{R}^+$
Analogamente, como o ponto B pertence ao semieixo positivo Oy, que tem abcissa e cota nulas e as coordenadas são $B(0,y_B,0)$, $y_B \in \mathbb{R}^+$
Da mesma forma, como o ponto P pertence ao eixo Oz, e tem abcissa e ordenadas nulas e ainda cota não nula, as coordenadas são $P(0,0,z_P)$, $z_P \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Como um ângulo é agudo se o produto escalar dos vetores que formam esse ângulo for positivo, então o ângulo APB é agudo se

$$\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} > 0$$

Determinando as coordenadas dos vetores $\overrightarrow{PA}$ e $\overrightarrow{PB}$, temos:

- $\overrightarrow{PA} = A - P = (x_A,0,0) - (0,0,z_P) = (x_A,0,-z_P)$
- $\overrightarrow{PB} = B - P = (0,y_B,0) - (0,0,z_P) = (0,y_B,-z_P)$

Logo, o produto escalar dos dois vetores, expressos nas suas coordenadas, é:

$$\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = (x_A,0,-z_P) \cdot (0,y_B,-z_P) = x_A \times 0 + 0 \times y_b + (-z_P) \times (-z_P) = 0 + 0 + {z_P}^2 = {z_P}^2$$

Como z_P é um número real, então ${z_P}^2 > 0$

Como ${z_P}^2 = \overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}$, então $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} > 0$, logo o ângulo APB é agudo.

Exame – 2016, 2.ª Fase

17. Como a soma dos ângulo internos de um triângulo é 180°, e o triângulo é isósceles ($B\hat{A}C = A\hat{C}B$), podemos determinar a amplitude do ângulo CBA, ou seja, a amplitude do ângulo formado pelos vetores $\overrightarrow{BA}$ e $\overrightarrow{BC}$:

$$C\hat{B}A = 180 - 2 \times 75 = 180 - 150 = 30^\circ$$

Desta forma, o valor do produto escalar $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$ é:

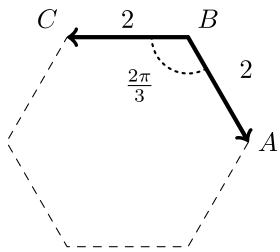
$$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = \left\|\overrightarrow{BA}\right\| \times \left\|\overrightarrow{BC}\right\| \times \cos\left(\overrightarrow{BA}\,\hat{}\,\overrightarrow{BC}\right) = \sqrt{2} \times \sqrt{2} \times \cos 30^\circ = 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$$

Resposta: **Opção C**

Exame – 2016, 1.ª Fase

18. Como os segmentos de reta $[AB]$ e $[BC]$ são lados consecutivos de um hexágono regular de perímetro 12, temos que

$$\left\|\overrightarrow{BA}\right\| = \left\|\overrightarrow{BC}\right\| = \frac{12}{6} = 2$$



Como os hexágonos regulares podem ser decompostos em seis triângulos equiláteros, cada ângulo interno do hexágono regular tem o dobro da amplitude dos ângulos internos de um triângulo equilátero, ou seja,

$$\overrightarrow{BA}\hat{\ }\overrightarrow{BC} = 2 \times \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$$

Assim, vem que:

$$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = \cos\left(\overrightarrow{BA}\hat{\ }\overrightarrow{BC}\right) \times \left\|\overrightarrow{BA}\right\| \times \left\|\overrightarrow{BC}\right\| = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) \times 2 \times 2 = -\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \times 4 = -\frac{1}{2} \times 4 = -\frac{4}{2} = -2$$

Resposta: **Opção B**

Exame – 2015, Ép. especial

19. Como o ponto B pertence ao eixo Ox, tem ordenada e cota nulas, pelo que, podemos determinar a sua abcissa, recorrendo à equação do plano β:

$$2x - y + z - 4 = 0 \wedge y = 0 \wedge z = 0 \Rightarrow 2x - 0 + 0 - 4 = 0 \Leftrightarrow 2x = 4 \Leftrightarrow x = 2$$

E assim temos as coordenadas do ponto B, $B(2,0,0)$ e podemos calcular as coordenadas do vetor $\overrightarrow{AB}$, e a sua norma:

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (2,0,0) - (1,2,3) = (1, -2, -3)$$

$$\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + (-3)^2} = \sqrt{1+4+9} = \sqrt{14}$$

Como o ponto C é o simétrico do ponto B relativamente ao plano yOz, tem as mesmas ordenada e cota, e abcissa simétrica, ou seja, as coordenadas do ponto C são $C(-2,0,0)$ e podemos calcular as coordenadas do vetor $\overrightarrow{AC}$, e a sua norma:

$$\overrightarrow{AC} = C - A = (-2,0,0) - (1,2,3) = (-3, -2, -3)$$

$$\left\|\overrightarrow{AC}\right\| = \sqrt{(-3)^2 + (-2)^2 + (-3)^2} = \sqrt{9+4+9} = \sqrt{22}$$

Recorrendo à fórmula do produto escalar vem:

$$\cos\left(\overrightarrow{AB}\hat{\ }\overrightarrow{AC}\right) = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{\left\|\overrightarrow{AB}\right\| \times \left\|\overrightarrow{AC}\right\|} = \frac{(1, -2, -3) \cdot (-3, -2, -3)}{\sqrt{14} \times \sqrt{22}} = \frac{-3+4+9}{\sqrt{14 \times 22}} = \frac{10}{\sqrt{308}}$$

Logo, a amplitude do ângulo BAC, em graus, arredondado às unidades, é

$$B\hat{A}C = \cos^{-1}\left(\frac{10}{\sqrt{308}}\right) \approx 55°$$

Exame – 2015, Ép. especial

20. Como o plano QRS é o plano de equação $y = 2$, as coordenadas dos pontos deste plano, em particular o ponto A, tem de coordenadas $A(a{,}2{,}c), a \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R}$

Como a cota do ponto A é o cubo da abcissa ($c = a^3$), temos que as coordenadas do ponto são $A(a{,}2{,}a^3), a \in \mathbb{R}$.
Como O é a origem do referencial, as coordenadas do vetor $\overrightarrow{OA}$, coincidem com as do ponto A, ou seja

$$\overrightarrow{OA} = (a{,}2{,}a^3), a \in \mathbb{R}$$

Calculando as coordenadas do vetor $\overrightarrow{TQ}$, recorrendo às coordenadas dos pontos $T(0{,}0{,}2)$ e $Q(2{,}2{,}0)$, temos que

$$\overrightarrow{TQ} = Q - T = (2{,}2{,}0) - (0{,}0{,}2) = (2{,}2{,}-2)$$

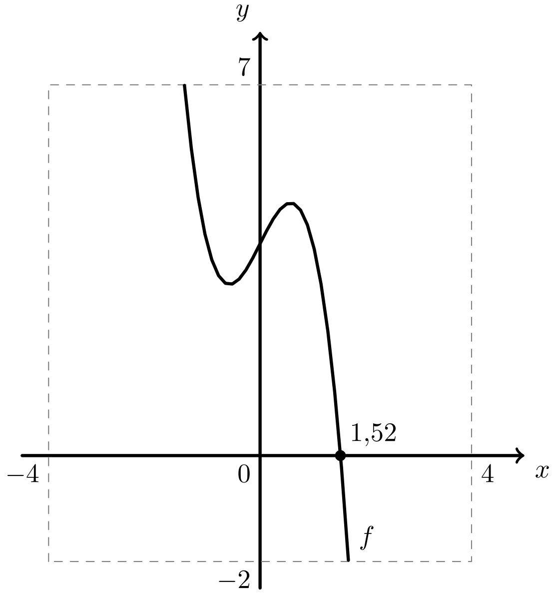
Como os vetores $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{TQ}$ são perpendiculares, o seu produto escalar é nulo:

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{TQ} = 0 \Leftrightarrow (a{,}2{,}a^3) \cdot (2{,}2{,}-2) = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2a + 2 \times 2 - 2a^3 = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow -2a^3 + 2a + 4 = 0, a \in \mathbb{R}$$

Desta forma, visualizando na calculadora gráfica o gráfico da função $f(x) = -2x^3 + 2x + 4$, na janela de visualização sugerida, (reproduzido na figura ao lado), podemos observar o zero da função.

Usando a função da calculadora para determinar valores aproximados dos zeros de uma função, obtemos um valor aproximado da solução da equação, ou seja, a abcissa do ponto A, cujo valor numérico, aproximado às centésimas, é

$$a \approx 1{,}52$$



Exame – 2015, 2.ª Fase

21. Como o ponto B tem de coordenadas $B(4,0,0)$, então de acordo com as indicações do enunciado, as coordenadas do ponto P, são $(4,b,0), b \in \mathbb{R}^+$ (abcissa 4 porque tem abcissa igual ao ponto B, e cota zero porque pertence ao eixo xOy).
Pelo que,

- $\overrightarrow{AB} = B - A = (4,0,0) - (0,0,2) = (4,0,-2)$ e
$$\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \sqrt{4^2+0^2+(-2)^2} = \sqrt{16+0+4} = \sqrt{20}$$
- $\overrightarrow{AP} = P - A = (4,b,0) - (0,0,2) = (4,b,-2), b \in \mathbb{R}^+$ e
$$\left\|\overrightarrow{AP}\right\| = \sqrt{4^2+b^2+(-2)^2} = \sqrt{16+b^2+4} = \sqrt{20+b^2}, b \in \mathbb{R}^+$$
- $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AP} = (4,0,-2)\cdot(4,b,-2) = 4\times 4 + 0\times b + (-2)\times(-2) = 16+0+4 = 20$

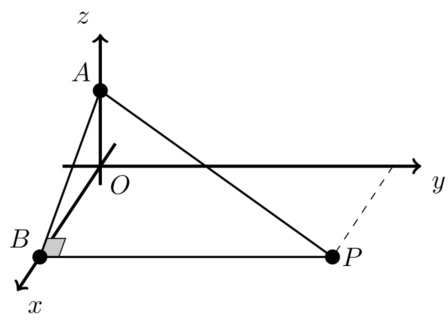
Temos ainda que o ângulo BAP é o ângulo formado pelos vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AP}$ e que
$$\cos\left(\overrightarrow{AB}\hat{\ }\overrightarrow{AP}\right) = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$$
Assim, recorrendo à definição de produto escalar, vem que:
$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AP} = \cos\left(\overrightarrow{AB}\hat{\ }\overrightarrow{AP}\right)\times\left\|\overrightarrow{AB}\right\|\times\left\|\overrightarrow{AP}\right\| \Leftrightarrow 20 = \frac{1}{2}\times\sqrt{20}\times\sqrt{20+b^2} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{40}{\sqrt{20}} = \sqrt{20+b^2} \Rightarrow \left(\frac{40}{\sqrt{20}}\right)^2 = \left(\sqrt{20+b^2}\right)^2 \Leftrightarrow \frac{1600}{20} = 20+b^2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 80 = 20+b^2 \Leftrightarrow 80-20 = b^2 \Leftrightarrow \pm\sqrt{60} = b$$
Logo, como a ordenada do ponto P é positiva, temos que
$$b = \sqrt{60}$$

*** Outra resolução: ***

Como a o ponto P pertence ao plano xOy e tem a mesma abcissa, a reta BP é paralela ao eixo Oy, e perpendicular ao plano xOz, pelo que é ortogonal (ou perpendicular a todas as retas contidas no plano, em particular é perpendicular à reta AB

Assim, o ângulo ABP é reto, e o triângulo $[ABP]$ é retângulo em B

Como $B\hat{A}P = \frac{\pi}{3}$, recorrendo à definição de tangente de um ângulo, temos que
$$\text{tg}\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\overline{BP}}{\overline{AB}}$$



Como, $\overline{AB} = 2\sqrt{5}$ (ver cálculos no item anterior), e $\text{tg}\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$, temos que
$$\text{tg}\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\overline{BP}}{\overline{AB}} \Leftrightarrow \sqrt{3} = \frac{\overline{BP}}{2\sqrt{5}} \Leftrightarrow 2\sqrt{5}\times\sqrt{3} = \overline{BP} \Leftrightarrow 2\sqrt{15} = \overline{BP}$$
Logo, como o ponto P tem ordenada positiva (e a mesma abcissa que o ponto B e pertence ao plano xOy), temos que as coordenadas do ponto P são $(4,y_P,0)$ e
$$y_P = 2\sqrt{15}$$

Exame – 2015, 1.ª Fase

22. Como o ponto A, pertence ao eixo Ox e o cubo tem aresta 3, temos que $A(3{,}0{,}0)$ e podemos calcular as coordenadas do vetor $\overrightarrow{HA}$, e a sua norma:

$$\overrightarrow{HA} = A - H = (3{,}0{,}0) - (3, -2{,}3) = (0, -(-2), -3) = (0{,}2, -3)$$

$$\left\|\overrightarrow{HA}\right\| = \sqrt{0^2 + 2^2 + (-3)^2} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$$

Da mesma forma, como o ponto C, pertence ao eixo Oy e o cubo tem aresta 3, temos que $C(0, -3{,}0)$ e podemos calcular as coordenadas do vetor $\overrightarrow{HC}$, e a sua norma:

$$\overrightarrow{HC} = C - H = (0, -3{,}0) - (3, -2{,}3) = (-3, -3+2, -3) = (-3, -1, -3)$$

$$\left\|\overrightarrow{HC}\right\| = \sqrt{(-3)^2 + (-1)^2 + (-3)^2} = \sqrt{9+1+9} = \sqrt{19}$$

Podemos ainda calcular o produto escalar $\overrightarrow{HA} \cdot \overrightarrow{HC}$:

$$\overrightarrow{HA}.\overrightarrow{HC} = (0{,}2, -3) \cdot (-3, -1, -3) = 0 \times (-3) + 2 \times (-1) + (-3) \times (-3) = 0 - 2 + 9 = 7$$

E assim, temos que α é o ângulo formado pelos vetores $\overrightarrow{HA}$ e $\overrightarrow{HC}$, pelo que, recorrendo à fórmula do produto escalar, vem que:

$$\cos(\alpha) = \cos\left(\overrightarrow{HA}\hat{\ }\overrightarrow{HC}\right) = \frac{\overrightarrow{HA}\,.\,\overrightarrow{HC}}{\left\|\overrightarrow{HA}\right\| \times \left\|\overrightarrow{HC}\right\|} = \frac{7}{\sqrt{13} \times \sqrt{19}} = \frac{7}{\sqrt{247}}$$

Pela fórmula fundamental da Trigonometria, temos que

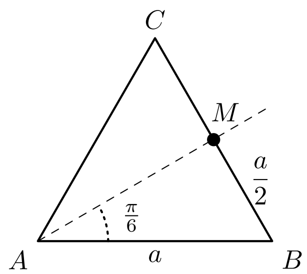
$$\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Leftrightarrow \operatorname{sen}^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha$$

Logo temos que o valor exato de $\operatorname{sen}^2\alpha$ é

$$\operatorname{sen}^2\alpha = 1 - \left(\frac{7}{\sqrt{247}}\right)^2 = 1 - \frac{7^2}{247} = \frac{247}{247} - \frac{49}{247} = \frac{198}{247}$$

Exame – 2014, 1.ª Fase

23. Como M é o ponto médio do lado $[BC]$, e o triângulo é equilátero, temos que $\overline{BM} = \frac{a}{2}$, e como o triângulo $[ABM]$ é retângulo em M, podemos determinar $\overline{AM}$:



$$\overline{AM}^2 + \overline{BM}^2 = \overline{AB}^2 \Leftrightarrow \overline{AM}^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = a^2 \Leftrightarrow \overline{AM}^2 = a^2 - \frac{a^2}{4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \overline{AM}^2 = \frac{4a^2}{4} - \frac{a^2}{4} \Leftrightarrow \overline{AM}^2 = \frac{3a^2}{4} \Rightarrow \overline{AM} = \frac{\sqrt{3}a}{2}$$

Como as alturas de um triângulo equilátero bissetam os ângulo internos do triângulo, temos que $B\hat{A}M = \frac{\pi}{6}$

Assim, vem que:

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} = \left\|\overrightarrow{AB}\right\| \times \left\|\overrightarrow{AM}\right\| \times \cos\left(\overrightarrow{AB}\hat{\ }\overrightarrow{AM}\right) = a \times \frac{\sqrt{3}a}{2} \times \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}a^2}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{(\sqrt{3})^2a^2}{4} = \frac{3a^2}{4}$$

Teste Intermédio 11.º ano – 11.03.2014

24. Como as coordenadas do ponto P são $(x_P, -4{,}1)$, as coordenadas do vetor $\overrightarrow{OP}$, são:

$$\overrightarrow{OP} = P - O = (x_P, -4{,}1) - (0{,}0{,}0) = (x_P, -4{,}1)$$

Como os $\overrightarrow{OP}$ e $\vec{u}$ são perpendiculares, então o respetivo produto escalar é nulo, pelo que podemos calcular a abcissa do ponto P:

$$\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{u} = 0 \Leftrightarrow (x_P, -4{,}1) \,.\, (2,3,6) = 0 \Leftrightarrow 2x_P - 4 \times 3 + 1 \times 6 = 0 \Leftrightarrow 2x_P - 12 + 6 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x_P - 6 = 0 \Leftrightarrow 2x_P = 6 \Leftrightarrow x_P = \frac{6}{2} \Leftrightarrow x_P = 3$$

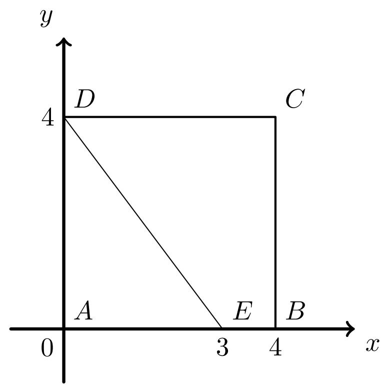
Resposta: **Opção C**

Teste Intermédio 11.º ano – 06.03.2013

25. Como o quadrado tem lado 4 ($\overline{AD} = 4$)e o triângulo $[ADE]$ tem área 6, podemos determinar a valor de $\overline{AE}$:

$$A = 6 \Leftrightarrow \frac{\overline{AE} \times \overline{AD}}{2} = 6 \Leftrightarrow \frac{\overline{AE} \times 4}{2} = 6 \Leftrightarrow \overline{AE} = \frac{6 \times 2}{4} \Leftrightarrow \overline{AE} = 3$$

Assim, considerando o quadrado (e o triângulo) num referencial o.n. xOy, em que a origem coincide com o ponto A e em que os lados estão sobre os eixos coordenados - como na figura ao lado - podemos identificar as coordenadas dos pontos C, D e E, e calcular as coordenadas dos vetores $\overrightarrow{ED}$ e $\overrightarrow{DC}$:



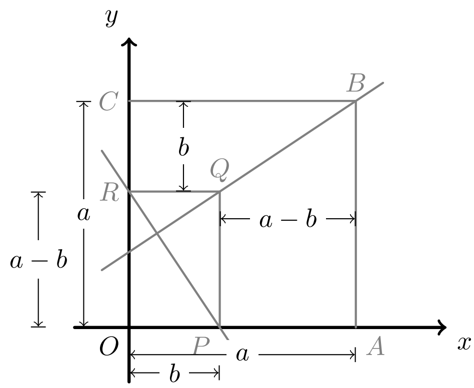
- $C(4{,}4)$
- $D(0{,}4)$
- $E(3{,}0)$
- $\overrightarrow{ED} = D - E = (0{,}4) - (3{,}0) = (-3{,}4)$
- $\overrightarrow{DC} = C - D = (4{,}4) - (0{,}4) = (4{,}0)$

Assim, temos que:

$$\overrightarrow{ED} \cdot \overrightarrow{DC} = (-3{,}4) \,.\, (4{,}0) = -3 \times 4 + 4 \times 0 = -12 + 0 = -12$$

Teste Intermédio 11.º ano – 06.03.2013

26. De acordo com os comprimentos indicados, podemos escrever as coordenadas dos seguintes pontos:



- $P(b{,}0)$
- $R(0{,}a-b)$
- $B(a{,}a)$
- $Q(b{,}a-b)$

Determinando as coordenadas dos vetores $\overrightarrow{PR}$ e $\overrightarrow{QB}$, temos:

- $\overrightarrow{QB} = B - Q = (a{,}a) - (b{,}a-b) = \big(a-b{,}a-(a-b)\big) =$
  $= (a-b{,}a-a+b) = (a-b{,}b)$
- $\overrightarrow{RP} = P - R = (b{,}0) - (0{,}a-b) = (b{,}-a+b)$

Calculando o valor do produto escalar, temos:

$$\overrightarrow{QB} \cdot \overrightarrow{RP} = (a-b{,}b) \cdot (b{,}-a+b) = (a-b) \times b + b \times (-a+b) = ab - b^2 + (-ab) + b^2 = b^2 - b^2 + ab - ab = 0$$

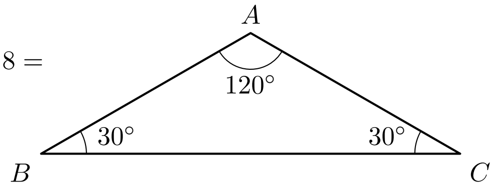
E assim podemos concluir que, como $\overrightarrow{QB}.\overrightarrow{RP} = 0$, então os vetores $\overrightarrow{QB}$ e $\overrightarrow{PR}$ têm direções perpendiculares, ou seja, as retas QB e RP são perpendiculares.

Teste Intermédio 11.º ano – 09.02.2012

27. Como os ângulos iguais (opostos aos lados iguais) tem 30° de amplitude, temos que:

$$C\hat{A}B + A\hat{B}C + B\hat{C}A = 180 \Leftrightarrow C\hat{A}B + 30 + 30 = 180 \Leftrightarrow C\hat{A}B = 180 - 60 \Leftrightarrow C\hat{A}B = 120°$$

Assim, vem que:



$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \cos\left(\overrightarrow{AB}\hat{\ }\overrightarrow{AC}\right) \times \left\|\overrightarrow{AB}\right\| \times \left\|\overrightarrow{AC}\right\| = \cos(90°+30°) \times 8 \times 8 =$$

$$= -\operatorname{sen}(30°) \times 64 = -\frac{1}{2} \times 64 = -\frac{64}{2} = -32$$

Resposta: **Opção B**

Teste Intermédio 11.º ano – 27.01.2011

28. Verificando que o ponto T pertence ao plano xOz, e designado por z_A a cota do ponto A, podemos escrever as coordenadas dos pontos O, T e A, e dos vetores $\overrightarrow{OT}$ e $\overrightarrow{OA}$:

- $O(0,0,0)$
- $T(4,0,-4)$
- $A(4,-4,z_A)$
- $\overrightarrow{OT} = T - O = (4,0,-4) - (0,0,0) = (4,0,-4)$
- $\overrightarrow{OA} = A - O = (4,-4,z_A) - (0,0,0) = (4,-4,z_A)$

Assim, determinando o valor de z_A, temos que:

$$\overrightarrow{OT} \cdot \overrightarrow{OA} = 8 \Leftrightarrow (4,0,-4) \cdot (4,-4,z_A) = 8 \Leftrightarrow 4 \times 4 + 0 \times (-4) - 4 \times z_A = 8 \Leftrightarrow 16 + 0 - 4z_A = 8 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -4z_A = 8 - 16 \Leftrightarrow -4z_A = -8 \Leftrightarrow z_A = \frac{8}{4} \Leftrightarrow z_A = 2$$

Teste Intermédio 11.º ano – 27.01.2011

29.

$$\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AJ} \underset{(1)}{=} \left(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DI}\right) \cdot \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BJ}\right) = \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BJ} + \overrightarrow{DI} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DI} \cdot \overrightarrow{BJ} \underset{(2)}{=}$$

$$= 0 + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BJ} + \overrightarrow{DI} \cdot \overrightarrow{AB} + 0 \underset{(3)}{=} \overrightarrow{AD} \cdot \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} =$$

$$= \left\|\overrightarrow{AD}\right\| \times \frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AD}\right\| \times \cos(0) + \left\|\overrightarrow{AB}\right\| \times \frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AB}\right\| \times \cos(0) = \frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AD}\right\|^2 + \frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2 \underset{(4)}{=}$$

$$= \frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2 + \frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2 = \frac{2}{2}\left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2 = \left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2$$

- (1) $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DI}$ e $\overrightarrow{AJ} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BJ}$
- (2) o produto escalar de vetores perpendiculares é nulo e $\overrightarrow{AD} \perp \overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{DI} \perp \overrightarrow{BJ}$
- (3) $\overrightarrow{DI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{BJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$
- (4) Como $[ABCD]$ é um quadrado, temos que $\overline{AB} = \overline{AD}$, ou seja, $\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \left\|\overrightarrow{AD}\right\|$

Teste Intermédio 11.º ano – 27.01.2011

30. Como $[AB]$ um diâmetro de uma esfera de centro C, temos que:

- $A\hat{C}B = 180°$
- $[CA]$ e $[CB]$ são raios da esfera

Assim, temos que:

$$\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = \cos\left(\overrightarrow{CA}\hat{\ }\overrightarrow{CB}\right) \times \left\|\overrightarrow{CA}\right\| \times \left\|\overrightarrow{CB}\right\| = \cos(180°) \times 4 \times 4 = -1 \times 16 = -16$$

Resposta: **Opção B**

Teste Intermédio 11.º ano – 06.05.2010
Teste Intermédio 11.º ano – 07.05.2009 (adaptado)

31. Como a área do setor circular é dada por $A = \frac{\alpha r^2}{2}$, e o raio da circunferência é 5, podemos determinar a amplitude do ângulo α, ou seja, do ângulo QCP:

$$A = \frac{\alpha r^2}{2} \Leftrightarrow \frac{\alpha \times 5^2}{2} = \frac{25\pi}{6} \Leftrightarrow \alpha = \frac{25\pi \times 2}{6 \times 25} \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{3}$$

E assim, temos que:

$$\overrightarrow{CP} \cdot \overrightarrow{CQ} = \left\|\overrightarrow{CP}\right\| \times \left\|\overrightarrow{CQ}\right\| \times \cos\left(\overrightarrow{CP}\hat{\ }\overrightarrow{CQ}\right) = 5 \times 5 \times \cos\frac{\pi}{3} = 25 \times \frac{1}{2} = \frac{25}{2}$$

Teste Intermédio 11.º ano – 27.01.2010

32. Percorrendo as etapas da sugestão, temos:

- O triângulo $[OAC]$ é isósceles, por que os lados $[OA]$ e $[OC]$ são ambos raios da circunferência.
- Como $[OD]$ é perpendicular a $[AC]$, então $[OD]$ é altura do triângulo $[OAC]$ relativamente À base $[AC]$, e como o triângulo é isósceles, a altura relativamente ao lado diferente ($[AC]$) é um eixo de simetria, pelo que $\overline{AC} = 2\overline{AD}$
- Como o ângulo o ângulo CAB é o ângulo inscrito relativo ao arco AB, tem metade da amplitude do arco. E como a amplitude do arco que é igual à amplitude do ângulo ao centro respetivo, que tem amplitude α, temos que:

$$C\hat{A}B = \frac{\overset{\frown}{AB}}{2} = \frac{C\hat{O}B}{2} = \frac{\alpha}{2}$$

- Como $[OD]$ é perpendicular a $[AC]$, então o triângulo $[ODA]$ é retângulo e o lado $[AD]$ é o cateto adjacente ao ângulo CAB (de amplitude $\frac{\alpha}{2}$) e o lado $[OA]$ é a hipotenusa (de comprimento r), pelo que, pela definição de cosseno, vem que:

$$\cos(C\hat{A}B) = \frac{\overline{AD}}{\overline{OA}} \Leftrightarrow \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\overline{AD}}{r} \Leftrightarrow \overline{AD} = r\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

- Como $[AB]$ é um diâmetro da circunferência, $\overline{AB} = 2r$, e como $\overline{AC} = 2\overline{AD}$, vem que:

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \left\|\overrightarrow{AB}\right\| \times \left\|\overrightarrow{AC}\right\| \times \cos\left(\overrightarrow{AB}\hat{\ }\overrightarrow{AC}\right) = 2r \times 2\left(r\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right) \times \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = 4r^2\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

Teste Intermédio 11.º ano – 29.01.2009

33. Para que o triângulo $[ABC]$ seja retângulo em B, então as retas AB e BC devem ser perpendiculares ou seja:

$$\overrightarrow{BA} \,.\, \overrightarrow{BC} = 0$$

Calculado as coordenadas dos vetores $\overrightarrow{BA}$ e $\overrightarrow{BC}$, temos:

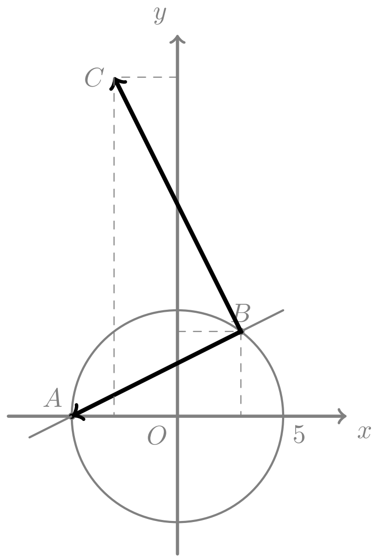
- $\overrightarrow{BA} = A - B = (-5{,}0) - (3{,}4) = (-8, -4)$
- $\overrightarrow{BC} = C - B = (-3{,}16) - (3{,}4) = (-6{,}12)$

Assim, o produto escalar é:

$$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = (-8, -4) \cdot (-6{,}12) = -8 \times (-6) + (-4) \times 12 =$$

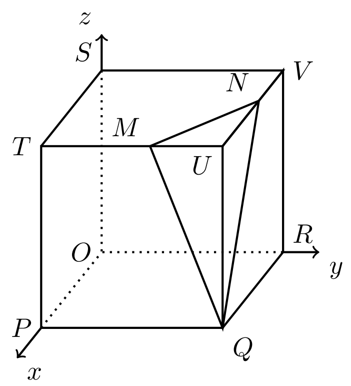
$$= 48 - 48 = 0$$

Ou seja, as retas BA e BC são perpendiculares pelo que o triângulo $[ABC]$ é retângulo em B



Teste Intermédio 11.º ano – 24.01.2008

34. Como a medida da aresta do cubo é 5, e as faces são paralelas aos eixos coordenados, e como a face plano $[OPQR]$ pertence ao eixo xOy, então podemos identificar as coordenadas do ponto Q e calcular as coordenadas dos pontos M e N, e calcular as coordenadas dos vetores $\overrightarrow{QM}$ e $\overrightarrow{QN}$ e ainda as respetivas normas:



Como o ponto Q pertence aos planos de equações $x = 5$, $y = 5$ e $z = 0$, então temos que $Q(5,5,0)$

- Como o ponto M pertence aos planos de equações $x = 5$, $z = 5$ e $10x + 15y + 6z = 125$, podemos calcular o valor da ordenada y_M:

  $$10 \times 5 + 15y_M + 6 \times 5 = 125 \Leftrightarrow 15y_M = 125 - 50 - 30 \Leftrightarrow 15y_M = 45 \Leftrightarrow y_M = \frac{45}{15} \Leftrightarrow y_M = 3$$

  Ou seja, $M(5,3,5)$
- Como o ponto N pertence aos planos de equações $y = 5$, $z = 5$ e $10x + 15y + 6z = 125$, podemos calcular o valor da abcissa x_N:

  $$10x_N + 15 \times 5 + 6 \times 5 = 125 \Leftrightarrow 10x_N = 125 - 75 - 30 \Leftrightarrow 10x_N = 20 \Leftrightarrow x_N = \frac{20}{10} \Leftrightarrow x_N = 2$$

  Ou seja, $N(2,5,5)$
- $\overrightarrow{QM} = M - Q = (5,3,5) - (5,5,0) = (0,-2,5)$
- $\left\|\overrightarrow{QM}\right\| = \sqrt{0^2 + (-2)^2 + 5^2} = \sqrt{0 + 4 + 25} = \sqrt{29}$
- $\overrightarrow{QN} = N - Q = (2,5,5) - (5,5,0) = (-3,0,5)$
- $\left\|\overrightarrow{QN}\right\| = \sqrt{(-3)^2 + 0^2 + 5^2} = \sqrt{9 + 0 + 25} = \sqrt{34}$

Finalmente, recorrendo à fórmula do produto escalar vem:

$$\cos\beta = \cos\left(\overrightarrow{QM}\hat{\ }\overrightarrow{QN}\right) = \frac{\overrightarrow{QM} \cdot \overrightarrow{QN}}{\left\|\overrightarrow{QM}\right\| \times \left\|\overrightarrow{QN}\right\|} = \frac{(0,-2,5) \cdot (-3,0,5)}{\sqrt{29} \times \sqrt{34}} = \frac{0 + 0 + 25}{\sqrt{29 \times 34}} = \frac{25}{\sqrt{986}}$$

Logo, o valor de β em graus, arredondado às unidades, é:

$$\beta = \cos^{-1}\left(\frac{25}{\sqrt{986}}\right) \approx 37^\circ$$

Teste Intermédio 11.º ano – 24.01.2008

35. Como o triângulo $[ABC]$ é retângulo, o lado maior ($[AB]$) é a hipotenusa e o lado $[AC]$ é o cateto adjacente ao ângulo CAB (ou ao ângulo EAD), pelo que, pela definição de cosseno, vem que:

$$\cos(C\hat{A}B) = \frac{\overline{AD}}{\overline{OA}} \Leftrightarrow \cos(C\hat{A}B) = \frac{4}{5} \Leftrightarrow \cos(E\hat{A}D) = \frac{4}{5}$$

E assim, vem que:

$$\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AE} = \left\|\overrightarrow{AD}\right\| \times \left\|\overrightarrow{AE}\right\| \times \cos\left(\overrightarrow{AD}\hat{\ }\overrightarrow{AE}\right) = 12 \times 15 \times \frac{4}{5} = 144$$

Resposta: **Opção D**

Teste Intermédio 11.º ano – 10.05.2007

36. Como $[ABCD]$ é um retângulo, $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$ e $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{BC}$, e assim vem que:

$$\overrightarrow{AB} \cdot \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\right) = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} =$$

$$= \left\|\overrightarrow{AB}\right\| \times \left\|\overrightarrow{AB}\right\| \times \cos\left(\overrightarrow{AB}\hat{\ }\overrightarrow{AB}\right) + \left\|\overrightarrow{AB}\right\| \times \left\|\overrightarrow{BC}\right\| \times \cos\left(\overrightarrow{AB}\hat{\ }\overrightarrow{BC}\right) =$$

$$= \overline{AB} \times \overline{AB} \times \cos(0°) + \overline{AB} \times \overline{BC} \times \cos(90°) = \overline{AB}^2 \times 1 + \overline{AB} \times \overline{BC} \times 0 = \overline{AB}^2 + 0 = \overline{AB}^2$$

Teste Intermédio 11.º ano – 19.05.2006

37. Identificando as coordenadas dos pontos W, Q e V, temos que:

- o ponto W pertence ao plano $z = 4$ e tem abcissa e ordenada igual a metade das respetivas coordenadas do ponto U porque é o centro do quadrado $[STUV]$:

$$W\left(\frac{x_U}{2},\frac{y_U}{2},4\right), \text{ ou seja, } W(1,1,4)$$

- o ponto Q pertence ao plano $z = 0$ e tem abcissa e ordenada iguais às do ponto U:

$$Q(x_U,y_U,0), \text{ ou seja, } Q(2,2,0)$$

- o ponto V pertence ao plano $y = 0$ e tem ordenada e cota iguais às do ponto U:

$$V(0,y_U,z_U), \text{ ou seja, } V(0,2,4)$$

Calculando as coordenadas e as normas dos vetores $\overrightarrow{QW}$ e $\overrightarrow{QV}$ temos:

- $\overrightarrow{QW} = W - Q = (1,1,4) - (2,2,0) = (-1,-1,4)$
- $\left\|\overrightarrow{QW}\right\| = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2 + 4^2} = \sqrt{1+1+16} = \sqrt{18}$
- $\overrightarrow{QV} = V - Q = (0,2,4) - (2,2,0) = (-2,0,4)$
- $\left\|\overrightarrow{QV}\right\| = \sqrt{(-2)^2 + 0^2 + 4^2} = \sqrt{4+0+16} = \sqrt{20}$

Finalmente, recorrendo à fórmula do produto escalar vem:

$$\cos\left(W\hat{Q}V\right) = \cos\left(\overrightarrow{QW}\hat{\ }\overrightarrow{QV}\right) = \frac{\overrightarrow{QW} \cdot \cdot \overrightarrow{QV}}{\left\|\overrightarrow{QW}\right\| \times \left\|\overrightarrow{QV}\right\|} = \frac{(-1,-1,4)\cdot(-2,0,4)}{\sqrt{18}\times\sqrt{20}} = \frac{2+0+16}{\sqrt{18\times 20}} = \frac{18}{\sqrt{360}}$$

Logo, o valor do ângulo WQV em graus, arredondado às unidades, é:

$$W\hat{Q}V = \cos^{-1}\left(\frac{18}{\sqrt{360}}\right) \approx 18°$$

Exame – 2001, Ép. especial (cód. 135)

38. Analisando as alternativas apresentadas, temos que:

- Como o produto escalar é nulo quando os vetores têm direções perpendiculares, então se $x = \frac{\pi}{2}$, então $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OP} = 0$, ou seja, $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$, pelo que o gráfico da opção (C) não pode ser o da função f
- Como o produto escalar é positivo quando os vetores definem entre si um ângulo agudo, então se $0 < x < \frac{\pi}{2}$, então $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OP} > 0$, pelo que o gráfico da opção (B) não pode ser o da função f
- Como o produto escalar é negativo quando os vetores definem entre si um ângulo obtuso, então se $\frac{\pi}{2} < x < \pi$, então $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OP} < 0$, pelo que o gráfico da opção (D) não pode ser o da função f

Assim, de entre as opções apresentadas, o único gráfico que pode ser o da função f, é o gráfico da opção (A)

Resposta: **Opção A**

Exame – 2001, Prova para militares (cód. 435)

39. Como os vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{BA}$ têm a mesma direção e sentidos contrários, o ângulo formado pelos vetores é de 180°.

Como ambos os vetores têm norma 1, recorrendo à fórmula do produto escalar vem:

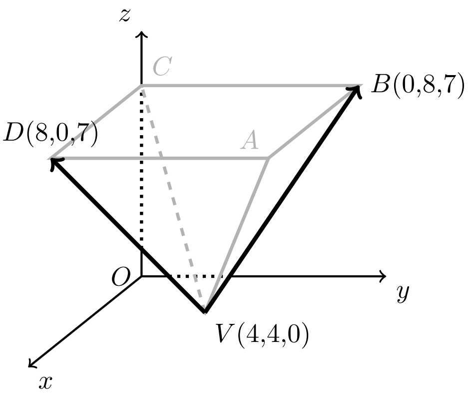
$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BA} = \cos\left(\overrightarrow{AB}\hat{\ }\overrightarrow{BA}\right) \times \left\|\overrightarrow{AB}\right\| \times \left\|\overrightarrow{BA}\right\| = \cos(180°) \times 1 \times 1 = -1 \times 1 \times 1 = -1$$

Resposta: **Opção B**

Exame – 2001, Prova Modelo (cód. 135)
Exame – 2000, 2.ª Fase (cód. 135)

40. Como o ponto A tem coordenadas (8,8,7), o ponto D pertence ao plano xOz e que a base da pirâmide é paralela ao plano xOy, então as coordenadas do ponto D são (8,0,7)
Da mesma forma, como o ponto B pertence ao plano yOz e que a base da pirâmide é paralela ao plano xOy, então as coordenadas do ponto B são (0,8,7)

Como a o vértice V da pirâmide pertence ao plano xOy tem cota nula como a pirâmide é regular as restantes coordenadas são metade das coordenadas respetivas do ponto A, então as coordenadas do vértice V são (4,4,0)



Assim, calculando as coordenadas e as normas dos vetores $\overrightarrow{VD}$ e $\overrightarrow{VB}$ temos:

- $\overrightarrow{VD} = D - V = (8,0,7) - (4,4,0) = (4,-4,7)$
- $\left\|\overrightarrow{VD}\right\| = \sqrt{4^2 + (-4)^2 + 7^2} = \sqrt{16+16+49} = \sqrt{81} = 9$
- $\overrightarrow{VB} = D - V = (0,8,7) - (4,4,0) = (-4,4,7)$
- $\left\|\overrightarrow{VD}\right\| = \sqrt{(-4)^2 + 4^2 + 7^2} = \sqrt{16+16+49} = \sqrt{81} = 9$

Finalmente, recorrendo à fórmula do produto escalar vem:

$$\cos\left(D\hat{V}B\right) = \cos\left(\overrightarrow{VD}\,\overrightarrow{VB}\right) = \frac{\overrightarrow{VD} \cdot \overrightarrow{VB}}{\left\|\overrightarrow{VD}\right\| \times \left\|\overrightarrow{VB}\right\|} = \frac{(4,-4,7)\cdot(-4,4,7)}{9 \times 9} = \frac{-16-16+49}{81} = \frac{17}{81}$$

Logo, o valor do ângulo DVB em graus, com aproximação à décima de grau, é:

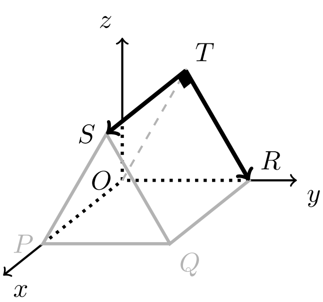
$$D\hat{V}B = \cos^{-1}\left(\frac{17}{81}\right) \approx 77{,}9°$$

Exame – 2000, Ép. Especial (setembro) (cód. 135)
Exame – 1999, Prova de reserva (cód. 135)

41. Como o prisma é regular, as faces laterais são retângulos, pelo que ângulo formado pelos vetores $\overrightarrow{TS}$ e $\overrightarrow{TR}$ é um ângulo reto, ou seja têm direções perpendiculares.

Como os vetores têm direções perpendiculares, então:

$$\overrightarrow{TS} \cdot \overrightarrow{TR} = 0$$



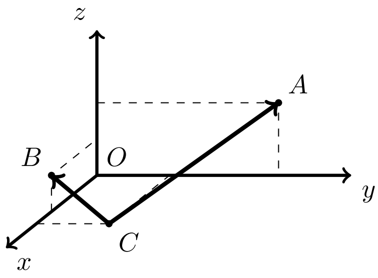
Exame – 2000, 1.ª fase - 2.ª chamada (cód. 135)

42. Determinando as coordenadas dos vetores $\overrightarrow{CA}$ e $\overrightarrow{CB}$ temos:
   - $\overrightarrow{CA} = A - C = (0,5,2) - (4,2,0) = (-4,3,2)$
   - $\overrightarrow{CB} = B - C = (3,0,1) - (4,2,0) = (-1,-2,1)$

   Calculando o valor do produto escalar, temos:

   $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB} = (-4,3,2)\cdot(-1,-2,1) = -4\times(-1)+3\times(-2)+2\times 1 = 4-6+2 = 0$

   E assim podemos concluir que como $\overrightarrow{CA}\,.\,\overrightarrow{CB} = 0$, então o ângulo ACB é reto, ou seja, que o triângulo $[ABC]$ é retângulo em C

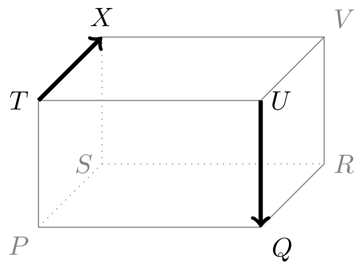


Exame – 1999, 2.ª fase (cód. 135)

43. O produto escalar de dois vetores é nulo se os dois vetores tiverem direções perpendiculares.

   De entre as opções apresentadas, apenas os vetores $\overrightarrow{UQ}$ e $\overrightarrow{TX}$ representam vetores com direções perpendiculares.

   Resposta: **Opção B**



Exame – 1999, 1.ª Fase - 2.ª Chamada (cód. 135)

44. Temos que:

   $\vec{p}\cdot\vec{q} = -9 \Leftrightarrow \cos(\vec{p}\,\hat{}\,\vec{q})\times\|\vec{p}\|\times\|\vec{q}\| = -9 \Leftrightarrow \cos(\vec{p}\,\hat{}\,\vec{q})\times 3\times 3 = -9 \Leftrightarrow \cos(\vec{p}\,\hat{}\,\vec{q}) = -\frac{9}{9} \Leftrightarrow \cos(\vec{p}\,\hat{}\,\vec{q}) = -1$

   Logo temos que $\vec{p}\,\hat{}\,\vec{q} = 180°$ e como $\|\vec{p}\| = \|\vec{q}\|$, então os vetores são simétricos, ou seja:

   $$\vec{p} = -\vec{q} \;\Leftrightarrow\; \vec{p} + \vec{q} = 0$$

   Resposta: **Opção A**

Exame – 1998, Prova para militares (cód. 135)

45. Determinando as coordenadas dos vetores $\overrightarrow{PO}$ e $\overrightarrow{PQ}$ temos:
   - $\overrightarrow{PO} = O - P = (0,0,0) - (2,2,2) = (-2,-2,-2)$
   - $\overrightarrow{PQ} = Q - P = (3,3,0) - (2,2,2) = (1,1,-2)$

   Calculando o valor do produto escalar, temos:

   $$\overrightarrow{PO}\cdot\overrightarrow{PQ} = (-2,-2,-2)\cdot(1,1,-2) = -2\times 1 + (-2)\times 1 + (-2)\times(-2) = -2-2+4 = 0$$

   E assim podemos concluir que como $\overrightarrow{PO}\cdot\overrightarrow{PQ} = 0$, então o ângulo OPQ é reto.

Exame – 1998, Prova de reserva (cód. 135)

46. Como o ponto C deve pertencer ao eixo Oz, e com cota positiva, as suas coordenadas são da forma $(0,0,k), k \in \mathbb{R}^+$

Calculando as coordenadas dos vetores $\overrightarrow{CA}$ e $\overrightarrow{CB}$, vem que:

- $\overrightarrow{CA} = A - C = (5,0,0) - (0,0,k) = (5,0,-k)$
- $\overrightarrow{CB} = B - C = (0,3,1) - (0,0,k) = (0,3,1-k)$

Como o triângulo $[ABC]$ deve ser retângulo em C, $\overrightarrow{CA} \,.\, \overrightarrow{CB} = 0$, e assim temos que:

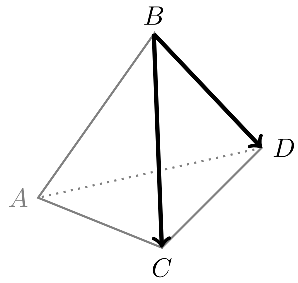
$$\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = 0 \Leftrightarrow (5,0,-k) \cdot (0,3,1-k) = 0 \Leftrightarrow 5 \times 0 + 0 \times 3 + (-k) \times (1-k) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -k(1-k) = 0 \Leftrightarrow -k = 0 \vee 1 - k = 0 \Leftrightarrow k = 0 \vee 1 = k$$

Como o ponto C deve ter cota positiva, temos que $k = 1$ e assim as coordenadas do ponto C são $(0,0,1)$

Exame – 1998, 2.ª fase (cód. 135)

47. Como as faces do tetraedro são triângulos equiláteros, os ângulos internos têm $\frac{\pi}{3}$ radianos de amplitude.



Como o tetraedro é regular, todas a medida de todas as arestas é igual, e assim, vem que:

$$\left\|\overrightarrow{BC}\right\| = \left\|\overrightarrow{BD}\right\| = \overline{AB} = 6$$

E assim, calculando o valor do produto escalar, vem:

$$\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BD} = \left\|\overrightarrow{BC}\right\| \times \left\|\overrightarrow{BD}\right\| \times \cos\left(\overrightarrow{BC} \hat{\ } \overrightarrow{BD}\right) = 6 \times 6 \times \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = 36 \times \frac{1}{2} = \frac{36}{2} = 18$$

Resposta: **Opção A**

Exame – 1998, 1.ª fase - 1.ª chamada (cód. 135)

48. Determinando as coordenadas dos vetores $\overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{AB}$ temos:

- $\overrightarrow{AC} = C - A = (0,-5,0) - (4,3,0) = (-4,-8,0)$
- $\overrightarrow{AB} = B - A = (0,5,0) - (4,3,0) = (-4,2,0)$

Calculando o valor do produto escalar, temos:

$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} = (-4,-8,0) \cdot (-4,2,0) = -4 \times (-4) + (-8) \times 2 + 0 \times 0 = 16 - 16 + 0 = 0$$

E assim podemos concluir que como $\overrightarrow{AC} . \overrightarrow{AB} = 0$, então os vetores $\overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{AB}$ têm direções perpendiculares, ou seja, as retas AC e AB são perpendiculares.

Exame – 1997, 1.ª fase - 1.ª chamada (cód. 135)