

Geometria (11.º ano)
Equações de retas e planos

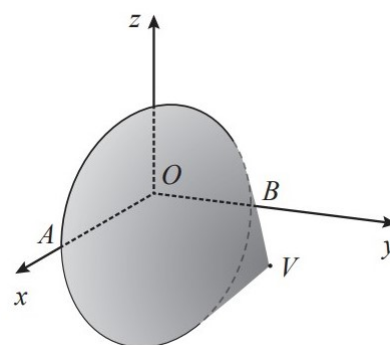
Exercícios de Provas Nacionais e Testes Intermédios



1. Na figura ao lado, está representado, em referencial o.n. $Oxyz$, um cone reto de vértice V .

Sabe-se que:

- a base do cone intersecta o semieixo positivo Ox no ponto A e o semieixo positivo Oy no ponto B ;
- o segmento de reta $[AB]$ é um diâmetro da base do cone;
- a base do cone está contida no plano definido pela equação $x + 2y - 8 = 0$;
- a abcissa do ponto V tem menos uma unidade do que a sua ordenada.



1.1. Qual das seguintes equações define um plano paralelo ao plano que contém a base do cone e que passa no ponto de coordenadas $(1, -3, 5)$?

- (A) $-2x + y + 5 = 0$ (B) $x + 2y - 10 = 0$
(C) $x + 2y + 5 = 0$ (D) $x - 3y + 5 = 0$

1.2. Resolva este item sem recorrer à calculadora.

Determine as coordenadas do ponto V .

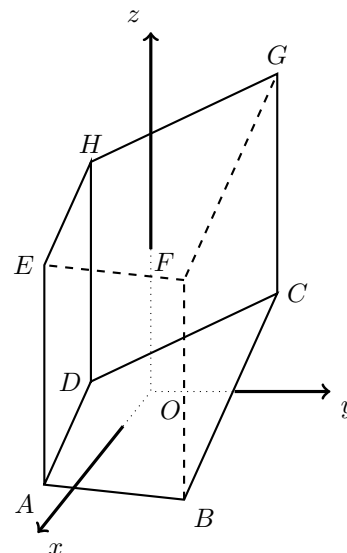
2. Na figura ao lado, está representado, em referencial o.n. $Oxyz$, o prisma reto $[ABCDEFGH]$, de bases $[ABCD]$ e $[EFGH]$.

Sabe-se que:

- as bases do prisma são trapézios retângulos;
- o ponto A tem coordenadas $(4, -4, -3)$, e o ponto B tem a ordenada igual ao dobro da abcissa;
- uma equação da reta BC é $(x, y, z) = (3, 5, 1) + k(2, 3, 6)$, $k \in \mathbb{R}$.

Qual das equações seguintes é uma equação do plano ABF ?

- (A) $2x + 3y + 6z + 22 = 0$ (B) $2x + 3y + 6z - 20 = 0$
 (C) $3x - 2y - 20 = 0$ (D) $3x - 2y - 22 = 0$

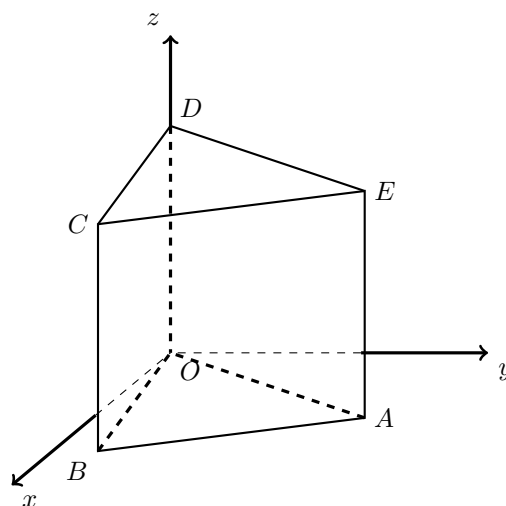


Exame – 2024, 1.ª Fase

3. Na figura ao lado, está representado, em referencial o.n. $Oxyz$, o prisma triangular reto $[OABCDE]$, de bases $[OAB]$ e $[CDE]$.

Sabe-se que:

- as coordenadas do ponto A são $(2\sqrt{3}, 6, 0)$;
- o ponto B pertence ao plano medidor do segmento de reta $[OA]$;
- a reta AB é definida pela equação vetorial $(x, y, z) = (0, 16, 0) + k(\sqrt{3}, -5, 0)$, $k \in \mathbb{R}$;
- o ponto D pertence ao eixo Oz e tem cota 5.



- 3.1. Qual das seguintes equações define o plano que passa no ponto A e é perpendicular ao eixo Ox ?

- (A) $z = 0$ (B) $y = 6$ (C) $x = 2\sqrt{3}$ (D) $x + y + z = 0$

- 3.2. Resolva este item sem recorrer à calculadora.

Determine o volume do prisma $[OABCDE]$.

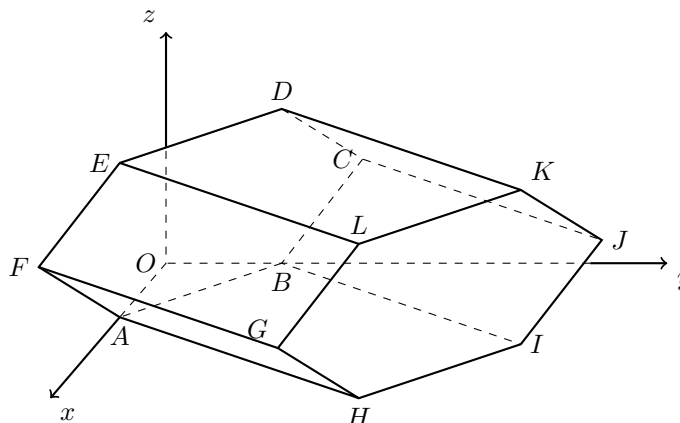
Exame – 2023, Ép. especial



4. Na figura ao lado, está representado, em referencial o.n. $Oxyz$, o prisma hexagonal reto $[ABCDEFGHIJKL]$, de bases $[ABCDEF]$ e $[GHIJKL]$.

Sabe-se que:

- as coordenadas dos vértices A e G do prisma são, respetivamente, $(4,0,0)$ e $\left(12, \frac{13}{2}, 2\right)$;
- a reta EL é definida pela equação vetorial $(x,y,z) = (-2, -8, 4) + k(3, 4, 0), k \in \mathbb{R}$.



Resolva este item sem recorrer à calculadora.

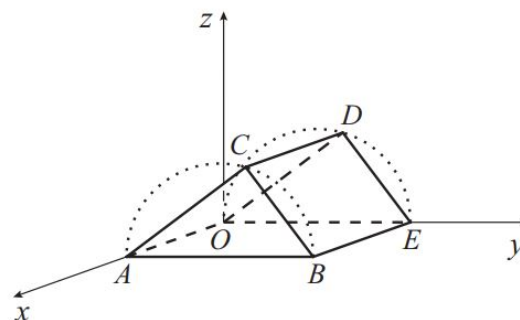
Determine as coordenadas do vértice F do prisma.

Exame – 2023, 2.ª Fase

5. Na figura ao lado, está representado, em referencial o.n. $Oxyz$, o prisma triangular reto $[OABCDE]$, de bases $[ABC]$ e $[OED]$.

Sabe-se que:

- as bases do prisma estão inscritas em semicírculos, respetivamente, de diâmetros $[AB]$ e $[OE]$;
- os vértices A e E do prisma pertencem, respetivamente, aos semieixos positivos Ox e Oy ;
- $\overline{OE} = 12,5$;
- a reta AC é definida pela equação vetorial $(x,y,z) = (10,0,0) + k(0,4,3), k \in \mathbb{R}$.



- 5.1. Qual das seguintes equações vetoriais define a reta OD ?

- (A) $(x,y,z) = (0,6,8) + k\left(0,2,\frac{3}{2}\right), k \in \mathbb{R}$
- (B) $(x,y,z) = (0, -4, -3) + k\left(0,2,\frac{3}{2}\right), k \in \mathbb{R}$
- (C) $(x,y,z) = (0, -4, -3) + k(0,3,4), k \in \mathbb{R}$
- (D) $(x,y,z) = (0, -4, -3) + k(0,6,8), k \in \mathbb{R}$

- 5.2. Resolva este item sem recorrer à calculadora.

Determine as coordenadas do ponto C .

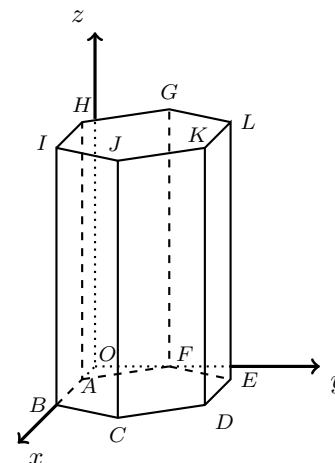
Exame – 2023, 1.ª Fase



6. Na figura ao lado, está representado, em referencial o.n. $Oxyz$, o prisma hexagonal reto $[ABCDEFGH IJKL]$, cujas bases são hexágonos regulares.

Sabe-se que:

- os vértices A e B pertencem ao semieixo positivo Ox , e o vértice F pertence ao semieixo positivo Oy ;
- o plano BCJ é definido pela equação $3x - \sqrt{3}y - 6 = 0$;
- o centro do prisma, ponto equidistante de todos os seus vértices, é o ponto $M\left(\frac{4}{3}, \frac{2\sqrt{3}}{3}, 2\right)$.



- 6.1. Qual das seguintes equações define o plano que contém a face $[GHIJKL]$?

(A) $z = 2$ (B) $z = 4$ (C) $x = \frac{4}{3}$ (D) $x = \frac{8}{3}$

- 6.2. Determine, sem recorrer à calculadora, uma equação cartesiana do plano LEF .

Apresente a equação na forma $ax + by + cz + d = 0$, em que a , b , c e d são números reais.

Exame – 2022, Ép. especial

7. Na figura ao lado, está representado o cubo $[ABCDEFGH]$.

Fixado um determinado referencial o.n. $Oxyz$, tem-se:

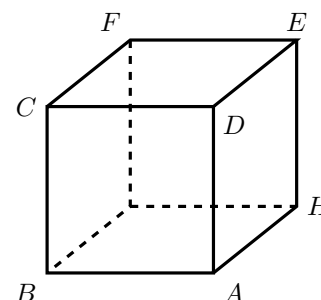
$$A(-2,5,0), B(1,-1,2) \text{ e } C(3,2,8).$$

Resolva este item sem recorrer à calculadora.

Sabe-se que o vértice E do cubo pertence à reta definida pela equação

$$(x,y,z) = (0,0,3) + k(1,-1,-1), k \in \mathbb{R}$$

Determine as coordenadas do vértice E .



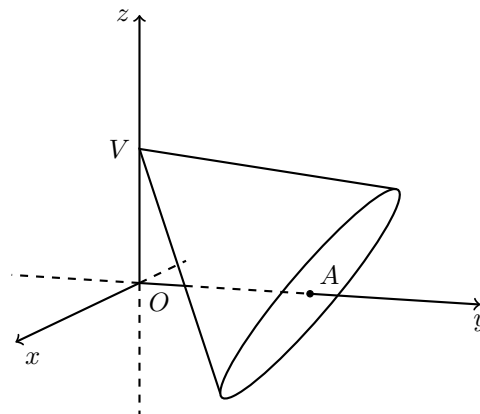
Exame – 2022, 2.ª Fase



8. Na figura ao lado, está representado, em referencial o.n. $Oxyz$, um cone reto de vértice V e base de centro no ponto A .

Sabe-se que:

- o ponto V pertence ao eixo Oz , e o ponto A pertence ao eixo Oy ;
- a base do cone tem raio 3 e está contida no plano definido por $4y - 3z = 16$.



- 8.1. Qual das seguintes equações define um plano perpendicular ao plano que contém a base do cone e que passa no ponto de coordenadas $(1, 2, -1)$?

- (A) $4x - 3z = 11$ (B) $3x + 4y + z = 10$
 (C) $3y + 4z = 8$ (D) $x + 3y + 4z = 3$

- 8.2. Resolva este item sem recorrer à calculadora.

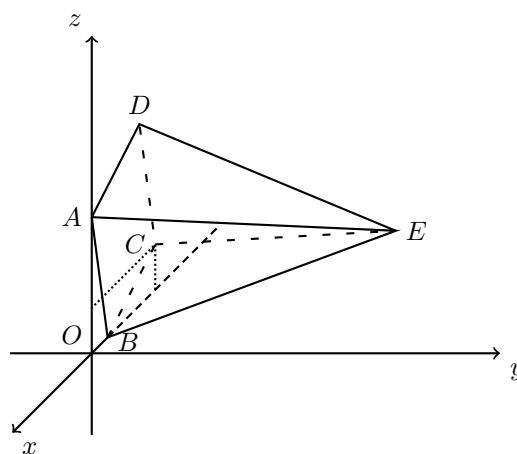
Determine o volume do cone.

Exame – 2022, 1.ª Fase

9. Na figura ao lado, está representada, num referencial o.n. $Oxyz$, a pirâmide regular de base quadrada $[ABCD]$ e vértice E

Sabe-se que:

- a base da pirâmide está contida no plano xOz
- o vértice A pertence ao semieixo positivo Oz e o vértice B pertence ao semieixo negativo Ox
- o vértice E tem coordenadas $(-2, 6, 2)$
- o vetor \overrightarrow{BE} tem coordenadas $(-1, 6, 2)$
- o volume da pirâmide é 20



Seja α o plano perpendicular à reta BE e que passa no ponto de coordenadas $(1, 0, 1)$

Qual das equações seguintes é uma equação do plano α ?

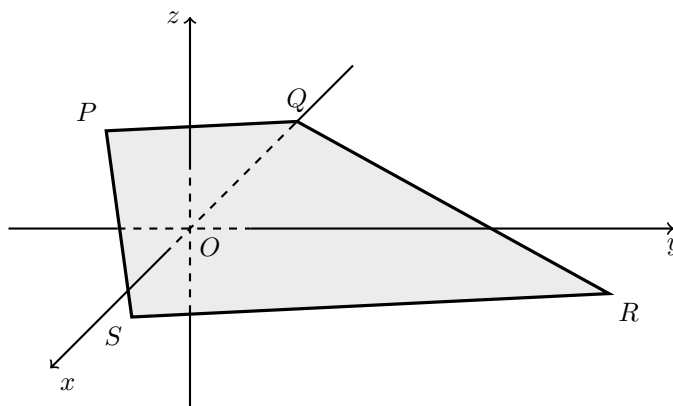
- (A) $-x + 6y + 2z = 0$ (B) $x + 6y + 2z - 3 = 0$
 (C) $x - 6y - 2z + 1 = 0$ (D) $2x - y + 4z - 5 = 0$

Exame – 2021, Ép. especial



10. Na figura seguinte, está representado, num referencial o.n. $Oxyz$, um trapézio $[PQRS]$, de bases $[PQ]$ e $[RS]$, em que o lado $[PS]$ é perpendicular às bases.

Tem-se $P(1, -1, 2)$, $Q(-2, 1, 1)$ e $R(-5, 5, -3)$



Determine uma equação do plano perpendicular à reta RS e que passa no ponto P

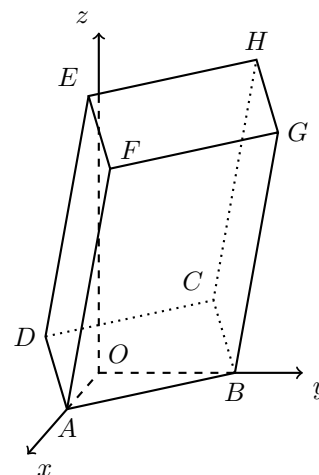
Apresente essa equação na forma $ax + by + cz + d = 0$

Exame – 2021, 2.^a Fase

11. Na figura ao lado, está representado, num referencial o.n. $Oxyz$, um paralelepípedo retângulo $[ABCDEFGH]$.

Sabe-se que:

- o vértice A pertence ao eixo Ox e o vértice B pertence ao eixo Oy
- as coordenadas dos vértices E e G são $(7, 2, 15)$ e $(6, 10, 13)$, respetivamente;
- a reta EF é definida pela equação $(x, y, z) = (1, -2, 19) + k(-3, -2, 2)$, $k \in \mathbb{R}$



- 11.1. Qual das equações seguintes define uma reta perpendicular à reta EF e que passa no ponto E ?

- (A) $(x, y, z) = (7, -3, 3) + k(-2, 3, 0)$, $k \in \mathbb{R}$
- (B) $(x, y, z) = (7, 2, 15) + k(0, 3, -3)$, $k \in \mathbb{R}$
- (C) $(x, y, z) = (7, -10, 3) + k(0, 3, 3)$, $k \in \mathbb{R}$
- (D) $(x, y, z) = (7, 2, 3) + k(2, 0, -3)$, $k \in \mathbb{R}$

- 11.2. Determine, sem recorrer à calculadora, a equação reduzida da superfície esférica de centro no ponto B e que passa no ponto D

Exame – 2021, 1.^a Fase



12. Na figura seguinte, está representado, num referencial o.n. $Oxyz$, um cubo $[ABCDEFGH]$ em que cada aresta é paralela a um dos eixos coordenados.

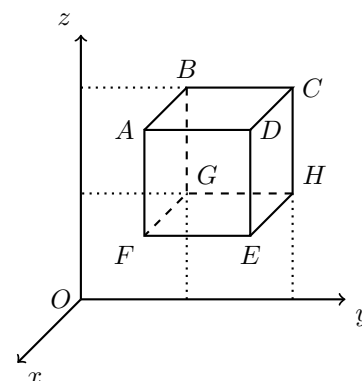
Sabe-se que:

- o vértice B tem coordenadas $(0,2,4)$
- o vetor \overrightarrow{BE} tem coordenadas $(2,2,-2)$
- a aresta $[BG]$ é paralela ao eixo Oz

Seja α o plano que passa por G e é perpendicular à reta OE

Sejam P , Q e R os pontos de α que pertencem aos eixos coordenados.

Determine o volume da pirâmide $[OPQR]$



Exame – 2020, Ép. especial

13. Na figura ao lado, está representado, num referencial o.n. $Oxyz$, o cubo $[ABCDEFGH]$ (o ponto H não está representado na figura).

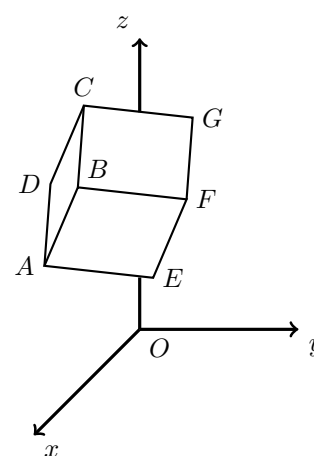
Sabe-se que:

- o ponto A tem coordenadas $(7,1,4)$
- o ponto G tem coordenadas $(5,3,6)$
- a reta AE é definida pela equação vetorial $(x,y,z) = (7,1,4) + k(3,-6,2)$, $k \in \mathbb{R}$

Resolva o item seguinte sem recorrer à calculadora.

Determine uma equação do plano EFG

Apresente essa equação na forma $ax + by + cz + d = 0$



Exame – 2020, 2.ª Fase

14. Na figura ao lado, está representado, num referencial o.n. $Oxyz$, um cilindro reto.

Sabe-se que:

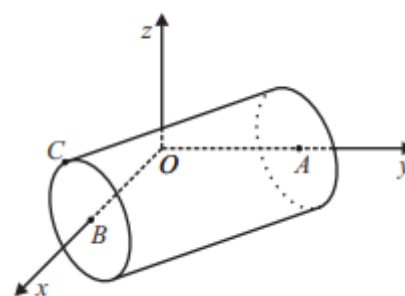
- o ponto A pertence ao eixo Oy e é o centro de uma das bases do cilindro, e o ponto B pertence ao eixo Ox e é o centro da outra base;
- o ponto C pertence à circunferência de centro B que delimita uma das bases do cilindro;
- o plano ABC é definido pela equação $3x + 4y + 4z - 12 = 0$

Resolva os itens seguintes. sem recorrer à calculadora.

- 14.1. Determine \overline{BC} , sabendo que o volume do cilindro é igual a 10π

- 14.2. Seja P o ponto de coordenadas $(3,5,6)$

Determine as coordenadas do ponto do plano ABC que se encontra mais próximo do ponto P



Exame – 2020, 1.ª Fase



15. Considere, num referencial o.n. $Oxyz$,

- o plano α , de equação $2x + 3y - z - 9 = 0$
- a reta r , de equação vetorial $(x,y,z) = (1,2,1) + k(0,1,5), k \in \mathbb{R}$

15.1. Seja A o ponto da reta r cuja ordenada é igual a 4

Determine uma equação do plano que é paralelo ao plano α e que passa pelo ponto A

Apresente essa equação na forma $ax + by + cz + d = 0$

15.2. Seja P o ponto de intersecção da reta r com o plano α

Determine as coordenadas do ponto P

Exame – 2019, Ép. especial

16. Na figura seguinte, está representado, num referencial o.n. $Oxyz$, um paralelepípedo retângulo $[ABCDEFGH]$

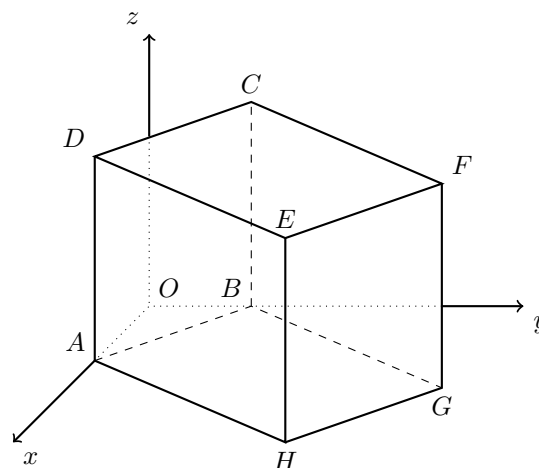
Sabe-se que:

- o vértice A pertence ao eixo Ox e o vértice B pertence ao eixo Oy
- o vértice C tem coordenadas $(0,3,6)$ e o vértice G tem coordenadas $(6,11,0)$
- o plano ABC é definido pela equação $3x + 4y - 12 = 0$

16.1. Determine o volume do paralelepípedo $[ABCDEFGH]$

16.2. Seja P o ponto de coordenadas $(1, -4, 3)$, e seja r a reta que passa pelo ponto P e é perpendicular ao plano ABC

Determine as coordenadas do ponto de intersecção da reta r com o plano ABC



Exame – 2019, 2.ª Fase

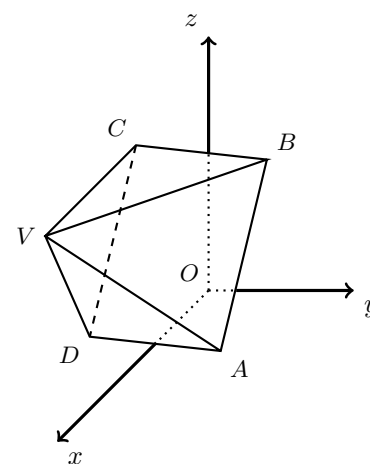
17. Na figura ao lado, está representada, num referencial o.n. $Oxyz$, uma pirâmide quadrangular regular $[ABCDV]$

Os vértices A e C têm coordenadas $(2,1,0)$ e $(0, -1,2)$, respetivamente.

O vértice V tem coordenadas $(3, -1,2)$

Determine uma equação do plano que contém a base da pirâmide.

Apresente essa equação na forma $ax + by + cz + d = 0$



Exame – 2019, 1.ª Fase



18. Considere, num referencial o.n. $Oxyz$, a superfície esférica de equação

$$(x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z + 1)^2 = 10$$

Seja P o ponto da superfície esférica de abcissa 1, ordenada 3 e cota negativa.

Seja r a reta de equação vetorial $(x,y,z) = (-1,0,3) + k(4,1,-2)$, $k \in \mathbb{R}$

Determine uma equação do plano que passa no ponto P e é perpendicular à reta r

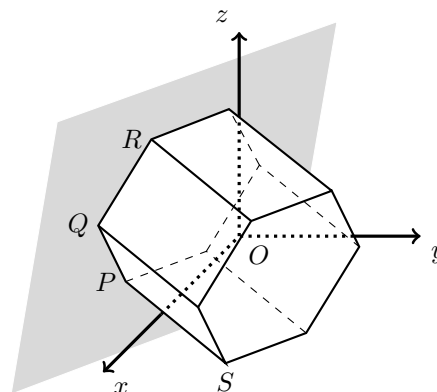
Apresente essa equação na forma $ax + by + cz + d = 0$

Exame – 2018, 2.ª Fase

19. Na figura ao lado, está representado, num referencial o.n. $Oxyz$, um prisma hexagonal regular.

Sabe-se que:

- $[PQ]$ e $[QR]$ são arestas de uma das bases do prisma;
- $\overline{PQ} = 4$
- o plano PQR tem equação $2x + 3y - z - 15 = 0$
- uma das arestas laterais do prisma é o segmento de reta $[PS]$, em que S é o ponto de coordenadas $(14,5,0)$



Determine a área lateral do prisma.

Apresente o resultado arredondado às décimas.

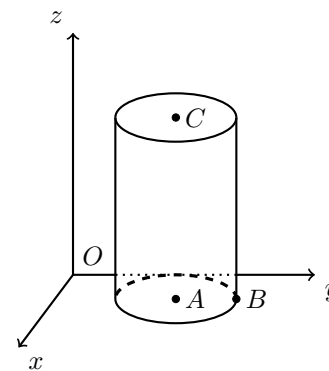
Se, em cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, três casas decimais.

Exame – 2018, 1.ª Fase

20. Na figura ao lado, está representado, num referencial o.n. $Oxyz$, um cilindro de revolução de altura 3

Sabe-se que:

- o ponto A tem coordenadas $(1,2,0)$ e é o centro da base inferior do cilindro, a qual está contida no plano xOy
- o ponto B tem coordenadas $(1,3,0)$ e pertence à circunferência que delimita a base inferior do cilindro;
- o ponto C é o centro da base superior do cilindro.



Determine as coordenadas do ponto de intersecção da reta BC com o plano xOz

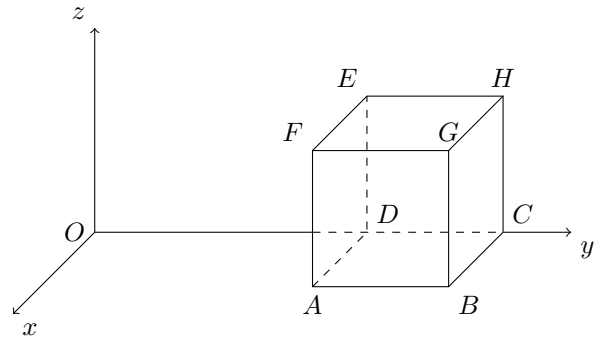
Exame – 2017, Ép. especial



21. Na figura ao lado, está representado, num referencial o.n. $Oxyz$, o cubo $[ABCDEFGH]$

Sabe-se que:

- a face $[ABCD]$ está contida no plano xOy
- a aresta $[CD]$ está contida no eixo Oy
- o ponto D tem coordenadas $(0,4,0)$
- o plano ACG é definido pela equação $x + y - z - 6 = 0$



Verifique que o vértice A tem abcissa igual a 2

Exame – 2017, 2.ª Fase

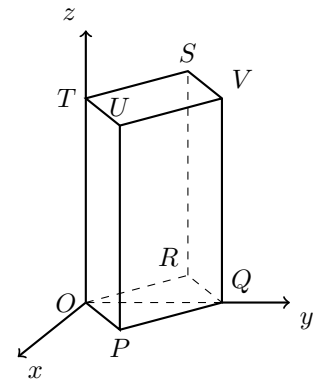
22. Na figura ao lado, está representado, num referencial o.n. $Oxyz$, o prisma quadrangular regular $[OPQRSTUV]$

Sabe-se que:

- a face $[OPQR]$ está contida no plano xOy
- o vértice Q pertence ao eixo Oy e o vértice T pertence ao eixo Oz
- o plano STU tem equação $z = 3$

Uma equação do plano PQV é $x + y = 2$

Determine uma equação vetorial que defina a reta TQ



Exame – 2017, 1.ª Fase

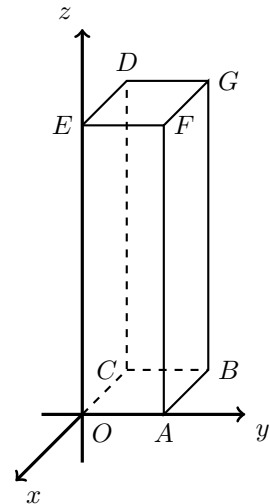
23. Na figura ao lado, está representado, num referencial o.n. $Oxyz$, o prisma quadrangular regular $[OABCDEFG]$

Sabe-se que:

- os pontos C , A e E pertencem aos eixos coordenados Ox , Oy e Oz , respetivamente;
- o ponto A tem coordenadas $(0,2,0)$
- o plano OFB é definido pela equação $3x + 3y - z = 0$

23.1. Determine uma equação do plano paralelo ao plano OFB que passa no ponto D

23.2. Defina a reta OB por uma equação vetorial.



Exame – 2016, Ép. especial



24. Considere, num referencial o.n. $Oxyz$, o plano α definido pela equação $3x + 2y + 4z - 12 = 0$.
Seja C o ponto de coordenadas $(2,1,4)$

Escreva uma equação vetorial da reta perpendicular ao plano α que passa no ponto C

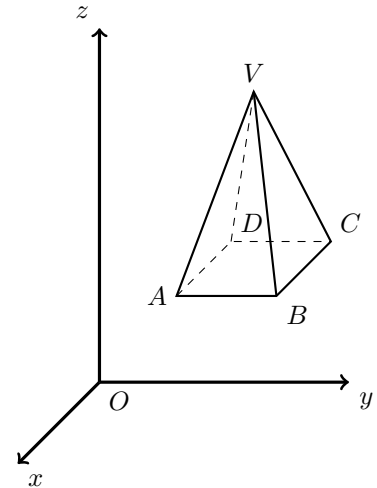
Exame – 2016, 2.ª Fase

25. Na figura ao lado, está representada, num referencial o.n. $Oxyz$, uma pirâmide quadrangular regular $ABCDV$

Sabe-se que:

- a base $[ABCD]$ da pirâmide é paralela ao plano xOy
- o ponto A tem coordenadas $(-1,1,1)$
- o ponto C tem coordenadas $(-3,3,1)$
- o plano BCV é definido pela equação $3y + z - 10 = 0$

Determine as coordenadas do ponto V



Exame – 2016, 1.ª Fase

26. Considere, num referencial o.n. $Oxyz$, o plano β definido pela condição $2x - y + z - 4 = 0$

Considere o ponto $P(-2,1,3a)$, sendo a um certo número real.

Sabe-se que a reta OP é perpendicular ao plano β , sendo O a origem do referencial.

Determine o valor de a

Exame – 2015, Ép. especial

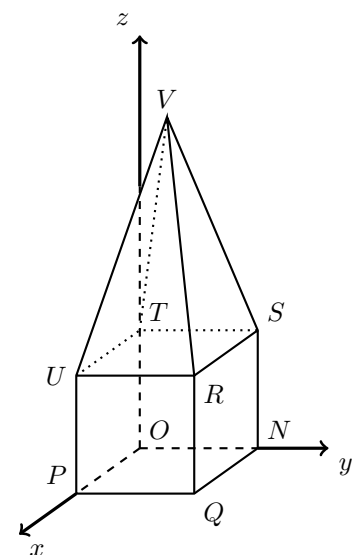
27. Na figura ao lado, está representado, num referencial o.n. $Oxyz$, o poliedro $[NOPQRSTU]$ que se pode decompor num cubo e numa pirâmide quadrangular regular.

Sabe-se que:

- o vértice P pertence ao eixo Ox
- o vértice N pertence ao eixo Oy
- o vértice T pertence ao eixo Oz
- o vértice R tem coordenadas $(2,2,2)$
- o plano PQV é definido pela equação $6x + z - 12 = 0$

27.1. Determine as coordenadas do ponto V

27.2. Escreva uma equação cartesiana do plano que passa no ponto P e é perpendicular à reta OR



Exame – 2015, 2.ª Fase



28. Considere, num referencial o.n. $Oxyz$, os pontos $A(0,0,2)$ e $B(4,0,0)$
 Considere o plano α de equação $x - 2y + z + 3 = 0$

Escreva uma equação do plano que passa no ponto A e é paralelo ao plano α

Exame – 2015, 1.ª Fase

29. Considere, num referencial o.n. $Oxyz$, o ponto A , de coordenadas $(1,0,3)$, e o plano α , definido por $3x + 2y - 4 = 0$

Seja β um plano perpendicular ao plano α e que passa pelo ponto A

Qual das condições seguintes pode definir o plano β ?

- (A) $3x + 2y - 3 = 0$ (B) $2x - 3y - z + 1 = 0$
 (C) $2x - 3y + z = 0$ (D) $3x + 2y = 0$

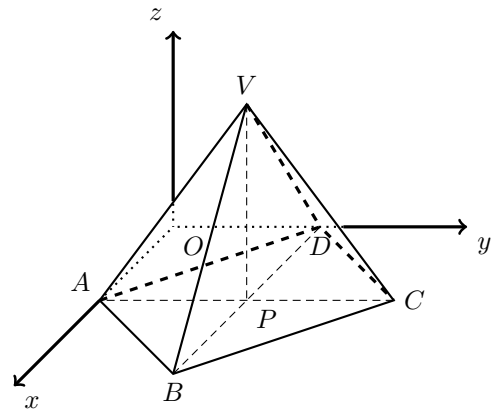
Exame – 2014, 2.ª Fase

30. Na figura ao lado, está representada, num referencial o.n. $Oxyz$, uma pirâmide quadrangular regular $[ABCDV]$, cuja base está contida no plano xOy e cujo vértice V tem cota positiva.

O ponto P é o centro da base da pirâmide.

Admita que:

- $\overline{AV} = 10$
- o vértice A pertence ao eixo Ox e tem abscissa igual a 6
- o vértice V tem abscissa e ordenada iguais a 6



30.1. Mostre que o vértice V tem cota igual a 8

30.2. Seja M o ponto médio da aresta $[BV]$
 Determine uma equação vetorial da reta CM

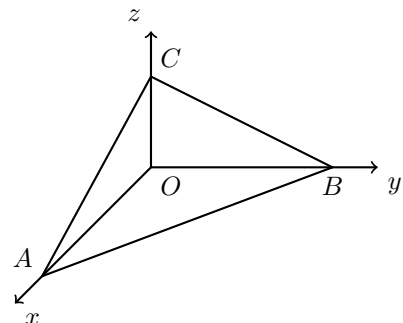
30.3. Determine uma equação cartesiana do plano que passa no ponto P e que é perpendicular à aresta DV

Teste Intermédio 12.º ano – 30.04.2014

31. Na figura ao lado, em cima, está representada, num referencial o.n. $Oxyz$, parte do plano ABC , de equação $x + y + 2z = 12$

Tal como a figura sugere, A , B e C são os pontos de interseção deste plano com os eixos coordenados.

Determine uma equação cartesiana do plano que passa no ponto $D(1,2,3)$ e é paralelo ao plano ABC



Teste Intermédio 11.º ano – 11.03.2014



32. Na figura seguinte, está representado, num referencial o.n. $Oxyz$, o cubo $[ABCDEFGH]$ (o ponto E não está representado na figura).

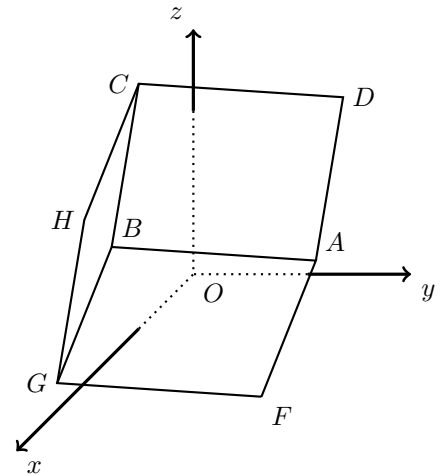
Sabe-se que:

- o ponto F tem coordenadas $(1, 3, -4)$
- o vetor \overrightarrow{FA} tem coordenadas $(2, 3, 6)$

32.1. Escreva uma condição cartesiana que defina o plano FGH

32.2. Sabe-se ainda que a equação $6x + 2y - 3z + 25 = 0$ define o plano HCD

Determine, sem recorrer à calculadora, as coordenadas do ponto E (vértice do cubo, não representado na figura).



Teste Intermédio 11.º ano – 06.03.2013

33. Seja a um número real.

Considere, num referencial o.n. $Oxyz$, a reta s e o plano β definidos, respetivamente, por

$$(x, y, z) = (-1, 0, 3) + k(1, 1, -1), k \in \mathbb{R} \text{ e } 3x + 3y + az = 1$$

Sabe-se que a reta s é paralela ao plano β

Qual é o valor de a ?

- (A) -3 (B) 1 (C) 3 (D) 6

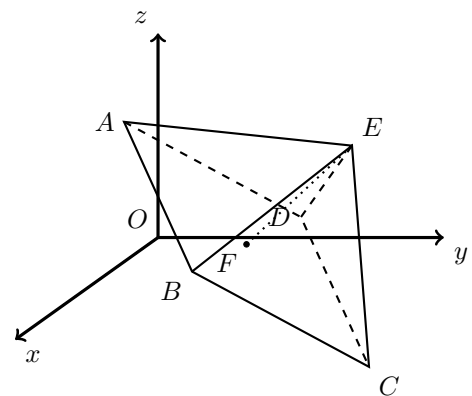
Teste Intermédio 11.º ano – 09.02.2012

34. Na figura ao lado, está representada, num referencial o.n. $Oxyz$, a pirâmide quadrangular regular $[ABCDE]$

Seja F o centro da base da pirâmide.

Sabe-se que:

- o ponto F tem coordenadas $(-2, 1, -1)$
- o vetor \overrightarrow{FE} tem coordenadas $(-1, 2, 2)$
- a reta EA é definida pela condição $(x, y, z) = (-3, 3, 1) + k(1, -5, 1), k \in \mathbb{R}$



Mostre que o plano ABC pode ser definido pela equação $x - 2y - 2z + 2 = 0$

Teste Intermédio 11.º ano – 09.02.2012



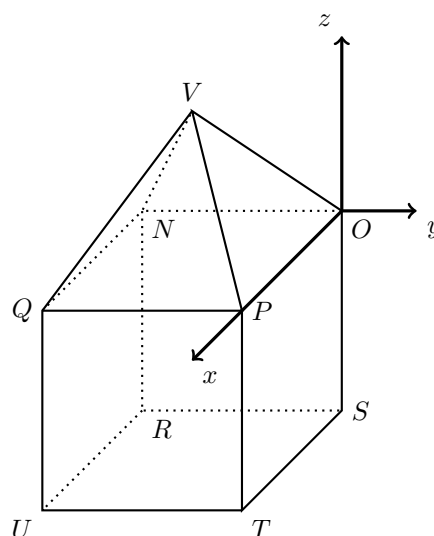
35. Na figura ao lado, está representado, em referencial o.n. $Oxyz$, o poliedro $[VNOPQRST]$, que se pode decompor num cubo e numa pirâmide quadrangular regular.

Sabe-se que:

- a base da pirâmide coincide com a face superior do cubo e está contida no plano xOy
- o ponto P pertence ao eixo Ox
- o ponto U tem coordenadas $(4, -4, -4)$
- o plano QTV é definido pela equação $5x + 2y + 2z = 12$

35.1. Escreva uma condição cartesiana que defina o plano paralelo ao plano QTV e que passa na origem do referencial.

35.2. Determine o volume do poliedro $[VNOPQRST]$



Teste Intermédio 11.º ano – 27.01.2011

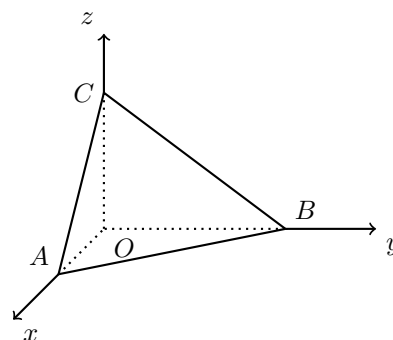
36. Na figura ao lado, está representada, num referencial o.n. $Oxyz$, parte de um plano ABC

Cada um dos pontos A , B e C pertence a um eixo coordenado.

O plano ABC é definido pela equação $6x + 3y + 4z = 12$

Seja r a reta que passa no ponto A e é perpendicular ao plano ABC

Determine uma equação vetorial da reta r



Teste Intermédio 11.º ano – 06.05.2010



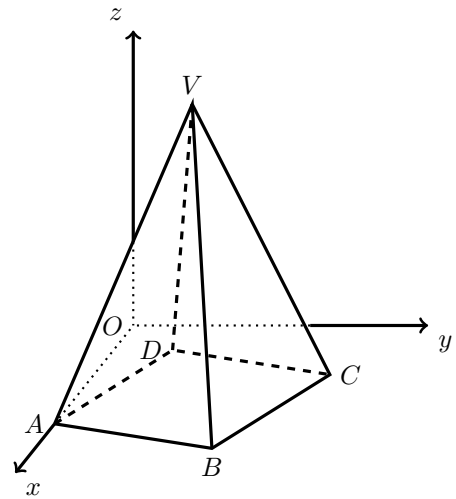
37. Na figura seguinte, está representada, num referencial o.n. $Oxyz$, uma pirâmide quadrangular regular $[ABCDV]$ cuja base está contida no plano xOy

Sabe-se que:

- o ponto A pertence ao eixo Ox
- o ponto B tem coordenadas $(5,3,0)$
- o ponto V pertence ao plano de equação $z = 6$
- $6x + 18y - 5z = 24$ é uma equação do plano ADV

37.1. Determine o volume da pirâmide.

- 37.2. Seja S o ponto de coordenadas $(-1, -15, 5)$
 Seja r a reta que contém o ponto S e é perpendicular ao plano ADV
 Averigue se a reta r contém o ponto B



Teste Intermédio 11.º ano – 27.01.2010

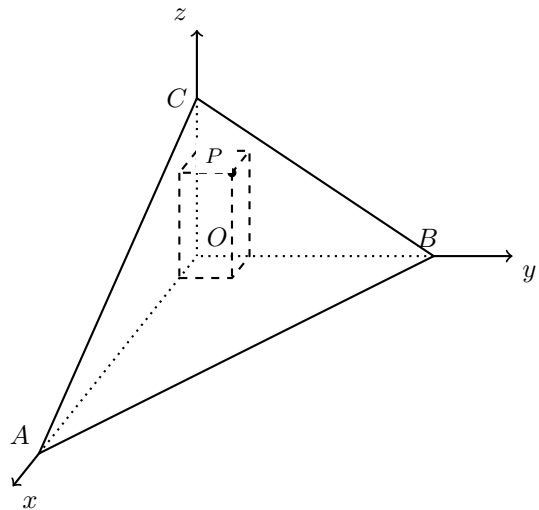
38. Na figura ao lado está representado um referencial o.n. $Oxyz$

Cada um dos pontos A , B e C pertence a um eixo coordenado.

O ponto P pertence ao plano ABC .

O ponto P desloca-se no plano ABC , de tal modo que é sempre vértice de um prisma **quadrangular regular**, em que os restantes vértices pertencem aos planos coordenados.

O plano é definido pela equação $x + 2y + 3z = 9$



- 38.1. Seja a a abcissa do ponto P ($a \in]0,3[$)
 Mostre que o volume do prisma é dado, em função de a , por $3a^2 - a^3$
- 38.2. Seja r a reta que contém o ponto A e é perpendicular ao plano ABC .
 Determine uma equação vetorial da reta r .

Teste Intermédio 11.º ano – 07.05.2009

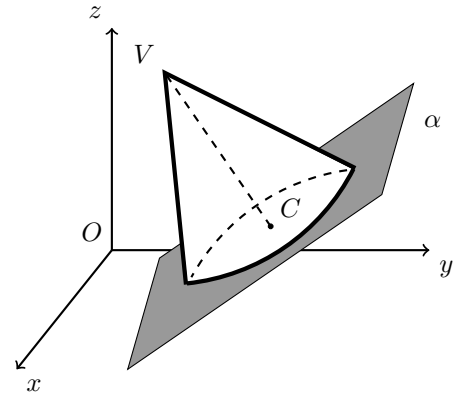


39. Na figura ao lado está representado, em referencial o.n. $Oxyz$, um cone de revolução.

Sabe-se que:

- a base do cone está contida no plano α de equação $x + 2y - 2z = 11$
- o vértice V do cone tem coordenadas $(1, 2, 6)$
- o ponto C é o centro da base do cone

- 39.1. Determine uma equação do plano γ que contém o vértice do cone e que é paralelo ao plano α
- 39.2. Seja β o plano definido pela equação $2x - y + z = 3$. Averigue se os planos α e β são perpendiculares.



Teste Intermédio 11.º ano – 29.01.2009

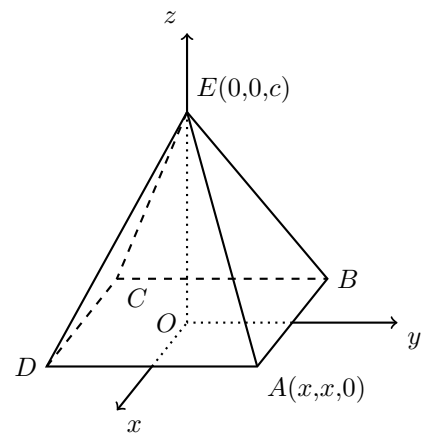
40. Na figura seguinte está representada, em referencial o.n. $Oxyz$, uma pirâmide quadrangular.

Admita que o vértice E se desloca no semieixo positivo Oz , entre a origem e o ponto de cota 6, nunca coincidindo com qualquer um destes dois pontos.

Com o movimento do vértice E , os outros quatro vértices da pirâmide deslocam-se no plano xOy , de tal forma que:

- a pirâmide permanece sempre regular
- o vértice A tem sempre abcissa igual à ordenada
- sendo x a abcissa de A e sendo c a cota de E , tem-se sempre

$$x + c = 6$$



Admita que $x = 1$. Indique, para este caso, as coordenadas dos pontos A , B e E e determine uma equação cartesiana do plano ABE .

Teste Intermédio 11.º ano – 06.05.2008

41. Num referencial o. n. $Oxyz$, sejam α e β os planos definidos pelas equações:

$$\alpha : x + y - z = 1 \quad \text{e} \quad \beta : 2x + 2y - 2z = 1$$

A intersecção dos planos α e β é

- (A) o conjunto vazio (B) um ponto (C) uma reta (D) um plano

Teste Intermédio 11.º ano – 24.01.2008



42. Considere, em referencial o.n. $Oxyz$, o ponto $P(0,4,3)$

Seja α o plano que contém o ponto P e é perpendicular à reta de equação vetorial

$$(x,y,z) = (0,1,-3) + k(1,0,2), k \in \mathbb{R}$$

Determine a área da secção produzida pelo plano α na esfera definida pela condição

$$(x+2)^2 + (y-1)^2 + (z-4)^2 \leq 3$$

Sugere-se que:

- Determine uma equação do plano α .
- Mostre que o centro da esfera pertence ao plano α .
- Atendendo ao ponto anterior, determine a área da secção.

Teste Intermédio 11.º ano – 10.05.2007

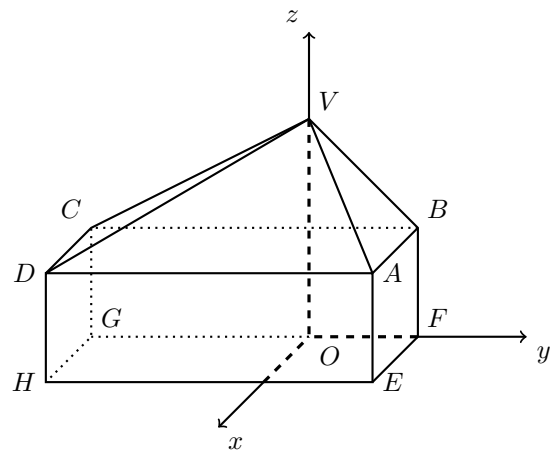
43. Na figura ao lado está representado, em referencial o.n. $Oxyz$, um sólido formado por um paralelepípedo retângulo $[ABCDEFGH]$ e uma pirâmide $[ABCDV]$.

A base $[EFGH]$ do paralelepípedo está contida no plano xOy e a base da pirâmide $[ABCD]$ coincide com a face superior do paralelepípedo.

A aresta $[GF]$ está contida no eixo Oy .

O ponto A tem coordenadas $(1,1,1)$ e o ponto H tem coordenadas $(1,-2,0)$

Mostre que uma equação do plano AGH é $y - 3z + 2 = 0$



Exame – 2001, Prova de reserva (cód. 135)

44. Considere duas retas distintas, r e s , perpendiculares a um mesmo plano.

Qual das seguintes afirmações é verdadeira ?

- (A) r é perpendicular a s (B) r e s são concorrentes, mas não perpendiculares
 (C) r é paralela a s (D) r e s não são coplanares

Exame – 2001, Ép. especial (cód. 135)

45. Considere, num referencial o.n. $Oxyz$, um plano α de equação $x + 2y - z = 2$

Seja β o plano que é paralelo a α e que contém o ponto $(0,1,2)$

Qual das condições seguintes é uma equação do plano β ?

- (A) $x + 2y - z = 1$ (B) $x + z = 2$ (C) $-x - 2y + z = 0$ (D) $x - y + z = 1$

Exame – 2001, 2.ª fase (cód. 135)

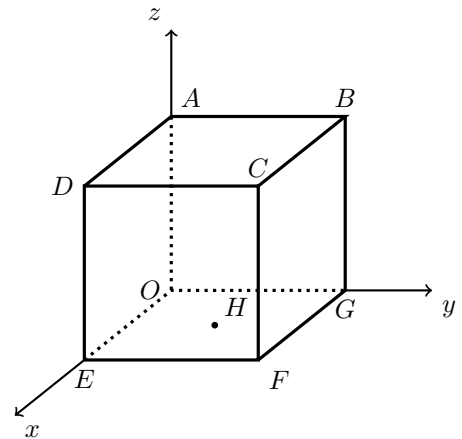


46. Na figura ao lado está representado, em referencial o.n. $Oxyz$, um cubo.

- O vértice O é a origem do referencial
- O vértice A pertence ao eixo Ox
- O vértice G pertence ao eixo Oy
- O vértice E pertence ao eixo Oz
- H é o centro da face $[OGFE]$
- Uma equação do plano que contém os pontos D , B e H é $x + y = 10$

Qual é a medida da aresta do cubo?

- (A) 5 (B) 10 (C) $5\sqrt{2}$ (D) $10\sqrt{2}$



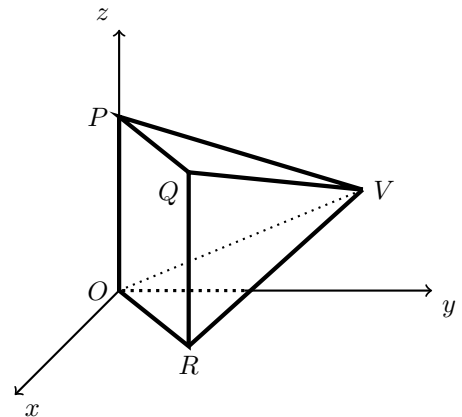
Exame – 2001, 1.ª fase - 1.ª chamada (cód. 135)

47. Na figura seguinte está representada, em referencial o.n. $Oxyz$, uma pirâmide quadrangular regular.

- O vértice O é a origem do referencial
- O vértice P pertence ao eixo Oz
- O vértice R pertence ao plano xOy
- O vértice V tem coordenadas $(-2, 11, 5)$

Uma equação vetorial da reta que contém a altura da pirâmide é $(x, y, z) = (7, -1, 5) + k(6, -8, 0)$, $k \in \mathbb{R}$

- 47.1. Mostre que a base da pirâmide está contida no plano de equação $3x - 4y = 0$
- 47.2. Justifique que o centro da base da pirâmide é o ponto de coordenadas $(4, 3, 5)$



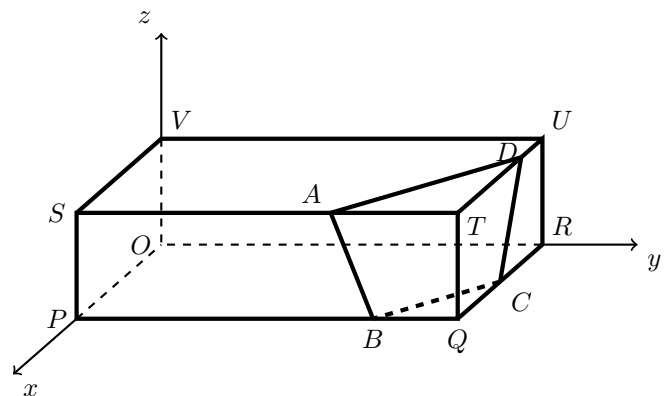
Exame – 2001, Prova Modelo (cód. 135)
Exame – 2000, 2.ª Fase (cód. 135)

48. Num referencial o.n. $Oxyz$, considere um paralelepípedo retângulo $[OPQRSTUV]$

Os pontos P , R e V pertencem aos semi-eixos positivos Ox , Oy e Oz , respetivamente.

O quadrilátero $[ABCD]$ é a secção obtida no paralelepípedo pelo plano de equação $2x + 3y + z = 22$, que é perpendicular à reta OT

O ponto R tem ordenada 6



- 48.1. Justifique que o ponto T tem coordenadas $(4, 6, 2)$
- 48.2. Determine uma equação do plano que é paralelo ao plano ABC e que contém o ponto Q

Exame – 2000, Prova 2 para Militares (cód. 135)



49. Num referencial o.n. $Oxyz$, a condição

$$(x - 1)^2 + (y - 1)^2 + (z - 1)^2 = 25 \wedge x = y$$

define

- (A) uma circunferência (B) um ponto
(C) um segmento de reta (D) o conjunto vazio

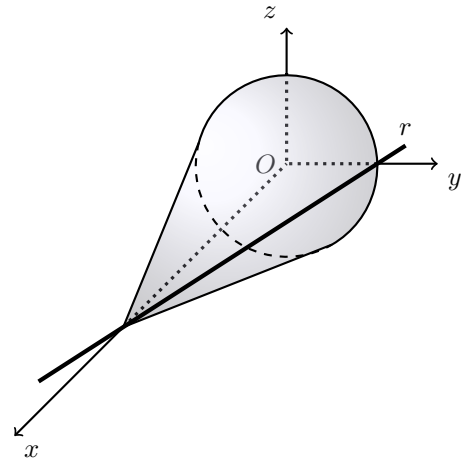
Exame – 2000, Prova para Militares (cód. 135)
Exame – 2000, Ép. Especial (cód. 135)

50. Na figura ao lado está representado em referencial o.n. $Oxyz$, um cone cuja base está contida no plano yOz e cujo vértice pertence ao semieixo positivo Ox

A base tem raio 3 e centro em O , origem do referencial.

A reta r , de equação $(x,y,z) = (0,3,0) + k(3, -1,0), k \in \mathbb{R}$, contém uma geratriz do cone.

Determine uma equação do plano que contém o vértice do cone e é perpendicular à reta r



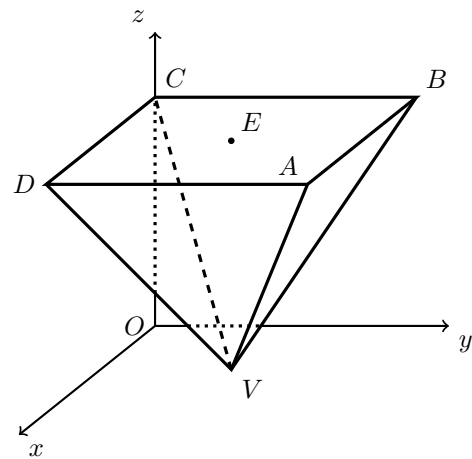
Exame – 2000, Ép. Especial (cód. 135)
Exame – 2000, Prova para Militares (cód. 135)

51. Na figura ao lado está representada, em referencial o.n. $Oxyz$, uma pirâmide quadrangular regular.

- A base da pirâmide é paralela ao plano xOy
- O ponto A tem coordenadas $(8,8,7)$
- O ponto B pertence ao plano yOz
- O ponto C pertence ao eixo Oz
- O ponto D pertence ao plano xOz
- O ponto E é o centro da base da pirâmide
- O vértice V da pirâmide pertence ao plano xOy

Seja α o plano que contém o ponto E e que é paralelo ao plano AVB

Mostre que o eixo Ox está contido no plano α



Exame – 2000, Ép. Especial (setembro) (cód. 135)
Exame – 1999, Prova de reserva (cód. 135)

52. Num referencial o.n. $Oxyz$, considere o plano α , de equação $x = y$

Qual das seguintes pontos é o simétrico do ponto $P(1,0,0)$, em relação ao plano α ?

- (A) $A(-1,0,0)$ (B) $B(1, -1,0)$ (C) $C(1,0,1)$ (D) $D(0,1,0)$

Exame – 2000, 1.ª fase - 2.ª chamada (cód. 135)



53. Considere dois planos concorrentes α e β
 Sejam \vec{a} e \vec{b} vetores normais aos planos α e β , respetivamente.
 Seja \vec{r} um vetor com a direção da reta de interseção dos planos α e β

Qual das afirmações seguintes é verdadeira?

- (A) \vec{r} é paralelo a \vec{a} e \vec{r} é paralelo a \vec{b} (B) \vec{r} é paralelo a \vec{a} e \vec{r} é perpendicular a \vec{b}
 (C) \vec{r} é perpendicular a \vec{a} e \vec{r} é paralelo a \vec{b} (D) \vec{r} é perpendicular a \vec{a} e \vec{r} é perpendicular a \vec{b}

Exame – 2000, 1.ª fase - 2.ª chamada (cód. 135)

54. Considere, num referencial o.n. $Oxyz$, dois planos concorrentes, de equações

$$x - y + 3z = 1 \quad \text{e} \quad x + y - 7z = 7$$

Seja r a reta de interseção dos dois planos.
 Qual dos pontos seguintes pertence à reta r ?

- (A) $(5,5,0)$ (B) $(1,0,0)$ (C) $C(0,0,-1)$ (D) $D(4,3,0)$

Exame – 1999, Prova para Militares (cód. 135)

55. Considere, num referencial o. n. $Oxyz$, os pontos $A(2,3,10)$ e $B(10,13,25)$
 Um tiro é disparado de A , de tal forma que o projétil passa pelo ponto B
 Pretende-se atingir um alvo situado no ponto $C(98,123,190)$ e sabemos que, se o projétil seguir uma trajetória retilínea, o alvo é atingido.

Justifique que existe um e um só plano α que contém a origem do referencial e os pontos A , B e C
 Averigue se esse plano é perpendicular ao plano xOy

Exame – 1999, Prova para Militares (cód. 135)

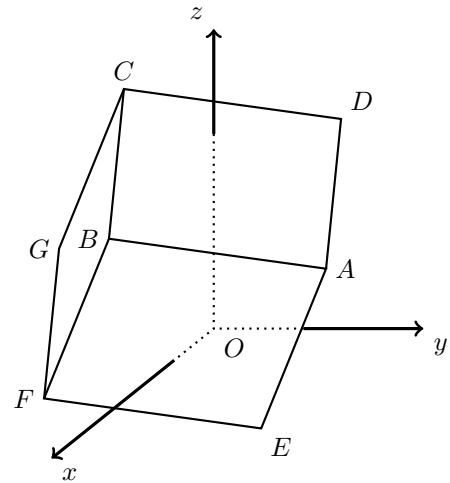
56. Na figura ao lado, está representado, num referencial o.n. $Oxyz$

Sabe-se que:

- $[ABCD]$ é uma face do cubo
- $[EFGH]$ é a face oposta à face $[ABCD]$
 (o ponto H não está representado na figura)
- $[AE]$, $[BF]$, $[CG]$ e $[DH]$ são quatro arestas do cubo
- O ponto A tem coordenadas $(3,5,3)$
- O ponto D tem coordenadas $(-3,3,6)$
- O ponto E tem coordenadas $(1,2,-3)$

O ponto P é o ponto de interseção do eixo Oz com a face $[ABCD]$

Determine as coordenadas do ponto P



Exame – 1999, Época Especial (cód. 135)



57. Sejam α e β dois planos perpendiculares.
Qual das afirmações seguintes é verdadeira?

- (A) Qualquer reta paralela a α é paralela a β
 (B) Qualquer reta paralela à intersecção de α e β é paralela a β
 (C) Qualquer reta perpendicular a α é perpendicular a β
 (D) Qualquer reta perpendicular à intersecção de α e β é perpendicular a β

Exame – 1999, 1.ª fase - 2.ª chamada (cód. 135)

58. Na figura ao lado está representado um cubo, em referencial o.n. $Oxyz$

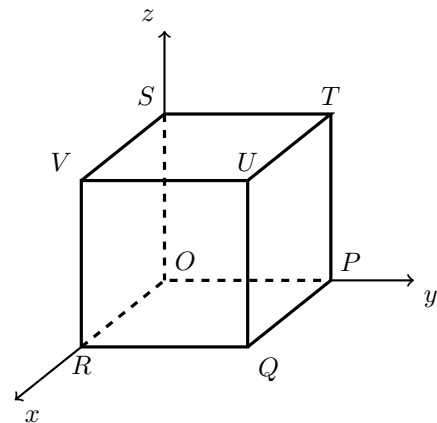
Sabe-se que:

- a face $[OPQR]$ está contida no plano xOy
- a face $[OSVR]$ está contida no plano xOz
- a face $[OSTP]$ está contida no plano yOz
- uma equação do plano VTQ é $x + y + z = 6$

58.1. Mostre que o volume do cubo é 27

58.2. Seja α o plano que contém o ponto S e é paralelo ao plano VTQ

Prove que a reta RP está contida em α



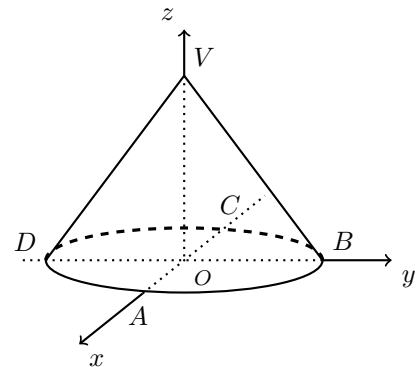
Exame – 1999, 1.ª fase - 2.ª chamada (cód. 135)

59. Na figura seguinte está representado, em referencial o.n. $Oxyz$, um cone de revolução.

Sabe-se que:

- A base do cone está contida no plano xOy e tem o seu centro na origem do referencial
- $[AC]$ e $[BD]$ são diâmetros da base
- O ponto A pertence ao semieixo positivo Ox
- O ponto B pertence ao semieixo positivo Oy
- O vértice V pertence ao semieixo positivo Oz

Sabendo que uma equação do plano ABV é $4x + 4y + 3z = 12$, mostre que o comprimento do raio da base é 3 e a altura do cone é 4



Exame – 1999, 1.ª fase - 1.ª chamada (cód. 135)

60. Num referencial o.n. $Oxyz$, considere o plano α , de equação $x + y = 4$
O plano α é

- (A) paralelo ao plano xOy (B) perpendicular ao plano xOy
 (C) paralelo ao eixo Ox (D) perpendicular ao eixo Ox

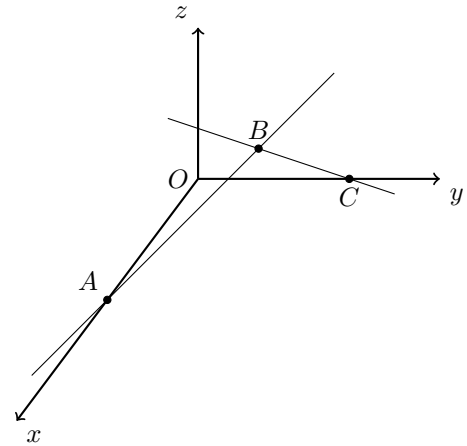
Exame – 1999, Prova Modelo (cód. 135)



61. Considere, num referencial o.n. $Oxyz$

- o ponto $A(10,0,0)$
- o ponto $B(0,2,1)$
- o ponto $C(0,5,0)$
- a reta AB
- a reta BC

Justifique que as retas AB e BC são coplanares e mostre que o plano α por elas definido admite como equação $x + 2y + 6z = 10$



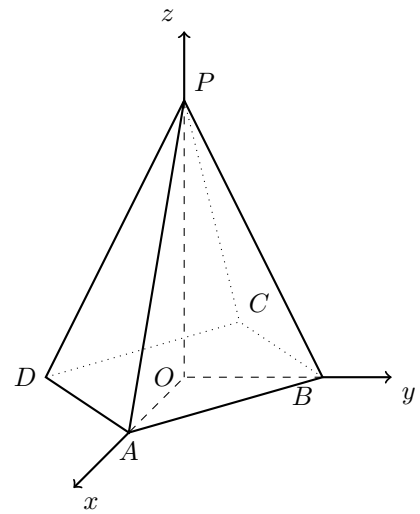
Exame – 1999, Prova Modelo (cód. 135)

62. A figura ao lado representa uma pirâmide quadrangular regular, em referencial o.n. $Oxyz$

- A base da pirâmide é um quadrado contido no plano xOy
- Os pontos A e C pertencem ao eixo Ox
- Os pontos B e D pertencem ao eixo Oy
- O ponto P pertence ao eixo Oz

62.1. Sabendo que uma equação do plano ABP é $2x + 2y + z = 6$, determine o volume da pirâmide.

62.2. Justifique que a reta definida pela condição $\frac{x}{2} = \frac{y}{2} = z$ é perpendicular ao plano ABP e contém a origem do referencial.



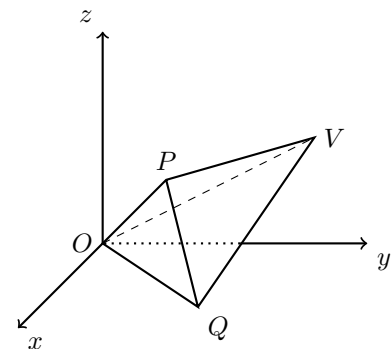
Formulário: Volume da Pirâmide = $\frac{1}{3} \times \text{Área da Base} \times \text{Altura}$

Exame – 1998, Prova para militares (cód. 135)

63. Considere, num referencial o.n. $Oxyz$, uma pirâmide triangular não regular $[OPQV]$

Tem-se que:

- O vértice O da pirâmide é a origem do referencial
- O vértice V tem coordenadas $(0,4,2)$
- O vértice Q pertence ao plano xOy
- Uma equação do plano OPQ é $x - y = 0$
- Uma equação do plano PQV é $x + y + z = 6$
- Uma equação do plano OPV é $x + y - 2z = 0$



63.1. Mostre que o ponto P tem coordenadas $(2,2,2)$ e que o ponto Q tem coordenadas $(3,3,0)$

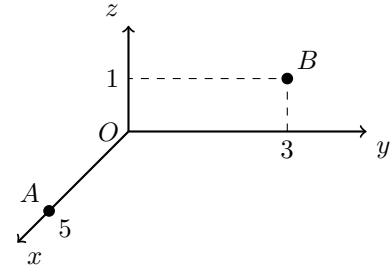
63.2. Justifique que a reta PV é perpendicular ao plano OPQ

Exame – 1998, Prova de reserva (cód. 135)



64. Considere, num referencial o.n. $Oxyz$, os pontos $A(5,0,0)$ e $B(0,3,1)$

Mostre que a reta AB está contida no plano de equação $x + 2y - z = 5$



Exame – 1998, 2.ª fase (cód. 135)

65. Considere, num referencial o.n. $Oxyz$:

- o plano α , de equação $2x + 2y + 2z = 5$
- a reta r , definida pela condição $x = y = z$

Qual é a posição relativa da reta r e do plano α ?

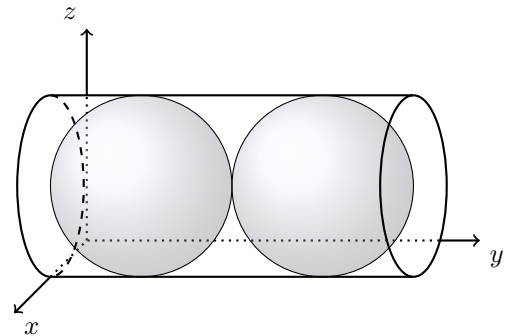
- (A) r é perpendicular a α (B) r e α são concorrentes, mas não perpendiculares
- (C) r é estritamente paralela a α (D) r está contida em α

Exame – 1998, 1.ª fase - 2.ª chamada (cód. 135)

66. Na figura abaixo está representada, em referencial o.n. $Oxyz$, uma caixa cilíndrica construída num material de espessura desprezável.

A caixa contém duas bolas encostadas uma à outra e às bases da caixa cilíndrica.

- O cilindro tem uma das bases no plano xOz
- O centro dessa base é o ponto de coordenadas $(3,0,3)$
- A outra base está contida no plano de equação $y = 12$
- As bolas são esferas de raio igual a 3
- Os diâmetros das esferas e das bases do cilindro são iguais
- A superfície esférica correspondente à bola mais afastada do plano tem centro no ponto $(3,9,3)$ e o ponto $(1,8,1)$ pertence a essa superfície esférica.



Escreva uma equação do plano tangente, no ponto $(1,8,1)$, à superfície esférica referida.

Nota: um plano tangente a uma superfície esférica é perpendicular ao raio relativo ao ponto de tangência.

Exame – 1998, 1.ª fase - 2.ª chamada (cód. 135)

67. Dois planos α e β são estritamente paralelos. Qual das afirmações seguintes é verdadeira?

- (A) Qualquer reta contida em α é paralela a qualquer reta contida em β
- (B) Há retas contidas em α que intersectam β
- (C) Há retas perpendiculares a α que não são perpendiculares a β
- (D) Dada uma reta contida em α existem em β infinitas retas que lhe são paralelas

Exame – 1998, Prova Modelo (cód. 135)



68. Na figura ao lado está representado um cubo, em referencial o.n. $Oxyz$

O vértice O coincide com a origem do referencial.

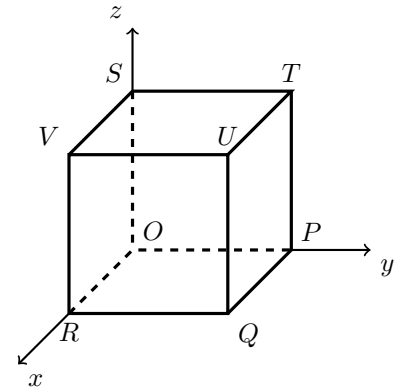
O vértice R pertence ao semieixo positivo Ox

O vértice P pertence ao semieixo positivo Oy

O vértice S pertence ao semieixo positivo Oz

A abscissa do ponto R é 2

Determine uma equação cartesiana do plano PUV

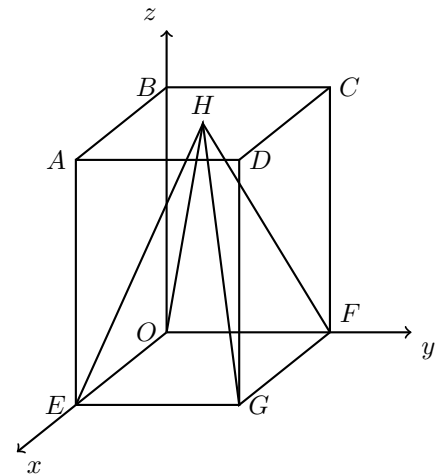


Exame – 1998, Prova Modelo (cód. 135)

69. Na figura ao lado estão representados em referencial o.n. $Oxyz$, um prisma quadrangular regular e uma pirâmide cuja base $[OFGE]$ coincide com a do prisma e está assente no plano xOy . O vértice da pirâmide coincide com o centro da base superior do prisma.

O ponto G tem coordenadas $(4,4,0)$ e o ponto H tem coordenadas $(2,2,6)$

Escreva uma equação cartesiana do plano OEH



Exame – 1997, Prova para militares (cód. 135)

70. Indique qual dos pares de equações seguintes define, num referencial o.n. $Oxyz$ um par de planos perpendiculares.

(A) $x + y = 3$ e $x + y = 0$

(B) $-x + y - z = 1$ e $3x + 2y + 2z = 2$

(C) $x = y$ e $z = 0$

(D) $2x + 2y + z = 9$ e $x - 3z = 0$

Exame – 1997, 2.ª fase (cód. 135)

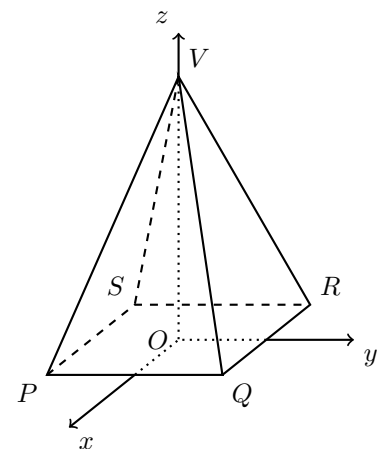
71. Considere, num referencial o.n. $Oxyz$, uma pirâmide regular de base quadrada (ver figura ao lado).

O vértice V da pirâmide pertence ao semieixo positivo Oz e tem cota 6

A base da pirâmide está contida no plano xOy

A aresta $[PQ]$ é paralela ao eixo Oy . O ponto Q tem coordenadas $(2,2,0)$

Mostre que o plano QRV pode ser definido pela equação $3y + z = 6$



Exame – 1997, 1.ª fase - 2.ª chamada (cód. 135)



72. Num referencial o.n. $Oxyz$, os planos α e β são definidos pelas equações:

$$\alpha : x - y + z + \frac{1}{2} = 0 \quad \text{e} \quad \beta : 2x + 2y + 2z + 1 = 0$$

Os planos α e β são:

- | | |
|--------------------------------------|----------------------------|
| (A) Coincidentes | (B) Estritamente paralelos |
| (C) Concorrentes não perpendiculares | (D) Perpendiculares |

Exame – 1997, 1.^a fase - 1.^a chamada (cód. 135)

73. Considere, num referencial o.n. $Oxyz$, um cilindro de revolução como o representado na figura ao lado.
A base inferior do cilindro tem centro na origem O do referencial e está contida no plano xOy

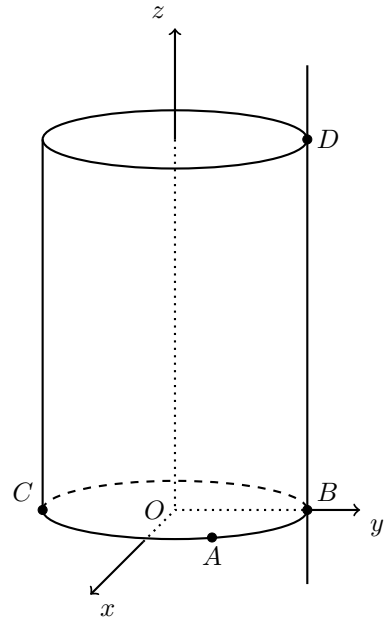
$[BC]$ é um diâmetro da base inferior, contido no eixo Oy .
O ponto C tem coordenadas $(0, -5, 0)$

O ponto A pertence à circunferência que limita a base inferior do cilindro e tem coordenadas $(4, 3, 0)$

A reta r passa no ponto B e é paralela ao eixo Oz

O ponto D pertence à reta r e à circunferência que limita a base superior do cilindro.

Justifique \overrightarrow{AC} que é um vetor perpendicular ao plano ABD
Determine uma equação deste plano.



Exame – 1997, 1.^a fase - 1.^a chamada (cód. 135)

