

Geometria (11.º ano)
Trigonometria

Exercícios de Provas Nacionais e Testes Intermédios - Propostas de resolução



1. Como o ponto A pertence à circunferência de raio 4, centrada na origem e define com a origem e o semieixo positivo Ox um ângulo de amplitude α , as suas coordenadas são $(4 \cos \alpha, 4 \sin \alpha)$.

Assim temos que:

- $\overline{AB} = 4 \sin \alpha$
- $\overline{OB} = -4 \cos \alpha$, porque $\alpha \in \left] \frac{\pi}{2}, \pi \right[$, logo $\cos \alpha < 0$
- $\overline{BD} = 2 \overline{OB} = 2 \times (-4 \cos \alpha) = -8 \cos \alpha$

E assim a área do quadrilátero $[ABCD]$ pode ser obtida como a soma das áreas dos triângulos $[ABD]$ e $[BCD]$, ou o dobro da área de um deles, porque são congruentes:

$$\begin{aligned} A_{[ABCD]} &= A_{[ABD]} + A_{[BCD]} = 2 \times A_{[ABD]} = 2 \times \frac{\overline{BD} \times \overline{AB}}{2} = \overline{BD} \times \overline{AB} = \\ &= -8 \cos \alpha \times 4 \sin \alpha = -32 \sin \alpha \cos \alpha \end{aligned}$$

Exame – 2024, Ép. especial (adaptado)

2. Como o setor circular correspondente ao ângulo orientado AOB , ou seja ao ângulo de amplitude α , e tem raio 2, vem que sua área é:

$$A_{AOB} = \frac{\alpha \times 2^2}{2} = \alpha \times 2 = 2\alpha$$

Relativamente aos pontos B , C e D sabemos que:

- como o ponto B está sobre a circunferência de raio 2, as suas coordenadas, em função de α , são $(2 \cos \alpha, 2 \sin \alpha)$;
- como o ponto C é simétrico de B relativamente ao eixo Oy , as suas coordenadas, em função de α , são $(-2 \cos \alpha, 2 \sin \alpha)$;
- como o ângulo ODC é reto, e o ponto D pertence ao eixo Ox , as suas coordenadas, em função de α , são $(-2 \cos \alpha, 0)$;

Logo, vem que:

- $\overline{BC} = x_B + |x_C| = 2 \cos \alpha + |-2 \cos \alpha| = 4 \cos \alpha$
- $\overline{CD} = y_C = 2 \sin \alpha$
- $\overline{OD} = |x_D| = |-2 \cos \alpha| = 2 \cos \alpha$

Pelo que a área do trapézio $[OBCD]$ é:

$$A_{[OBCD]} = \frac{\overline{BC} + \overline{OD}}{2} \times \overline{CD} = \frac{4 \cos \alpha + 2 \cos \alpha}{2} \times 2 \sin \alpha = 6 \cos \alpha \sin \alpha$$

Logo, como a área da região sombreada, A , é dada, em função de α é dada pela soma das duas áreas, temos que:

$$A = A_{AOB} + A_{[OBCD]} = 2\alpha + 6 \cos \alpha \sin \alpha = 2\alpha + 6 \sin \alpha \cos \alpha$$

Exame – 2024, 1.ª Fase (adaptado)



3. Designando por P o ponto pertencente ao segmento de reta $[AB]$ com ordenada igual à do ponto C , temos que $[CP]$ é a altura do triângulo $[ABC]$, relativamente à base $[AB]$, e assim, vem que:

- $\overline{AB} = \operatorname{tg} \alpha$
- $\operatorname{tg}^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Leftrightarrow \overline{AB}^2 + 1 = \frac{1}{\left(\frac{1}{3}\right)^2} \Leftrightarrow \overline{AB}^2 = \frac{1}{\frac{1}{9}} - 1 \Leftrightarrow \overline{AB}^2 = 9 - 1 \Leftrightarrow \overline{AB} = \sqrt{8} \Leftrightarrow \overline{AB} = 2\sqrt{2}$
- $\overline{CP} = x_A - x_C = 1 - \cos \alpha = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

E assim, a área do triângulo $[ABC]$, é:

$$A_{[ABC]} = \frac{\overline{AB} \times \overline{CP}}{2} = \frac{2\sqrt{2} \times \frac{2}{3}}{2} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

Exame – 2023, Ép. especial

4. Como a reta AB é tangente à semicircunferência no ponto T , e o segmento de reta $[OT]$ é um raio, então as retas AB e OT são perpendiculares, pelo que os triângulos $[OTA]$ e $[OTB]$ são retângulos em T , cujas hipotenusas são, respetivamente, os lados $[OA]$ e $[OB]$.

Como $\overline{OT} = 2$ e $T\hat{O}B = \frac{\pi}{2} - \alpha$, recorrendo à definição de cosseno, temos:

- $\cos \alpha = \frac{\overline{OT}}{\overline{OA}} \Leftrightarrow \cos \alpha = \frac{2}{\overline{OA}} \Leftrightarrow \overline{OA} = \frac{2}{\cos \alpha}$
- $\cos T\hat{O}B = \frac{\overline{OT}}{\overline{OB}} \Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \frac{2}{\overline{OB}} \Leftrightarrow \overline{OB} = \frac{2}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)} = \frac{2}{\operatorname{sen} \alpha}$

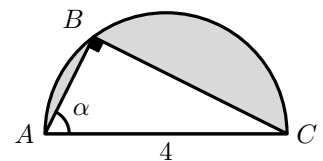
Assim, determinando a área do triângulo, vem:

$$A_{[ABC]} = \frac{2 \times \overline{OA} \times \overline{OB}}{2} = \overline{OA} \times \overline{OB} = \frac{2}{\cos \alpha} \times \frac{2}{\operatorname{sen} \alpha} = \frac{4}{\operatorname{sen} \alpha \cdot \cos \alpha}$$

Exame – 2023, 2.ª Fase (adaptado)

5. Como qualquer triângulo inscrito numa semicircunferência é retângulo, temos que a medida da hipotenusa do triângulo é $\overline{AC} = 4$, e recorrendo às definições de seno e cosseno, para determinar as medidas da base (\overline{BC}) e da altura (\overline{AB}), vem:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} \alpha &= \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} \Leftrightarrow \operatorname{sen} \alpha = \frac{\overline{BC}}{4} \Leftrightarrow \overline{BC} = 4 \operatorname{sen} \alpha \\ \cos \alpha &= \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} \Leftrightarrow \cos \alpha = \frac{\overline{AB}}{4} \Leftrightarrow \overline{AB} = 4 \cos \alpha \end{aligned}$$



Como o raio da circunferência é metade do respetivo diâmetro, $r = \frac{\overline{AC}}{2} = \frac{4}{2} = 2$, temos que a área da região é a diferença da área do semicírculo e da área do triângulo:

$$A = \frac{A_o}{2} - A_{[ABC]} = \frac{\pi r^2}{2} - \frac{\overline{BC} \times \overline{AB}}{2} = \frac{\pi(2)^2}{2} - \frac{4 \operatorname{sen} \alpha \times 4 \cos \alpha}{2} = \frac{4\pi}{2} - 8 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha = 2\pi - 8 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha$$

Exame – 2021, Ép. especial (adaptado)



6. Como $\cos \alpha = \frac{1}{2}$, temos que:

$$\operatorname{tg}^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} \Leftrightarrow \operatorname{tg}^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\frac{1}{4}} \Leftrightarrow \operatorname{tg}^2 \alpha = 4 - 1 \Leftrightarrow \operatorname{tg} \alpha = \pm \sqrt{3}$$

Como $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ então $\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{3}$, e como o declive da reta s é a tangente da inclinação $m_s = \operatorname{tg} \alpha = \sqrt{3}$, e a reta s passa pela origem, é definida pela equação: $y = \sqrt{3}x$.

Desta forma as coordenadas do ponto B são:

$$\begin{aligned} \begin{cases} y = \frac{\sqrt{3}}{2}x + 1 \\ y = \sqrt{3}x \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{3}x = \frac{\sqrt{3}}{2}x + 1 \\ y = \sqrt{3}x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{3}x - \frac{\sqrt{3}}{2}x = 1 \\ y = \sqrt{3}x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\sqrt{3}}{2}x = 1 \\ y = \sqrt{3}x \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{\sqrt{3}} \\ y = \sqrt{3} \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2\sqrt{3}}{3} \\ y = 2 \end{cases} \end{aligned}$$

Temos ainda que a abcissa do ponto A é:

$$\frac{\sqrt{3}}{2}x + 1 = 0 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{2}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow x = -\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

E assim, a área do triângulo $[AOB]$, é:

$$A_{[AOB]} = \frac{|x_A| \times y_B}{2} = \frac{\frac{2\sqrt{3}}{3} \times 2}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

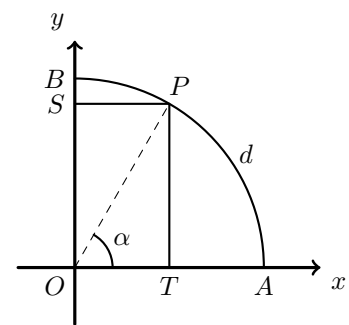
Exame – 2022, 2.^a Fase

7. Considerando α como a amplitude do ângulo AOP , temos que as coordenadas do ponto P são:

$$P(r \cos \alpha, r \operatorname{sen} \alpha)$$

E assim, como $\overline{OA} = \overline{OB} = r$, $\overline{OT} = x_P = r \cos \alpha$ e $\overline{OS} = y_P = r \operatorname{sen} \alpha$, vem que:

$$\begin{aligned} \overline{BS} + \overline{TA} &= \overline{OB} - \overline{OS} + \overline{OA} - \overline{OT} = r - r \cos \alpha + r - r \operatorname{sen} \alpha = \\ &= r(1 - \cos \alpha + 1 - \operatorname{sen} \alpha) = r(2 - \operatorname{sen} \alpha - \cos \alpha) \end{aligned}$$



Como d o comprimento do arco AP , definido pelo ângulo α , e o perímetro da circunferência é $2\pi r$, correspondente a um ângulo de amplitude 2π radianos, então podemos identificar uma relação entre α , r e d :

$$\frac{\alpha}{2\pi} = \frac{d}{2\pi r} \Leftrightarrow \alpha = \frac{2\pi \times d}{2\pi \times r} \Leftrightarrow \alpha = \frac{d}{r}$$

E assim, temos que:

$$\overline{BS} + \overline{TA} = r \left(2 - \operatorname{sen} \left(\frac{d}{r} \right) - \cos \left(\frac{d}{r} \right) \right)$$

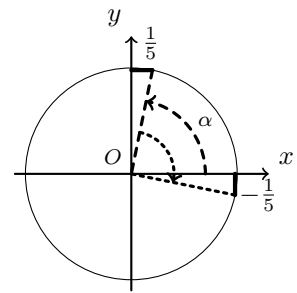
Exame – 2021, Ép. especial



8. Representando no círculo trigonométrico um ângulo de amplitude $\alpha \in]0, \frac{\pi}{2}[$, tal que, $\operatorname{sen} \alpha = -\frac{1}{5}$ (como na figura ao lado), podemos verificar que $\operatorname{sen} \left(\alpha - \frac{\pi}{2} \right) = -\cos \alpha$, ou seja, $\cos \alpha = -\left(-\frac{1}{5} \right) = \frac{1}{5}$

E, pela fórmula fundamental da trigonometria, vem:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}^2 \alpha + \left(\frac{1}{5} \right)^2 &= 1 \Leftrightarrow \operatorname{sen}^2 \alpha = 1 - \frac{1}{25} \Leftrightarrow \operatorname{sen}^2 \alpha = \frac{24}{25} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \operatorname{sen} \alpha &= \pm \sqrt{\frac{24}{25}} \Leftrightarrow \operatorname{sen} \alpha = \pm \frac{\sqrt{24}}{5} \quad \alpha \in]0, \frac{\pi}{2}[\Leftrightarrow \operatorname{sen} \alpha = \frac{\sqrt{24}}{5} \end{aligned}$$



Logo, podemos calcular o valor de $\operatorname{tg} \alpha$:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\frac{\sqrt{24}}{5}}{\frac{1}{5}} = \frac{\sqrt{24}}{1} = \sqrt{24}$$

E, como $\operatorname{tg} \beta = \operatorname{tg} (\beta - \pi)$ e $\operatorname{tg} (-\beta) = -\operatorname{tg} \beta$, temos que:

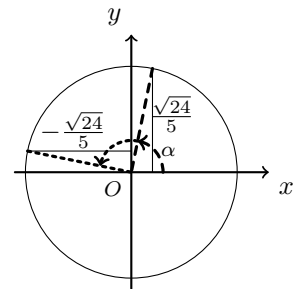
$$\operatorname{tg} (\pi - \alpha) = \operatorname{tg} (\pi - \alpha - \pi) = \operatorname{tg} (-\alpha) = -\operatorname{tg} \alpha = -\sqrt{24}$$

Como $\cos \beta = \cos (\beta + 2\pi)$, logo $\cos \beta = \cos (\beta + 4\pi)$, e assim, temos que:

$$\begin{aligned} \cos \left(-\frac{7\pi}{2} + \alpha \right) &= \cos \left(-\frac{7\pi}{2} + \alpha + 4\pi \right) = \\ &= \cos \left(-\frac{7\pi}{2} + \alpha + \frac{8\pi}{2} \right) = \cos \left(\alpha + \frac{\pi}{2} \right) \end{aligned}$$

Representando no círculo trigonométrico um ângulo de amplitude $\alpha \in]0, \frac{\pi}{2}[$, tal que, $\cos \alpha = \frac{1}{5}$ (como na figura ao lado), podemos verificar que:

$$\cos \left(\alpha + \frac{\pi}{2} \right) = -\operatorname{sen} \alpha = -\frac{\sqrt{24}}{5}$$



E assim, temos que:

$$\operatorname{tg} (\pi - \alpha) + 2 \cos \left(-\frac{7\pi}{2} + \alpha \right) = -\operatorname{tg} \alpha + 2(-\operatorname{sen} \alpha) = -\sqrt{24} + 2 \times \left(-\frac{\sqrt{24}}{5} \right) = -\frac{5\sqrt{24}}{5} - \frac{2\sqrt{24}}{5} = -\frac{7\sqrt{24}}{5}$$

Exame – 2021, 2.ª Fase



9. Como a circunferência tem raio 3 e está centrada na origem, as coordenadas do ponto A são da forma $(3 \cos \alpha, 3 \sin \alpha)$ e como $[AB]$ é um diâmetro da circunferência as coordenadas do ponto B são da forma $(3 \cos(\alpha + \pi), 3 \sin(\alpha + \pi))$.

Assim, considerando o lado $[BC]$ como a base do triângulo, temos que a altura é $2 \times OC$, porque a abscissa do ponto A é simétrica da abscissa dos pontos B e C

Como α é um ângulo do segundo quadrante, então:

- $\sin \alpha > 0$ e $\sin(\alpha + \pi) < 0$, pelo que:

$$\overline{BC} = |3 \sin(\alpha + \pi)| = |-3 \sin \alpha| = 3 \sin \alpha$$

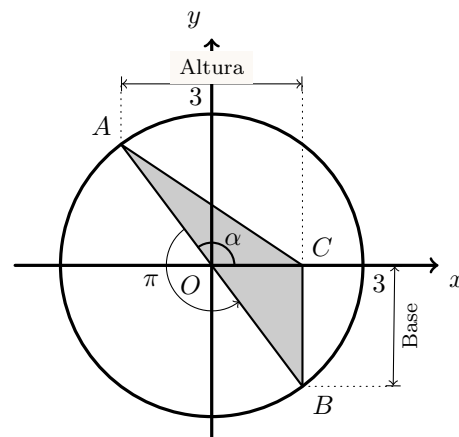
- $\cos \alpha < 0$ e $\cos(\alpha + \pi) > 0$, pelo que:

$$\overline{OC} = |3 \cos(\alpha + \pi)| = |-3 \cos \alpha| = -3 \cos \alpha$$

Assim, temos que a área do triângulo é:

$$A_{[ABC]} = \frac{\overline{BC} \times 2 \times \overline{OC}}{2} = 3 \sin \alpha \times (-3 \cos \alpha) = -9 \sin \alpha \cos \alpha$$

Exame – 2021, 1.ª Fase



10. Como o ponto A está sobre a reta definida pela equação $x = 1$, tangente à circunferência trigonométrica, então a ordenada do ponto A é $y_A = \operatorname{tg} \alpha = a$, sendo α o ângulo definido pelo semieixo positivo Ox e pela semireta \overline{OA}

Como o ponto B pertence à circunferência trigonométrica, tem coordenadas $(\cos \alpha, \sin \alpha)$, ou seja, a abscissa do ponto B é $x_B = \cos \alpha$

Desta forma, como $1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$, $\operatorname{tg} \alpha \neq 0$, e $\cos \alpha \neq 0$, temos que a abscissa do ponto B :

$$1 + a^2 = \frac{1}{x_B^2} \Leftrightarrow x_B^2 = \frac{1}{1 + a^2} \Leftrightarrow x_B = \sqrt{\frac{1}{1 + a^2}} \Leftrightarrow x_B = \frac{1}{\sqrt{1 + a^2}}$$

Resposta: **Opção A**

Exame – 2020, 1.ª Fase

11. Como $\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$, então $\arccos \frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$, e assim:

$$\sin \left(3 \arccos \frac{1}{2} \right) = \sin \left(3 \times \frac{\pi}{3} \right) = \sin(\pi) = 0$$

Resposta: **Opção C**

Exame – 2019, 2.ª Fase



12. Simplificando a equação, temos:

$$2 \cos x + 1 = 0 \Leftrightarrow 2 \cos x = -1 \Leftrightarrow \cos x = -\frac{1}{2}$$

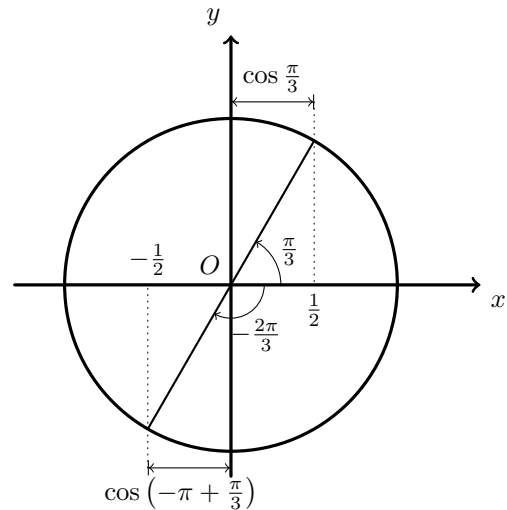
Como $\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$, podemos observar no círculo trigonométrico que:

$$\cos\left(-\pi + \frac{\pi}{3}\right) = -\cos \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$$

Pelo que a solução da equação no intervalo $[-\pi, 0]$ é:

$$x = -\frac{2\pi}{3}$$

Resposta: **Opção B**



Exame – 2019, 1.ª Fase

13. Como a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180° , vem que:

$$\hat{A}CB = 180 - \hat{A}BC - \hat{B}AC = 180 - 81 - 57 = 42^\circ$$

E assim, calculando o valor de \overline{AB} recorrendo à Lei dos senos, e arredondando o resultado às centésimas, temos que:

$$\frac{\text{sen } \hat{A}BC}{\overline{AC}} = \frac{\text{sen } \hat{A}CB}{\overline{AB}} \Leftrightarrow \frac{\text{sen } 81^\circ}{5} = \frac{\text{sen } 42^\circ}{\overline{AB}} \Leftrightarrow \overline{AB} = \frac{5 \times \text{sen } 42^\circ}{\text{sen } 81^\circ} \Rightarrow \overline{AB} \approx 3,39$$

Resposta: **Opção C**

Exame – 2018, 2.ª Fase

14. Considerando que:

- $\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$, temos que $\arcsen(1) = \frac{\pi}{2}$
- $\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{1}{2}$, temos que $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2\pi}{3}$

E assim, vem que:

$$\arcsen(1) + \arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{2} + \frac{2\pi}{3} = \frac{3\pi}{6} + \frac{4\pi}{6} = \frac{7\pi}{6}$$

Resposta: **Opção A**

Exame – 2018, 1.ª Fase



15. Observando que os ângulos AOP e RQO têm a mesma amplitude (porque são ângulos de lados paralelos), relativamente ao triângulo $[PQR]$, vem que:

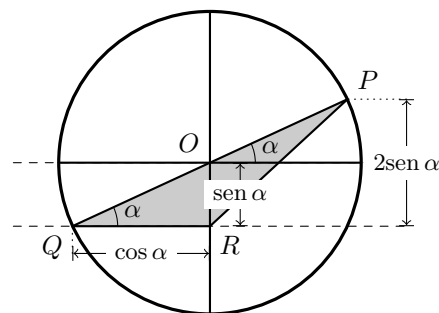
- $\overline{QR} = \cos \alpha$
- $\overline{OR} = \text{sen } \alpha$
- a altura do triângulo, relativa ao lado $[QR]$ é

$$h = 2 \times \overline{OR} = 2 \text{sen } \alpha$$

Desta forma, a área do triângulo é:

$$A_{[PQR]} = \frac{\overline{QR} \times h}{2} = \frac{\cos \alpha \times 2 \text{sen } \alpha}{2} = \frac{2 \text{sen } \alpha \cos \alpha}{2} = \text{sen } \alpha \cos \alpha$$

Resposta: **Opção D**



Exame – 2016, 2.ª Fase (adaptado)

16. Identificando as medidas relevantes para o cálculo da área do trapézio, temos que:

- a base menor é a ordenada do ponto P , ou seja, $\overline{OP} = 1$
- como R é um ponto do quarto quadrante, então temos que $\cos \alpha > 0$, pelo que a altura do trapézio $[OPQR]$ é: $\overline{PQ} = \cos \alpha$
- como R é um ponto do quarto quadrante, então temos que $\text{sen } \alpha < 0$, pelo que a base maior do trapézio $[OPQR]$ é: $\overline{QR} = 1 + (-\text{sen } \alpha) = 1 - \text{sen } \alpha$

Desta forma, a área do trapézio é:

$$\begin{aligned} A_{[OPQR]} &= \frac{\overline{OP} + \overline{QR}}{2} \times \overline{PQ} = \frac{1 + 1 - \text{sen } \alpha}{2} \times \cos \alpha = \frac{2 - \text{sen } \alpha}{2} \times \cos \alpha = \\ &= \frac{2 \cos \alpha - \text{sen } \alpha \cos \alpha}{2} = \cos \alpha - \frac{\text{sen } \alpha \cos \alpha}{2} \end{aligned}$$

Resposta: **Opção D**

Exame – 2016, 1.ª Fase

17. Como na figura está representado o círculo trigonométrico, temos que:

$$\overline{OC} = 1 \alpha, \overline{AB} = \text{sen } \alpha, \overline{OB} = \cos \alpha \text{ e } \text{tg } \alpha = \overline{CD}$$

Temos que a área do quadrilátero $[ABCD]$ pode ser obtida pela diferença das áreas dos triângulos $[OCD]$ e $[OAB]$,

$$A_{[ABCD]} = A_{[OAB]} - A_{[OCD]} = \frac{\overline{OC} \times \overline{CD}}{2} - \frac{\overline{OB} \times \overline{AB}}{2}$$

Assim, vem que:

$$A_{[ABCD]} = \frac{1 \times \text{tg } \alpha}{2} - \frac{\cos \alpha \times \text{sen } \alpha}{2} = \frac{\text{tg } \alpha - \text{sen } \alpha \cos \alpha}{2}$$

Resposta: **Opção B**

Exame – 2015, 1.ª Fase (adaptado)



18. O triângulo $[OBC]$ é retângulo em B , $\overline{OB} = 1$, e $[BC]$ é o cateto oposto ao ângulo α , temos que:

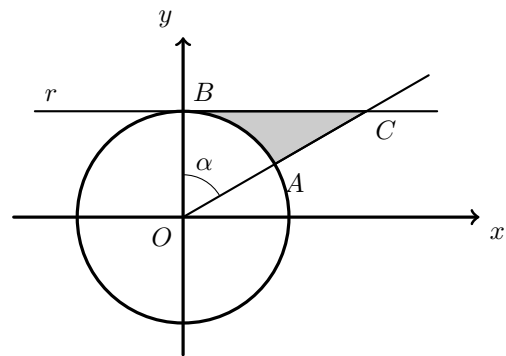
$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\overline{BC}}{\overline{OB}} \Leftrightarrow \operatorname{tg} \alpha = \frac{\overline{BC}}{1} \Leftrightarrow \operatorname{tg} \alpha = \overline{BC}$$

Logo,

$$A_{[OBC]} = \frac{\overline{OB} \times \overline{BC}}{2} = \frac{1 \times \operatorname{tg} \alpha}{2} = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{2}$$

A área do setor circular de centro O , raio 1 e amplitude α (delimitado pelo arco AB) é

$$A = \frac{\alpha \times 1^2}{2} = \frac{\alpha}{2}$$



Como a área da zona sombreada (A_S) pode ser calculada como a diferença entre as áreas do triângulo $[OBC]$ e o setor circular de centro O e delimitado pelo arco AB , temos que

$$A_S = A_{[OBC]} - A = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{2} - \frac{\alpha}{2} = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \alpha}{2}$$

Resposta: **Opção B**

Exame – 2014, Ép. especial

19.

19.1. Como o lado $[PR]$ do triângulo $[PQR]$ é um diâmetro da circunferência e o vértice Q pertence à mesma circunferência, podemos garantir que o triângulo $[PQR]$ é retângulo, sendo $[PR]$ a hipotenusa.

Como a circunferência tem raio 2, vem que $\overline{PR} = 2 \times 2 = 4$, e assim, recorrendo à definição de seno e cosseno temos:

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{\overline{QR}}{\overline{PR}} \Leftrightarrow \operatorname{sen} \alpha = \frac{\overline{QR}}{4} \Leftrightarrow \overline{QR} = 4 \operatorname{sen} \alpha$$

$$\operatorname{cos} \alpha = \frac{\overline{PQ}}{\overline{PR}} \Leftrightarrow \operatorname{cos} \alpha = \frac{\overline{PQ}}{4} \Leftrightarrow \overline{PQ} = 4 \operatorname{cos} \alpha$$

Como os lados $[QR]$ e $[PQ]$ são perpendiculares, temos que:

$$A_{[PQR]} = \frac{\overline{QR} \times \overline{PQ}}{2} = \frac{4 \operatorname{sen} \alpha \times 4 \operatorname{cos} \alpha}{2} = 8 \operatorname{sen} \alpha \operatorname{cos} \alpha$$

Como o triângulo $[PSR]$ é congruente com o triângulo $[PQR]$ (ambos têm 1 ângulo reto e dois lados iguais), vem que:

$$A_{[PQRS]} = A_{[PQR]} + A_{[PSR]} = 2 \times A_{[PQR]} = 2 \times 8 \operatorname{sen} \alpha \operatorname{cos} \alpha = 16 \operatorname{sen} \alpha \operatorname{cos} \alpha$$



19.2. Como $\operatorname{tg} \theta = 2\sqrt{2}$ e $\operatorname{tg}^2 \theta + 1 = \frac{1}{\cos^2 \theta}$, temos que:

$$\begin{aligned} (2\sqrt{2})^2 + 1 &= \frac{1}{\cos^2 \theta} \Leftrightarrow 4 \times 2 + 1 = \frac{1}{\cos^2 \theta} \Leftrightarrow 9 = \frac{1}{\cos^2 \theta} \Leftrightarrow \cos^2 \theta = \frac{1}{9} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \cos \theta = \pm \sqrt{\frac{1}{9}} \Leftrightarrow \cos \theta = \pm \frac{1}{3} \Leftrightarrow \begin{matrix} \Leftrightarrow \cos \theta = \frac{1}{3} \\ \theta \in]0, \frac{\pi}{2}[\end{matrix} \end{aligned}$$

E, pela fórmula fundamental da trigonometria, vem:

$$\sin^2 \theta + \frac{1}{9} = 1 \Leftrightarrow \sin^2 \theta = 1 - \frac{1}{9} \Leftrightarrow \sin^2 \theta = \frac{8}{9} \Leftrightarrow \sin \theta = \pm \sqrt{\frac{8}{9}} \Leftrightarrow \sin \theta = \pm \frac{2\sqrt{2}}{3} \Leftrightarrow \begin{matrix} \Leftrightarrow \sin \theta = \frac{2\sqrt{2}}{3} \\ \theta \in]0, \frac{\pi}{2}[\end{matrix}$$

Finalmente, recorrendo expressão da área do quadrilátero $[PQRS]$, deduzida antes, temos que:

$$16 \times \frac{2\sqrt{2}}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{32\sqrt{2}}{9}$$

Exame – 2014, 2.^a Fase (adaptado)

20. Como

- $\overline{BC} = \sin \alpha$
- $\overline{OC} = \cos \alpha$

Temos que $\overline{DC} = \overline{OD} - \overline{OC} = 3 - |\cos \alpha|$

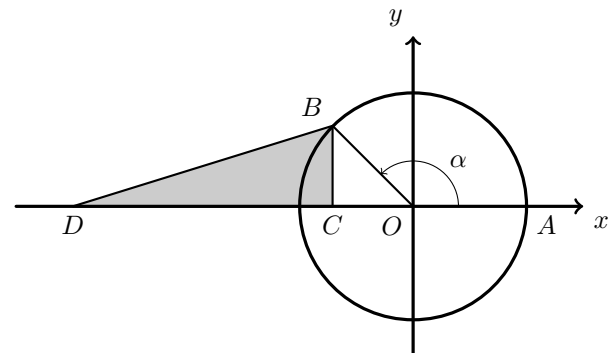
Como $\alpha \in]\frac{\pi}{2}, \pi[$, logo $\cos \alpha < 0$, pelo que $|\cos \alpha| = -\cos \alpha$

Assim, $\overline{DC} = 3 - |\cos \alpha| = 3 - (-\cos \alpha) = 3 + \cos \alpha$

Desta forma, temos que:

$$A_{[BCD]} = \frac{\overline{DC} \times \overline{BC}}{2} = \frac{\sin \alpha (3 + \cos \alpha)}{2} = \frac{1}{2} (3 + \cos \alpha) \sin \alpha$$

Resposta: **Opção C**



Exame – 2014, 1.^a Fase

21. Como $x \in]\pi, \frac{3\pi}{2}[$, temos que x é a amplitude de um ângulo do 3.^o quadrante.

Assim, temos que:

- $\sin x < 0$
- $\cos x < 0$
- $\operatorname{tg} x > 0$

Assim, analisando cada uma das hipóteses, vem que:

- $\sin x + \cos x < 0$ (porque é a soma de valores negativos)
- $\frac{\cos x}{\operatorname{tg} x} < 0$ (porque é o quociente de um valor negativo por um positivo)
- $\operatorname{tg} x - \sin x > 0$ (porque é a diferença entre um valor positivo e um negativo, ou de forma equivalente, a soma de dois valores positivos)
- $\sin x \times \operatorname{tg} x < 0$ (porque é o produto de um valor negativo por um positivo)

Resposta: **Opção C**

Teste Intermédio 11.^o ano – 11.03.2014

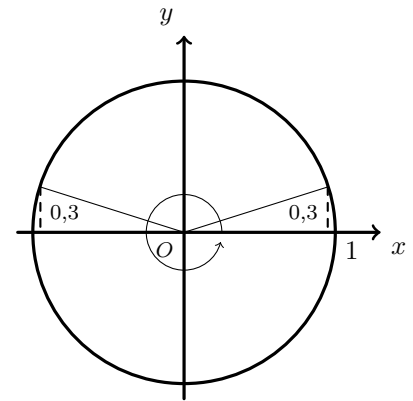


22. Como no intervalo $[0, 2\pi[$ a equação $\sin x = 0,3$ tem 2 soluções, então:

- no intervalo $[0, 2\pi \times 10[= [0, 20\pi[$ a equação $\sin x = 0,3$ tem 20 soluções, (correspondentes a 10 repetições das duas soluções iniciais por cada uma das 10 voltas completas no círculo trigonométrico, no sentido positivo).

Analogamente,

- no intervalo $[-2\pi \times 10, 0[= [-20\pi, 0[$ a equação $\sin x = 0,3$ tem 20 soluções, (correspondentes a 10 repetições das duas soluções iniciais por cada uma das 10 voltas completas no círculo trigonométrico, no sentido negativo).



Assim, temos que, no intervalo $[-20\pi, 20\pi[$, a equação trigonométrica $\sin x = 0,3$ tem $20 + 20 = 40$ soluções.

Resposta: **Opção B**

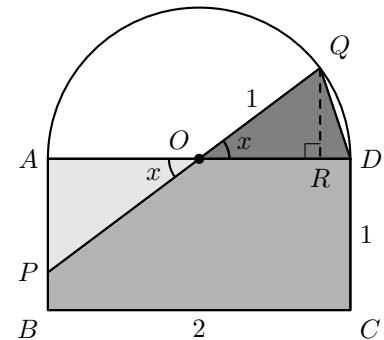
Teste Intermédio 11.º ano – 11.03.2014

23.

23.1. Como os ângulos DOC e AOP são ângulos verticalmente opostos, x também é a amplitude do ângulo AOP . Como $[OA]$ e $[OQ]$ são raios da semicircunferência, $\overline{OA} = \overline{OD} = 1$, e assim, recorrendo à definição de seno e tangente temos:

$$\sin x = \frac{\overline{QR}}{\overline{OQ}} \Leftrightarrow \sin x = \frac{\overline{QR}}{1} \Leftrightarrow \overline{QR} = \sin x$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{\overline{AP}}{\overline{OA}} \Leftrightarrow \operatorname{tg} x = \frac{\overline{AP}}{1} \Leftrightarrow \overline{AP} = \operatorname{tg} x$$



E assim, temos que a área do polígono $[BCDQP]$ pode ser calculada como a soma das áreas do triângulo $[ODQ]$ com a do retângulo $[ABCD]$ subtraindo a área do triângulo $[OAP]$:

$$\begin{aligned} A_{[BCDQP]} &= A_{[ODQ]} + A_{[ABCD]} - A_{[OAP]} = \frac{\overline{OD} \times \overline{QR}}{2} + \overline{DC} \times \overline{BC} - \frac{\overline{AP} \times \overline{OA}}{2} = \\ &= \frac{1 \times \sin x}{2} + 2 \times 1 - \frac{\operatorname{tg} x \times 1}{2} = \frac{\sin x}{2} + 2 - \frac{\operatorname{tg} x}{2} = 2 - \frac{\operatorname{tg} x}{2} + \frac{\sin x}{2} \end{aligned}$$



23.2. Como $\cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = -\operatorname{sen} x$ (como se pretende ilustrar na figura ao lado), então temos que:

$$\cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = -\frac{3}{5} \Leftrightarrow \operatorname{sen} x = -\left(-\frac{3}{5}\right) \Leftrightarrow \operatorname{sen} x = \frac{3}{5}$$

Assim, recorrendo à fórmula fundamental da trigonometria, vem:

$$\left(\frac{3}{5}\right)^2 + \cos^2 x = 1 \Leftrightarrow \cos^2 x = 1 - \frac{9}{25} \Leftrightarrow \cos^2 x = \frac{16}{25} \Leftrightarrow \cos x = \pm \frac{4}{5}$$

Como $x \in \left]0, \frac{\pi}{4}\right]$, então $\cos x > 0$, e assim, temos que: $\cos x = \frac{4}{5}$

$$\text{Calculando o valor da tangente de } x, \text{ vem: } \operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = \frac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}} = \frac{3}{4}$$

E assim, substituindo os valores de $\operatorname{tg} x$ e $\operatorname{sen} x$ na expressão da área do polígono $[BCDQP]$, obtemos a área para a posição do ponto P :

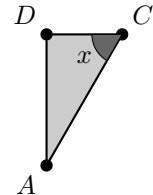
$$2 - \frac{\frac{3}{4}}{2} + \frac{\frac{3}{5}}{2} = 2 - \frac{3}{8} + \frac{3}{10} = \frac{80}{40} - \frac{15}{40} + \frac{12}{40} = \frac{77}{40}$$

Teste Intermédio 11.º ano – 11.03.2014

24. Vamos considerar \overline{DA} a medida da altura do triângulo e \overline{EC} a medida da base. Sabemos que $\overline{CA} = 1$, porque é a medida do raio da circunferência.

Como $[CA]$ é a hipotenusa do triângulo e $[DA]$ o cateto oposto ao ângulo x , usando o seno do ângulo temos que:

$$\operatorname{sen} x = \frac{\overline{DA}}{\overline{CA}} \Leftrightarrow \operatorname{sen} x = \frac{\overline{DA}}{1} \Leftrightarrow \overline{DA} = \operatorname{sen} x$$



Por outro lado, como $[DC]$ é o cateto adjacente, usando a definição de cosseno, temos:

$$\cos x = \frac{\overline{DC}}{\overline{CA}} \Leftrightarrow \cos x = \frac{\overline{DC}}{1} \Leftrightarrow \overline{DC} = \cos x$$

Como $\overline{ED} = 6$ temos que:

$$\overline{EC} = \overline{ED} + \overline{DC} \Leftrightarrow \overline{EC} = 6 + \cos x$$

Logo, calculando a área do triângulo, obtemos:

$$A_{[AEC]} = \frac{\overline{EC} \times \overline{DA}}{2} = \frac{(6 + \cos x)(\operatorname{sen} x)}{2} = \frac{6 \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} x \cos x}{2} = \frac{\operatorname{sen} x(6 + \cos x)}{2}$$

Exame – 2013, Ép. especial (adaptado)



25. Começamos por definir o ponto $P(-3,0)$ e o ângulo AOP , cuja amplitude é $\pi - \alpha$.

Assim, como sabemos que $\overline{OP} = 3$, podemos usar a definição de cosseno podemos calcular \overline{OA} :

$$\cos(\pi - \alpha) = \frac{\overline{OP}}{\overline{OA}} \Leftrightarrow \cos(\pi - \alpha) = \frac{3}{\overline{OA}} \Leftrightarrow \overline{OA} = \frac{3}{\cos(\pi - \alpha)}$$

Como $\cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha$, temos que:

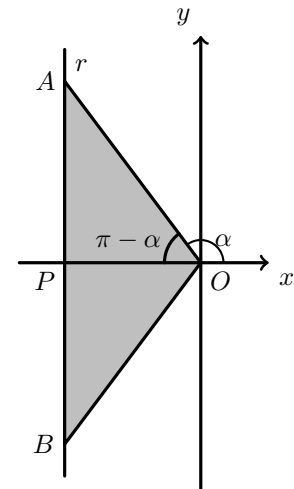
$$\overline{OA} = \frac{3}{\cos(\pi - \alpha)} \Leftrightarrow \overline{OA} = \frac{3}{-\cos \alpha} \Leftrightarrow \overline{OA} = -\frac{3}{\cos \alpha}$$

Depois, calculamos \overline{AP} recorrendo à definição de tangente:

$$\operatorname{tg}(\pi - \alpha) = \frac{\overline{AP}}{\overline{OP}} \Leftrightarrow \operatorname{tg}(\pi - \alpha) = \frac{\overline{AP}}{3} \Leftrightarrow \overline{AP} = 3 \operatorname{tg}(\pi - \alpha)$$

Como $\operatorname{tg}(\pi - \alpha) = -\operatorname{tg} \alpha$, temos que:

$$\overline{AP} = 3 \operatorname{tg}(\pi - \alpha) \Leftrightarrow \overline{AP} = -3 \operatorname{tg} \alpha$$



Como $\overline{AB} = 2 \times \overline{AP}$ e $\overline{OB} = \overline{OA}$, calculado a expressão do perímetro vem:

$$P_{[OAB]} = \overline{AB} + \overline{OA} + \overline{OB} = 2 \times \overline{AP} + 2 \times \overline{OA} = 2 \times (-3 \operatorname{tg} \alpha) + 2 \times \left(-\frac{3}{\cos \alpha}\right) = -6 \operatorname{tg} \alpha - \frac{6}{\cos \alpha}$$

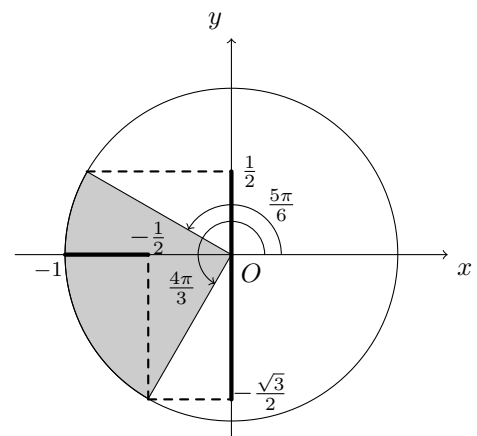
Exame – 2013, 2.ª Fase (adaptado)

26. Representando as amplitudes dos ângulos do intervalo $\left[\frac{5\pi}{6}, \frac{4\pi}{3}\right]$ no círculo trigonométrico, podemos verificar que, neste intervalo:

- $-\frac{\sqrt{3}}{2} \leq \operatorname{sen} x \leq \frac{1}{2}$
- $-1 \leq \operatorname{cos} x \leq -\frac{1}{2}$

Como $-\frac{\sqrt{3}}{2} \approx -0,87$, temos que $-0,9 < -\frac{\sqrt{3}}{2}$, pelo que a equação $\operatorname{sen} x = -0,9$ não tem soluções no intervalo considerado.

Resposta: **Opção D**



Teste Intermédio 11.º ano – 6.03.2013

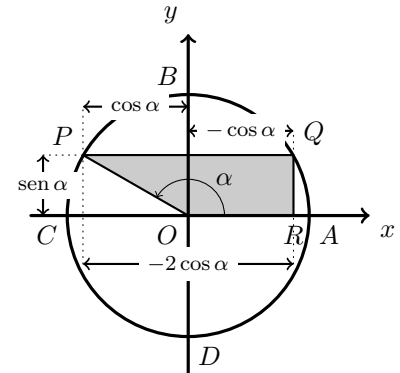


27.

27.1. Como o círculo representado é o círculo trigonométrico, então, temos que $\overline{OP} = 1$, e que as coordenadas do ponto P são $(\cos \alpha, \sin \alpha)$

Como o ponto Q é simétrico do ponto P relativamente ao eixo Oy então os dois pontos têm ordenadas iguais e abcissas simétricas, pelo que as coordenadas do ponto Q são $(-\cos \alpha, \sin \alpha)$ e assim, como $\alpha \in \left] \frac{\pi}{2}, \pi \right[$, ou seja, no segundo quadrante, temos que $\cos \alpha < 0$, pelo que $\overline{PQ} = -2 \cos \alpha$

Como o ponto R tem a mesma abcissa que o ponto Q , e como α é um ângulo do segundo quadrante, $\sin \alpha > 0$, pelo que $\overline{RQ} = \sin \alpha$ e como o ponto R pertence ao semieixo positivo Ox , vem que $\overline{OR} = -\cos \alpha$



Desta forma, considerando a base maior do trapézio o lado $[PQ]$, a base menor o lado $[OR]$ e a altura o lado $[RQ]$, temos que a área (A) do trapézio é dada por:

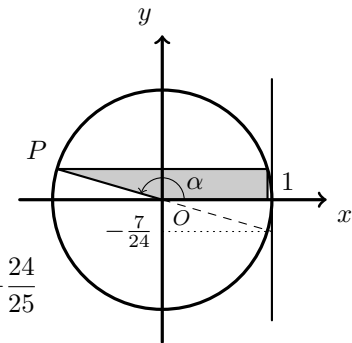
$$A = \frac{\overline{PQ} + \overline{OR}}{2} \times \overline{RQ} = \frac{-2 \cos \alpha + (-\cos \alpha)}{2} \times \sin \alpha = \frac{-3 \cos \alpha \times \sin \alpha}{2} = -\frac{3}{2} \sin \alpha \cos \alpha$$

27.2. Como a reta OP intersecta a reta de equação $x = 1$ no ponto de ordenada $-\frac{7}{24}$, temos que $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{7}{24}$

Como $\operatorname{tg}^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$, temos que:

$$\left(-\frac{7}{24}\right)^2 + 1 = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Leftrightarrow \frac{49}{576} + \frac{576}{576} = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Leftrightarrow \frac{625}{576} = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos^2 \alpha = \frac{1}{\frac{625}{576}} \Leftrightarrow \cos^2 \alpha = \frac{576}{625} \Leftrightarrow \cos \alpha = \pm \sqrt{\frac{576}{625}} \underset{\cos < 0}{\Rightarrow} \cos \alpha = -\frac{24}{25}$$



Logo, recorrendo à fórmula fundamental da trigonometria, vem:

$$\sin^2 \alpha + \frac{576}{625} = 1 \Leftrightarrow \sin^2 \alpha = 1 - \frac{576}{625} \Leftrightarrow \sin^2 \alpha = \frac{49}{625} \Leftrightarrow \sin \alpha = \pm \frac{7}{25} \underset{\sin \alpha > 0}{\Rightarrow} \sin \alpha = \frac{7}{25}$$

Logo, de acordo com a expressão da área do trapézio $[OPQR]$, $\left(-\frac{3}{2} \sin \alpha \cos \alpha\right)$, para a posição do ponto P definida, a área, na forma de fração irredutível, é:

$$-\frac{3}{2} \times \frac{7}{25} \times \left(-\frac{24}{25}\right) = \frac{504}{1250} = \frac{252}{625}$$

Teste Intermédio 11.º ano – 6.03.2013



28. Definindo o ponto P , como o ponto médio do lado $[AB]$, a área da região sombreada pode ser calculada como a diferença entre a área do quadrado e a soma das áreas de 8 triângulos retângulos (o triângulo $[AEP]$ e os restantes 7 semelhantes a este):

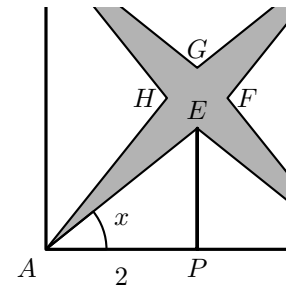
$$A_{[AEBF CGDH]} = A_{[ABCD]} - 8 \times A_{[AEP]}$$

Como P é o ponto médio de $[AB]$, temos que $\overline{AP} = 2$, podemos determinar \overline{EP} , recorrendo à definição de tangente de um ângulo:

$$\operatorname{tg} x = \frac{\overline{EP}}{\overline{AP}} \Leftrightarrow \operatorname{tg} x = \frac{\overline{EP}}{2} \Leftrightarrow \overline{EP} = 2 \operatorname{tg} x$$

Assim, calculando a área da região sombreada, vem:

$$\begin{aligned} A_{[AEBF CGDH]} &= A_{[ABCD]} - 8 \times A_{[AEP]} = \overline{AB}^2 - 8 \times \frac{\overline{AP} \times \overline{EP}}{2} = 4^2 - 8 \times \frac{2 \times 2 \operatorname{tg} x}{2} = \\ &= 16 - 8 \times 2 \operatorname{tg} x = 16 - 16 \operatorname{tg} x = 16(1 - \operatorname{tg} x) \end{aligned}$$



Exame – 2012, 2.ª Fase

29. Considerando um ponto P , sobre o lado $[AB]$ do trapézio, tal que o segmento $[DP]$ seja perpendicular ao lado $[AB]$, consideramos o ângulo ADP com amplitude $\frac{\pi}{2} - \alpha$

Como $\overline{DP} = 1$, recorrendo à definição de cosseno, temos:

$$\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\overline{DP}}{\overline{DA}} \Leftrightarrow \overline{DA} = \frac{1}{\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)}$$

e como $\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = \operatorname{sen} \alpha$, temos que: $\overline{DA} = \frac{1}{\operatorname{sen} \alpha}$

Da definição de tangente de um ângulo, e como $\operatorname{tg}\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}$ temos:

$$\operatorname{tg}\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\overline{AP}}{\overline{DP}} \Leftrightarrow \operatorname{tg}\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\overline{AP}}{1} \Leftrightarrow \overline{AP} = -\frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}$$

Logo, o perímetro do trapézio é:

$$\begin{aligned} P_{[ABCD]} &= \overline{PB} + \overline{BC} + \overline{CD} + \overline{DA} + \overline{AP} = 1 + 1 + 1 + \frac{1}{\operatorname{sen} \alpha} + \left(-\frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}\right) = \\ &= 3 + \frac{1}{\operatorname{sen} \alpha} - \frac{1}{\frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha}} = 3 + \frac{1}{\operatorname{sen} \alpha} - \frac{\cos \alpha}{\operatorname{sen} \alpha} = 3 + \frac{1 - \cos \alpha}{\operatorname{sen} \alpha} \end{aligned}$$

Exame – 2012, 1.ª Fase

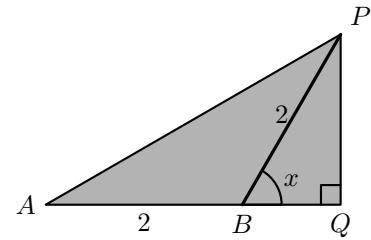


30. Usando a definição de seno, temos:

$$\operatorname{sen} x = \frac{\overline{PQ}}{\overline{BP}} \Leftrightarrow \operatorname{sen} x = \frac{\overline{PQ}}{2} \Leftrightarrow \overline{PQ} = 2 \operatorname{sen} x$$

e usando a definição de cosseno, vem:

$$\operatorname{cos} x = \frac{\overline{BQ}}{\overline{BP}} \Leftrightarrow \operatorname{cos} x = \frac{\overline{BQ}}{2} \Leftrightarrow \overline{BQ} = 2 \operatorname{cos} x$$



Calculando a área do triângulo vem:

$$\begin{aligned} A_{[APQ]} &= \frac{(\overline{AB} + \overline{BQ}) \times \overline{PQ}}{2} = \frac{(2 + 2 \operatorname{cos} x)(2 \operatorname{sen} x)}{2} = \frac{4 \operatorname{sen} x + 4 \operatorname{sen} x \operatorname{cos} x}{2} = 2 \operatorname{sen} x + 2 \operatorname{sen} x \operatorname{cos} x = \\ &= 2 (\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} x \operatorname{cos} x) = 2 \operatorname{sen} x (1 + \operatorname{cos} x) \end{aligned}$$

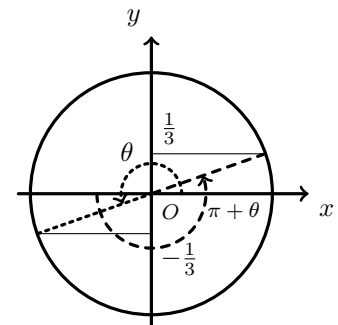
Teste Intermédio 12.º ano – 24.05.2012 (adaptado)

31. Representando no círculo trigonométrico um ângulo de amplitude θ , tal que, $\operatorname{sen} \theta = -\frac{1}{3}$ (como na figura ao lado), podemos verificar que, a representação do ângulo com amplitude $\pi + \theta$ verifica a condição $\operatorname{sen}(\pi + \theta) = \frac{1}{3}$, ou seja:

$$\operatorname{sen}(\pi + \theta) = -\operatorname{sen} \theta$$

E assim, de entre as opções apresentadas $\pi + \theta$ é a única solução da equação $\operatorname{sen} x = \frac{1}{3}$

Resposta: **Opção B**



Teste Intermédio 11.º ano – 9.02.2012

32. Considerando que o altura assinalada na figura divide o triângulo $[ABC]$ em dois triângulos retângulos cujas hipotenusas são os lados $[AB]$ e $[C]$ e usando a definição de seno, temos que:

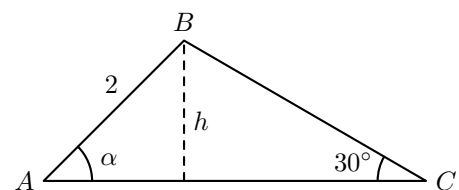
$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{h}{\overline{AB}} \Leftrightarrow \operatorname{sen} \alpha = \frac{h}{2} \Leftrightarrow h = 2 \operatorname{sen} \alpha$$

E como $\operatorname{sen} 30^\circ = \frac{1}{2}$, vem que:

$$\operatorname{sen} 30^\circ = \frac{h}{\overline{BC}} \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{h}{\overline{BC}} \Leftrightarrow \overline{BC} = 2h \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \overline{BC} = 2 \times 2 \operatorname{sen} \alpha \Leftrightarrow \overline{BC} = 4 \operatorname{sen} \alpha$$

Resposta: **Opção A**



Teste Intermédio 11.º ano – 9.02.2012



33.

- 33.1. De acordo com a sugestão apresentada, como o ponto P se move sobre a circunferência que delimita o círculo trigonométrico, temos que as coordenadas do ponto P , são $(\cos \alpha, \sin \alpha)$
Assim como as coordenadas do ponto B são $(3,0)$, a distância \overline{PB} é:

$$d = \sqrt{(\cos \alpha - 3)^2 + (\sin \alpha - 0)^2} = \sqrt{\cos^2 \alpha - 6 \cos \alpha + 9 + \sin^2 \alpha} = \\ = \sqrt{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha - 6 \cos \alpha + 9} = \sqrt{-6 \cos \alpha + 9 + 1} = \sqrt{10 - 6 \cos \alpha}$$

E assim, vem que:

$$d = \sqrt{10 - 6 \cos \alpha} \Rightarrow d^2 = (\sqrt{10 - 6 \cos \alpha})^2 \Rightarrow d^2 = 10 - 6 \cos \alpha$$

33.2.

- 33.2.1. Resolvendo a equação no intervalo $[0, 2\pi[$, temos que:

$$d^2 = 7 \Leftrightarrow 10 - 6 \cos \alpha = 7 \Leftrightarrow -6 \cos \alpha = 7 - 10 \Leftrightarrow 6 \cos \alpha = 3 \Leftrightarrow \cos \alpha = \frac{3}{6} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos \alpha = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos \alpha = \cos \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \vee \alpha = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Como $\alpha \in [0, 2\pi[$, as soluções da equação correspondem aos valores de $k = 0$ e $k = 1$:

- $k = 0$: $\alpha = \frac{\pi}{3} \vee \alpha = -\frac{\pi}{3}$, e $\frac{\pi}{3} \in [0, 2\pi[$
- $k = 1$: $\alpha = \frac{\pi}{3} + 2\pi \vee \alpha = -\frac{\pi}{3} + 2\pi$, $-\frac{\pi}{3} + 2\pi = \frac{5\pi}{3}$ e $\frac{5\pi}{3} \in [0, 2\pi[$

Assim, as soluções da equação $d^2 = 7$ que pertencem ao intervalo $[0, 2\pi[$ são $\frac{5\pi}{3}$ e $\frac{\pi}{3}$

- 33.2.2. Como $\operatorname{tg}^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$ e $\operatorname{tg} \alpha = -\sqrt{35}$, vem que:

$$(-\sqrt{35})^2 + 1 = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Leftrightarrow 35 + 1 = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Leftrightarrow \cos^2 \alpha = \frac{1}{36} \Leftrightarrow \cos \alpha = \pm \sqrt{\frac{1}{36}} \Leftrightarrow \cos \alpha = \pm \frac{1}{6}$$

Como $\alpha \in [0, \pi]$ e $\operatorname{tg} \alpha < 0$, então α é um ângulo do segundo quadrante $(\alpha \in]\frac{\pi}{2}, \pi[)$, pelo que $\cos \alpha < 0$, e assim temos que: $\cos \alpha = -\frac{1}{6}$

Calculando o valor de d , correspondente, vem:

$$d^2 = 10 - 6 \cos \alpha \Leftrightarrow d^2 = 10 - 6 \times \left(-\frac{1}{6}\right) \Leftrightarrow d^2 = 10 + 1 \Leftrightarrow d = \pm \sqrt{11}$$

Como $d > 0$, vem que $d = \sqrt{11}$



34. Como se trata de um círculo trigonométrico, o ponto B tem coordenadas $B\left(\cos \frac{5\pi}{3}, \sin \frac{5\pi}{3}\right)$, porque o segmento $[OB]$, define com o semieixo positivo Ox um ângulo de $\pi + \frac{2\pi}{3} = \frac{5\pi}{3}$ radianos.

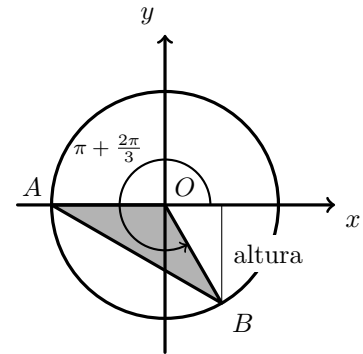
Podemos considerar como a medida da base do triângulo $\overline{OA} = 1$ e o valor absoluto da ordenada de B como a medida da altura:

$$|y_B| = \left| \sin \frac{5\pi}{3} \right| = \left| -\sin \frac{\pi}{3} \right| = \left| -\frac{\sqrt{3}}{2} \right| = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Assim, calculando a área do triângulo vem:

$$A_{[OAB]} = \frac{\overline{OA} \times |y_B|}{2} = \frac{1 \times \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

Resposta: **Opção A**



Exame – 2011, Ép. especial

35. Como $\overline{OA} = 1$, usando as definições de seno e cosseno temos:

$$\sin \theta = \frac{\overline{OE}}{\overline{OA}} \Leftrightarrow \sin \theta = \frac{\overline{OE}}{1} \Leftrightarrow \overline{OE} = \sin \theta$$

$$\cos \theta = \frac{\overline{EA}}{\overline{OA}} \Leftrightarrow \cos \theta = \frac{\overline{EA}}{1} \Leftrightarrow \overline{EA} = \cos \theta$$

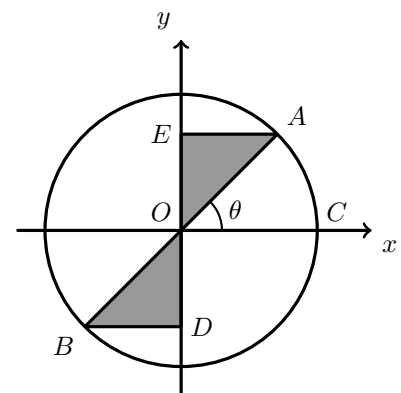
E assim, o perímetro da região sombreada é:

$$P_{[ABDE]} = \overline{AO} + \overline{OB} + \overline{BD} + \overline{DO} + \overline{OE} + \overline{EA}$$

Como $\overline{AO} = \overline{OB}$; $\overline{BD} = \overline{EA}$ e $\overline{DO} = \overline{OE}$, temos:

$$P_{[ABDE]} = 2\overline{AO} + 2\overline{EA} + 2\overline{OE} = 2 \times 1 + 2 \cos \theta + 2 \sin \theta = 2(1 + \cos \theta + \sin \theta)$$

Resposta: **Opção C**

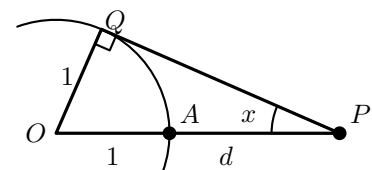


Exame – 2011, 2.ª Fase

36. Como $\overline{OQ} = 1$ (medida do cateto oposto ao ângulo x) e $\overline{OP} = 1 + d$ (medida da hipotenusa do triângulo retângulo), usando a definição de seno de um ângulo, temos que:

$$\sin x = \frac{\overline{OQ}}{\overline{OP}} \Leftrightarrow \sin x = \frac{1}{1+d} \Leftrightarrow 1+d = \frac{1}{\sin x} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow d = \frac{1}{\sin x} - 1 \Leftrightarrow d = \frac{1}{\sin x} - \frac{\sin x}{\sin x} \Leftrightarrow d = \frac{1 - \sin x}{\sin x}$$



Teste Intermédio 12.º ano – 26.05.2011



37. Representando no círculo trigonométrico um ângulo de amplitude α , tal que, $\cos\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = -\frac{4}{5}$ (como na figura ao lado), podemos ilustrar que:

$$\cos\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = -\operatorname{sen} \alpha$$

E assim, $\operatorname{sen} \alpha = -\left(-\frac{4}{5}\right) = \frac{4}{5}$, pelo que, podemos calcular o valor de $\cos \alpha$, recorrendo à fórmula fundamental da trigonometria:

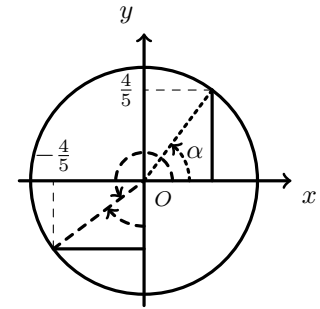
$$\left(\frac{4}{5}\right)^2 + \cos^2 \alpha = 1 \Leftrightarrow \cos^2 \alpha = 1 - \frac{16}{25} \Leftrightarrow \cos^2 \alpha = \frac{9}{25} \Leftrightarrow \cos \alpha = \pm \sqrt{\frac{9}{25}} \Leftrightarrow \cos \alpha = \pm \frac{3}{5}$$

Como $\alpha \in]0, \frac{\pi}{2}[$, então $\cos \alpha > 0$, e assim, $\cos \alpha = \frac{3}{5}$, pelo que o valor de $\operatorname{tg} \alpha$, é:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}} = \frac{4}{3}$$

Desta forma, temos que:

$$3 - \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} = 3 - \frac{1}{\frac{4}{3}} = 3 - \frac{3}{4} = \frac{12}{4} - \frac{3}{4} = \frac{9}{4}$$



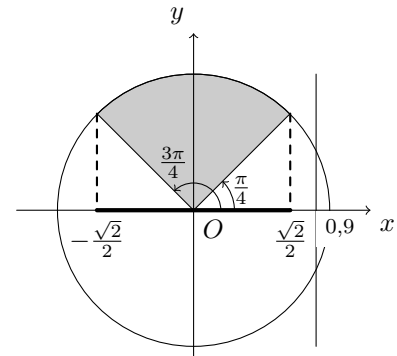
Teste Intermédio 11.º ano – 24.05.2011

38. Representando as amplitudes dos ângulos do intervalo $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$ no círculo trigonométrico, podemos verificar que, neste intervalo:

$$-\frac{\sqrt{2}}{2} \leq \cos x \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Ou seja, a equação $\cos x = -0,9$ não tem soluções no intervalo considerado.

Resposta: **Opção C**



Teste Intermédio 11.º ano – 27.01.2011

39. Como a ordenada do ponto de interseção do prolongamento da reta OQ com a reta tangente ao círculo trigonométrico no ponto de coordenadas $(1,0)$ é 2, temos que $\operatorname{tg} \alpha = 2$

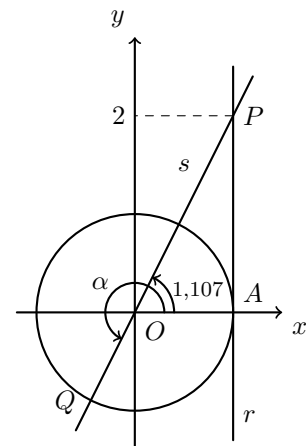
Assim, o valor de um ângulo cuja tangente é 2, pode ser calculado por:

$$\operatorname{tg}^{-1}(2) \approx 1,107$$

Como este valor corresponde a um ângulo do 1º quadrante, podemos obter um ângulo do 3º quadrante, cuja tangente também é 2, somando π à solução anterior:

$$\alpha = \operatorname{tg}^{-1}(2) + \pi \approx 4,25$$

Resposta: **Opção B**



Teste Intermédio 11.º ano – 27.01.2011



40. Observando que:

- Como $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$ então $\alpha = \frac{\pi}{2} - \beta$, e assim, $\cos \alpha = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) = \sin \beta$
- Como $\alpha + \theta = 2\pi$ então $\alpha = 2\pi - \theta$, e assim, $\sin \alpha = \sin(2\pi - \theta) = \sin(-\theta) = -\sin \theta$

Podemos concluir que:

$$\sin \alpha + \underbrace{\sin \beta}_{\cos \alpha} + \underbrace{\sin \theta}_{-\sin \alpha} = \sin \alpha + \cos \alpha - \sin \alpha = \cos \alpha$$

Resposta: **Opção D**

Teste Intermédio 11.º ano – 27.01.2011

41.

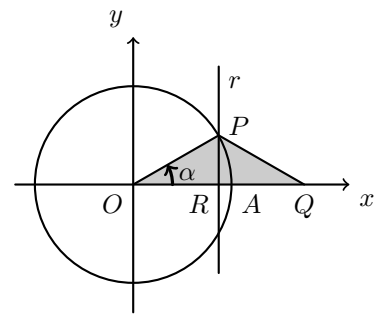
41.1. Como $\overline{OP} = 5$, usando as definições de seno e cosseno temos:

$$\sin \alpha = \frac{\overline{PR}}{\overline{OP}} \Leftrightarrow \sin \alpha = \frac{\overline{PR}}{5} \Leftrightarrow \overline{PR} = 5 \sin \alpha$$

$$\cos \alpha = \frac{\overline{OR}}{\overline{OP}} \Leftrightarrow \cos \alpha = \frac{\overline{OR}}{5} \Leftrightarrow \overline{OR} = 5 \cos \alpha$$

E assim, como $\overline{PO} = \overline{PQ}$, também $\overline{PR} = \overline{RQ}$, pelo que $\overline{OQ} = \overline{OR} + \overline{RQ} = 2\overline{OR}$; e a área do triângulo $[OPQ]$ é dada por:

$$A_{[OPR]} = \frac{\overline{OQ} \times \overline{PR}}{2} = \frac{2 \times 5 \cos \alpha \times 5 \sin \alpha}{2} = 25 \sin \alpha \cos \alpha = f(\alpha)$$



41.2. Resolvendo a equação no intervalo $]0, \frac{\pi}{2}[$, temos que:

$$f(\alpha) = 25 \cos^2 \alpha \Leftrightarrow 25 \sin \alpha \cos \alpha = 25 \cos^2 \alpha \Leftrightarrow \frac{25 \sin \alpha \cos \alpha}{\cos^2 \alpha \neq 0} = 1 \Leftrightarrow \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{tg} \alpha = 1 \Leftrightarrow \operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Assim, no intervalo indicado, a única solução da equação é $\alpha = \frac{\pi}{4}$, ($k = 0$)

41.3. Como $f(\theta) = 5$, temos que;

$$f(\theta) = 5 \Leftrightarrow 25 \sin \theta \cos \theta = 5 \Leftrightarrow \sin \theta \cos \theta = \frac{5}{25} \Leftrightarrow \sin \theta \cos \theta = \frac{1}{5}$$

E assim, vem que:

$$(\sin \theta + \cos \theta)^2 = \sin^2 \theta + 2 \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta = \sin^2 \theta + \cos^2 \theta + 2 \sin \theta \cos \theta = 1 + 2 \times \frac{1}{5} = \frac{5}{5} + \frac{2}{5} = \frac{7}{5}$$

Teste Intermédio 11.º ano – 27.01.2011



42.

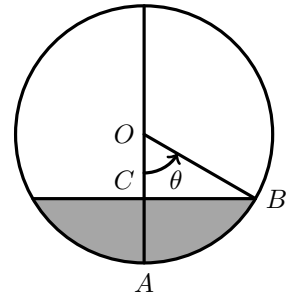
42.1. Analisando as figuras podemos dividir o cálculo da altura em dois casos:

No primeiro caso, $(\theta \in]0, \frac{\pi}{2}[)$, $h = 3 - \overline{OC}$ Como $\overline{OB} = 3$, recorrendo à definição de cosseno de um ângulo, temos:

$$\cos \theta = \frac{\overline{OC}}{3} \Leftrightarrow \overline{OC} = 3 \cos \theta$$

e assim,

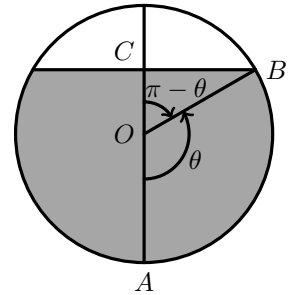
$$h = 3 - \overline{OC} = 3 - 3 \cos \theta$$

No segundo caso, $(\theta \in]\frac{\pi}{2}, \pi[)$, $h = 3 + \overline{OC}$ Como $\overline{OB} = 3$, recorrendo à definição de cosseno de um ângulo, temos:

$$\begin{aligned} \cos(\pi - \theta) &= \frac{\overline{OC}}{3} \Leftrightarrow \overline{OC} = 3 \cos(\pi - \theta) \Leftrightarrow \overline{OC} = 3(-\cos \theta) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \overline{OC} = -3 \cos \theta \end{aligned}$$

e assim,

$$h = 3 + \overline{OC} = 3 + (-3 \cos \theta) = 3 - 3 \cos \theta$$

Ou seja em ambos os casos, isto é, para qualquer $\theta \in]0, \pi[$, a altura h pode ser calculada como que $h(\theta) = 3 - 3 \cos(\theta)$ 42.2. Como $h(\theta) = 3 - 3 \cos(\theta)$, temos que:

$$\begin{aligned} h(\theta) = 3 &\Leftrightarrow 3 - 3 \cos(\theta) = 3 \Leftrightarrow -3 \cos(\theta) = 0 \Leftrightarrow \cos(\theta) = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \cos(\theta) = \cos \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Como $\theta \in]0, \pi[$, $\theta = \frac{\pi}{2}$ é a única solução da equação.Calcular θ tal que $h(\theta) = 3$, significa determinar o ângulo associado a uma quantidade de combustível no depósito com 3 metros de altura.Assim a solução calculada significa que, quando o combustível no depósito tiver uma altura de 3 metros, o ângulo θ será um ângulo reto $(\frac{\pi}{2} \text{ rad.})$.

Exame – 2010, 2.ª Fase



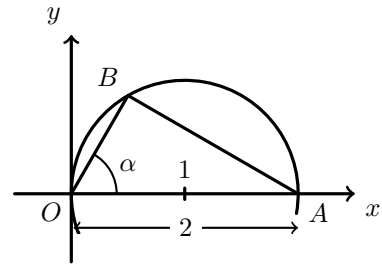
43. Como o triângulo está inscrito numa semicircunferência é um triângulo retângulo. Sabemos que a hipotenusa coincide com o diâmetro e tem comprimento 2 ($\overline{OA} = 2$).

Assim, recorrendo à definição de seno temos:

$$\sin \alpha = \frac{\overline{AB}}{\overline{OA}} \Leftrightarrow \sin \alpha = \frac{\overline{AB}}{2} \Leftrightarrow \overline{AB} = 2 \sin \alpha$$

Analogamente, pela definição de cosseno, vem:

$$\cos \alpha = \frac{\overline{OB}}{\overline{OA}} \Leftrightarrow \cos \alpha = \frac{\overline{OB}}{2} \Leftrightarrow \overline{OB} = 2 \cos \alpha$$



Logo, para cada valor de $\alpha \in]0, \frac{\pi}{2}[$, o perímetro do triângulo $[OAB]$ é dado, em função de α , por:

$$P_{[OAB]} = \overline{OA} + \overline{AB} + \overline{OB} = 2 + 2 \sin \alpha + 2 \cos \alpha = 2(1 + \cos \alpha + \sin \alpha)$$

Exame – 2010, 1.ª Fase

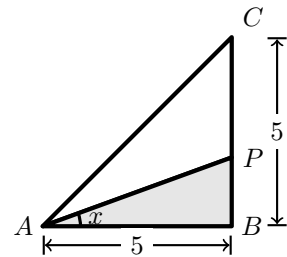
44. Relativamente ao triângulo retângulo $[ABP]$, do qual conhecemos a medida do cateto adjacente ao ângulo x , usando a definição de cosseno e de tangente do ângulo x , temos:

$$\cos x = \frac{\overline{AB}}{\overline{AP}} \Leftrightarrow \cos x = \frac{5}{\overline{AP}} \Leftrightarrow \overline{AP} = \frac{5}{\cos x}$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{\overline{BP}}{\overline{AB}} \Leftrightarrow \operatorname{tg} x = \frac{\overline{BP}}{5} \Leftrightarrow \overline{BP} = 5 \operatorname{tg} x$$

Temos ainda que

$$\overline{BP} + \overline{PC} = 5 \Leftrightarrow \overline{PC} = 5 - \overline{BP} \Leftrightarrow \overline{PC} = 5 - 5 \operatorname{tg} x$$



Recorrendo ao teorema de Pitágoras, podemos calcular a medida do segmento $[AC]$:

$$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 \Leftrightarrow \overline{AC}^2 = 5^2 + 5^2 \Leftrightarrow \overline{AC}^2 = 25 + 25 \Leftrightarrow \overline{AC} = \sqrt{50}$$

Assim, para cada valor de $x \in]0, \frac{\pi}{4}[$, o perímetro do triângulo $[APC]$ é dado por:

$$P_{[APC]} = \overline{AP} + \overline{PC} + \overline{AC} = \frac{5}{\cos x} + 5 - 5 \operatorname{tg} x + \sqrt{50} = \frac{5}{\cos x} - 5 \operatorname{tg} x + \sqrt{50} + 5$$

Teste Intermédio 12.º ano – 19.05.2010

45. Como o ponto P pertence à superfície esférica, as suas coordenadas verificam a equação que define a superfície esférica, pelo que:

$$(\operatorname{tg} \alpha)^2 + (\sin \alpha)^2 + (2 + \cos \alpha - 2)^2 = 4 \Leftrightarrow \operatorname{tg}^2 \alpha + \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{tg}^2 \alpha + 1 = 4 \Leftrightarrow \operatorname{tg}^2 \alpha = 3 \Leftrightarrow \operatorname{tg} \alpha = \pm \sqrt{3}$$

Como $\alpha \in]0, \frac{\pi}{2}[$, então $\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{3}$, pelo que $\alpha = \operatorname{tg}^{-1}(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3}$

Desta forma, os valores numéricos das coordenadas do ponto P são:

$$\left(\operatorname{tg} \frac{\pi}{3}, \sin \frac{\pi}{3}, 2 + \cos \frac{\pi}{3} \right) = \left(\sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 2 + \frac{1}{2} \right) = \left(\sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{5}{2} \right)$$

Teste Intermédio 11.º ano – 6.05.2010



46. Como um ângulo raso tem π radianos de amplitude, e $\frac{\pi}{2} < 3 < \pi$, então um ângulo com amplitude de 3 radianos é um ângulo obtuso, ou um ângulo do 2º quadrante.

Resposta: **Opção B**

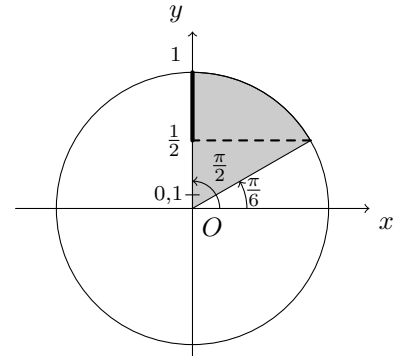
Teste Intermédio 11.º ano – 27.01.2010

47. Representando as amplitudes dos ângulos do intervalo $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right]$ no círculo trigonométrico, podemos verificar que, neste intervalo:

$$\frac{1}{2} \leq \sin x \leq 1$$

Ou seja, como $0,1 < \frac{1}{2}$ a equação $\sin x = 0,1$ não tem soluções no intervalo considerado.

Resposta: **Opção D**



Teste Intermédio 11.º ano – 27.01.2010

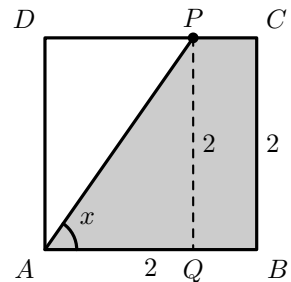
48.

- 48.1. Considerando um ponto Q , sobre o lado $[AB]$ do trapézio, tal que o segmento $[PQ]$ seja perpendicular ao lado $[AB]$, e recorrendo à definição de tangente, temos:

$$\operatorname{tg} x = \frac{\overline{PQ}}{\overline{AQ}} \Leftrightarrow \operatorname{tg} x = \frac{2}{\overline{AQ}} \Leftrightarrow \overline{AQ} = \frac{2}{\operatorname{tg} x}$$

Como $\overline{PC} = \overline{DQ} - \overline{DP} = \overline{DQ} - \overline{AQ} = 2 - \frac{2}{\operatorname{tg} x}$, vem que:

$$A_{[ABCQ]} = \frac{\overline{AB} + \overline{PC}}{2} \times \overline{CB} = \frac{2 + 2 - \frac{2}{\operatorname{tg} x}}{2} \times 2 = 4 - \frac{2}{\operatorname{tg} x}$$



- 48.2. Resolvendo a equação, temos que:

$$4 - \frac{2}{\operatorname{tg} x} = \frac{12 - 2\sqrt{2}}{3} \Leftrightarrow 4 - \frac{2}{\operatorname{tg} x} = 4 - \frac{2\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow \frac{2}{\operatorname{tg} x} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow \frac{2 \times 3}{2\sqrt{3}} = \operatorname{tg} x \Leftrightarrow \frac{3}{\sqrt{3}} = \operatorname{tg} x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{tg} x = \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{3} \times \sqrt{3}} \Leftrightarrow \operatorname{tg} x = \frac{3\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow \operatorname{tg} x = \sqrt{3} \Leftrightarrow \operatorname{tg} x = \operatorname{tg} \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Como $x \in \left] \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2} \right[$, o valor de x para o qual a área da região sombreada é $\frac{12 - 2\sqrt{2}}{3}$, é $x = \frac{\pi}{3}$



48.3. Como $\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = -\operatorname{sen} \alpha$, vem que: $-\operatorname{sen} x = -\frac{15}{17} \Leftrightarrow \operatorname{sen} x = \frac{15}{17}$

Pela fórmula fundamental da trigonometria, temos que:

$$\begin{aligned} \left(\frac{15}{17}\right)^2 + \cos^2 x = 1 &\Leftrightarrow \left(\frac{15}{17}\right)^2 + \cos^2 x = 1 \Leftrightarrow \cos^2 x = 1 - \frac{225}{289} \Leftrightarrow \cos^2 x = \frac{289}{289} - \frac{225}{289} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \cos^2 x = \frac{64}{289} \Leftrightarrow \cos x = \pm \sqrt{\frac{64}{289}} \Leftrightarrow \cos x = \pm \frac{8}{17} \end{aligned}$$

Como $x \in \left] \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2} \right[$, então $\cos x > 0$ e assim $\cos x = \frac{8}{17}$

Temos ainda que:

$$\operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = \frac{\frac{15}{17}}{\frac{8}{17}} = \frac{15}{8}$$

Desta forma, se $\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{15}{17}$ então a área da região sombreada correspondente é:

$$4 - \frac{2}{\frac{15}{8}} = 4 - \frac{16}{15} = \frac{60}{15} - \frac{16}{15} = \frac{44}{15}$$

Teste Intermédio 11.º ano – 27.01.2010

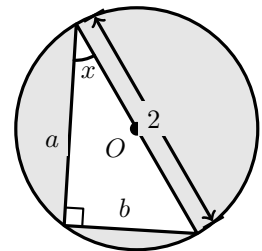
49. Como a medida da hipotenusa do triângulo é 2 (porque é um diâmetro de uma circunferência de raio 1), podemos recorrer à definição de seno e cosseno, para determinar a medida da base (b) e da altura (a):

$$\operatorname{sen} x = \frac{b}{2} \Leftrightarrow b = 2 \operatorname{sen} x \quad \text{e} \quad \cos x = \frac{a}{2} \Leftrightarrow a = 2 \cos x$$

Logo a área sombreada é a diferença da área do círculo e da área do triângulo:

$$A = A_o - A_{\Delta} = \pi r^2 - \frac{b \times a}{2} = \pi(1)^2 - \frac{2 \operatorname{sen} x \times 2 \cos x}{2} = \pi - 2 \operatorname{sen} x \cos x$$

Resposta: **Opção A**



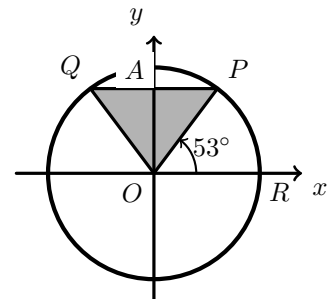
Exame – 2009, 1.ª Fase (adaptado)

50. Como o ponto P pertence ao circunferência que delimita o círculo trigonométrico, as suas coordenadas são $(\cos 53^\circ, \operatorname{sen} 53^\circ)$

Considerando um ponto A , sobre o lado $[PQ]$ do triângulo, tal que o ângulo OAP seja reto, como a reta PQ é paralela ao eixo Ox e a circunferência está centrada na origem, temos que $\overline{PA} = \overline{QA}$ e como $[PO]$ e $[OQ]$ são raios de um círculo trigonométrico, então $\overline{OP} = \overline{OQ} = 1$, e assim perímetro do triângulo $[OPQ]$, arredondado às décimas, é:

$$P[OPQ] = \overline{PA} + \overline{QA} + \overline{OP} + \overline{OQ} = 2 \times \overline{PA} + 2 \times \overline{OP} = 2 \times \cos 53^\circ + 2 \times 1 \approx 3,2$$

Resposta: **Opção A**



Teste Intermédio 11.º ano – 7.05.2009



51. Como uma rotação de -3π radianos corresponde a uma volta completa e mais meia volta ($-3\pi = -2\pi + (-\pi)$), no sentido dos ponteiros do relógio (porque o sentido positivo é contrário ao sentido dos ponteiros do relógio), então a Inês voltou a ver as horas 1 hora e meia depois da primeira vez.

Assim, uma hora e meia depois das 10 h e 45 min, corresponde a 12 h e 15 min.

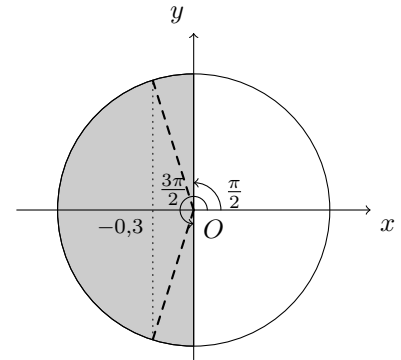
Resposta: **Opção C**

Teste Intermédio 11.º ano – 7.05.2009

52. Representando as amplitudes dos ângulos do intervalo $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ no círculo trigonométrico, podemos verificar que, neste intervalo a equação $\cos x = -0,3$ tem duas soluções.

Podemos ainda verificar que nos intervalos $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ e $\left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$ a equação não tem qualquer solução, porque $\cos x > 0$ nos 1.º e 4.º quadrantes; e que no intervalo $[0, \pi]$, a equação só tem uma solução (no segundo quadrante).

Resposta: **Opção B**



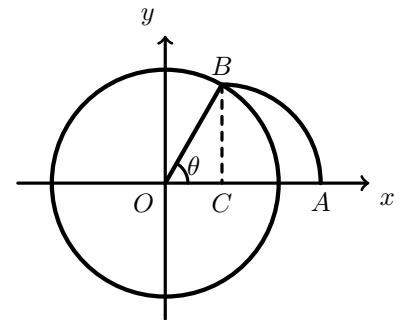
Teste Intermédio 11.º ano – 29.01.2009

53. Como $[OB]$ é um raio do círculo trigonométrico e O é a origem do referencial, então as coordenadas de B são $(\cos \theta, \sin \theta)$, ou seja, $\overline{OC} = \cos \theta$ e $\overline{BC} = \sin \theta$

Como o arco de circunferência AB tem centro no ponto C , temos que $\overline{BC} = \overline{AC}$, e assim a abcissa do ponto A é:

$$x_A = \overline{OA} = \overline{OC} + \overline{AC} = \cos \theta + \sin \theta$$

Resposta: **Opção C**



Teste Intermédio 11.º ano – 29.01.2009

54.

- 54.1. Recorrendo à definição de tangente temos que:

$$\operatorname{tg} x = \frac{\overline{BD}}{\overline{AB}} \Leftrightarrow \operatorname{tg} x = \frac{\overline{BD}}{2} \Leftrightarrow \overline{BD} = 2 \operatorname{tg} x$$

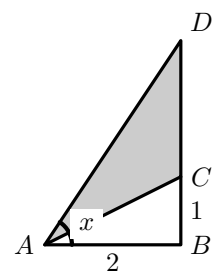
Como a área do triângulo $[ACD]$ pode ser calculada como a diferença das áreas dos triângulos $[ABD]$ e $[ABC]$, temos que a área do triângulo $[ACD]$ é dada, em função de x , por:

$$A_{[ACD]} = A_{[ABD]} - A_{[ABC]} = \frac{\overline{AB} \times \overline{BD}}{2} - \frac{\overline{AB} \times \overline{BC}}{2} = \frac{2 \times 2 \operatorname{tg} x}{2} - \frac{2 \times 1}{2} = 2 \operatorname{tg} x - 1$$

- 54.2. Equacionado o problema e resolvendo a equação, temos:

$$2 \operatorname{tg} x - 1 = 1 \Leftrightarrow 2 \operatorname{tg} x = 2 \Leftrightarrow \operatorname{tg} x = 1 \Leftrightarrow \operatorname{tg} x = \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

E assim, como $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ a única solução da equação é $\frac{\pi}{4}$, ou seja, a área do triângulo $[ACD]$ é igual a 1 se $x = \frac{\pi}{4}$



54.3. Como $\sin\left(\frac{\pi}{2} + a\right) = \cos a$, temos que $\cos a = \frac{5}{13}$

Como $\operatorname{tg}^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$, temos que:

$$\operatorname{tg}^2 a + 1 = \frac{1}{\left(\frac{5}{13}\right)^2} \Leftrightarrow \operatorname{tg}^2 a = \frac{1}{25} - 1 \Leftrightarrow \operatorname{tg}^2 a = \frac{169}{25} - \frac{25}{25} \Leftrightarrow \operatorname{tg} a = \pm \sqrt{\frac{144}{25}} \Leftrightarrow \operatorname{tg} a = \pm \frac{12}{5}$$

Como $a \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, então $\operatorname{tg} a > 0$ e assim, $\operatorname{tg} a = \frac{12}{5}$, pelo que o valor de $2 \operatorname{tg} a - 1$, é:

$$2 \times \frac{12}{5} - 1 = \frac{24}{5} - \frac{5}{5} = \frac{19}{5}$$

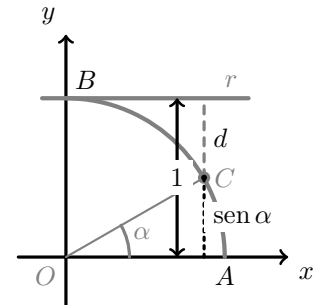
Teste Intermédio 11.º ano – 29.01.2009

55. Como a circunferência tem lado 1, é a circunferência que delimita o círculo trigonométrico, e por isso, o ponto C tem coordenadas $(\cos \alpha, \operatorname{sen} \alpha)$; em particular a ordenada é $y_C = \operatorname{sen} \alpha$

Como a reta r é paralela ao eixo Ox e a distância entre a reta e o eixo é 1, temos que:

$$d + y_C = 1 \Leftrightarrow d + \operatorname{sen} \alpha = 1 \Leftrightarrow d = 1 - \operatorname{sen} \alpha$$

Resposta: **Opção B**



Teste Intermédio 11.º ano – 6.05.2008

56. Como $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, então x é um ângulo do 1º quadrante, pelo que $\operatorname{sen} x > 0$ e $\cos x > 0$

Assim, temos que:

- $\cos(\pi - x) = -\cos x$, ou seja, $\cos(\pi - x) < 0$
- $\operatorname{sen}(\pi - x) = \operatorname{sen} x$, ou seja, $\operatorname{sen}(\pi - x) > 0$
- $\cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = -\cos x$, ou seja, $\cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) < 0$
- $\operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = -\operatorname{sen} x$, ou seja, $\operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) < 0$

Resposta: **Opção B**

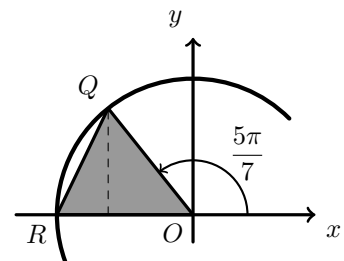
Teste Intermédio 11.º ano – 6.05.2008

57. Como o ponto Q está sobre um círculo trigonométrico, temos as coordenadas do ponto Q são $\left(\cos \frac{5\pi}{7}, \operatorname{sen} \frac{5\pi}{7}\right)$

Considerando o lado $[OR]$ como a base, a medida da altura é y_Q (a ordenada do ponto Q). E assim a área do triângulo pode ser calculada como:

$$A_{[OQR]} = \frac{\overline{OR} \times y_Q}{2} = \frac{1 \times \operatorname{sen} \frac{5\pi}{7}}{2} \approx 0,39$$

Resposta: **Opção A**



Teste Intermédio 12.º ano – 29.04.2008



58. Como a soma dos ângulos internos de um triângulo é π radianos, vem que:

$$\alpha + \alpha + \beta = \pi \Leftrightarrow \beta = \pi - 2\alpha$$

E assim, como $\cos(\pi - x) = -\cos x$, vem que:

$$\beta = \pi - 2\alpha \Rightarrow \cos \beta = \cos(\pi - 2\alpha) \Leftrightarrow \cos \beta = -\cos(2\alpha)$$

Resposta: **Opção D**

Teste Intermédio 11.º ano – 24.01.2008

59. Como $\theta \in \left] \frac{\pi}{2}, \pi \right[$ então θ é um ângulo do 2º quadrante, pelo que:

- $\sin \theta > 0$
- $\cos \theta < 0$
- $\operatorname{tg} \theta < 0$

E desta forma, temos que:

- $\cos \theta - \sin \theta < 0$ (subtração de um valor negativo por um positivo, ou soma de dois negativos)
- $\sin \theta \times \cos \theta < 0$ (produto de um número positivo por um negativo)
- $\sin \theta \times \operatorname{tg} \theta < 0$ (produto de um número positivo por um negativo)
- $\sin \theta - \operatorname{tg} \theta > 0$ (subtração de um valor positivo por um negativo, ou soma de dois positivos)

Resposta: **Opção D**

Teste Intermédio 11.º ano – 24.01.2008

60. Resolvendo a equação, temos:

$$1 + 3 \operatorname{tg}(2x) = 4 \Leftrightarrow 3 \operatorname{tg}(2x) = 4 - 1 \Leftrightarrow \operatorname{tg}(2x) = \frac{3}{3} \Leftrightarrow \operatorname{tg}(2x) = 1 \Leftrightarrow \operatorname{tg}(2x) = \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

Desta forma, se $k = 1$ uma solução da equação é:

$$x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{8} + \frac{4\pi}{8} = \frac{5\pi}{8}$$

Resposta: **Opção C**

Teste Intermédio 11.º ano – 24.01.2008

61.

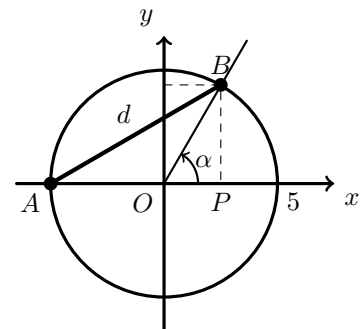
61.1. Considerando o ponto P , como a projeção ortogonal do ponto B sobre o eixo Ox , e usando a definição de seno e cosseno temos que:

$$\sin \alpha = \frac{\overline{BP}}{\overline{OB}} \Leftrightarrow \sin \alpha = \frac{\overline{BP}}{5} \Leftrightarrow \overline{BP} = 5 \sin \alpha$$

$$\cos \alpha = \frac{\overline{OP}}{\overline{OB}} \Leftrightarrow \cos \alpha = \frac{\overline{OP}}{5} \Leftrightarrow \overline{OP} = 5 \cos \alpha$$

Como o triângulo $[ABP]$ é retângulo em P , recorrendo ao teorema de Pitágoras, vem que:

$$\begin{aligned} d^2 &= \overline{BP}^2 + \overline{AP}^2 = \overline{BP}^2 + (\overline{AO} + \overline{OP})^2 = (5 \sin \alpha)^2 + (5 + 5 \cos \alpha)^2 = \\ &= 25 \sin^2 \alpha + 25 + 50 \cos \alpha + 25 \cos^2 \alpha = 25 \sin^2 \alpha + 25 \cos^2 \alpha + 25 + 50 \cos \alpha = \\ &= 25 (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) + 25 + 50 \cos \alpha = 25 \times 1 + 25 + 50 \cos \alpha = 50 + 50 \cos \alpha \end{aligned}$$



61.2. Como $\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{24}$ e como $\operatorname{tg}^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$, temos que:

$$\left(\sqrt{24}\right)^2 + 1 = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Leftrightarrow 24 + 1 = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Leftrightarrow \cos^2 \alpha = \frac{1}{25} \Leftrightarrow \cos \alpha = \pm \sqrt{\frac{1}{25}} \Leftrightarrow \cos \alpha = \pm \frac{1}{5}$$

Como o ponto B se desloca ao longo da circunferência, no primeiro quadrante, então α é um ângulo do 1º quadrante, $\cos \alpha > 0$, e assim, temos que $\cos \alpha = \frac{1}{5}$

Assim, temos que:

$$d^2 = 50 + 50 \times \frac{1}{5} \Leftrightarrow d^2 = 50 + 10 \Leftrightarrow d^2 = 60 \underset{d>0}{\Rightarrow} d = \sqrt{60}$$

Teste Intermédio 11.º ano – 24.01.2008

62. Resolvendo a equação, temos:

$$5 + 2 \cos x = 6 \Leftrightarrow 2 \cos x = 6 - 5 \Leftrightarrow \cos x = \cos \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \vee x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Desta forma, as soluções da equação que pertencem ao intervalo $]0, 2\pi[$, são:

$$x = \frac{\pi}{3} \quad (k = 0) \quad \text{e} \quad x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi = \frac{5\pi}{3} \quad (k = 1)$$

Resposta: **Opção B**

Teste Intermédio 11.º ano – 10.05.2007

63. Como a ordenada do ponto de intersecção do prolongamento da semirreta $\hat{O}A$ com a reta de equação $x = 1$ é $\sqrt{8}$, temos que $\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{8}$

Como $\operatorname{tg}^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$, temos que:

$$\left(\sqrt{8}\right)^2 + 1 = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Leftrightarrow 8 + 1 = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Leftrightarrow \cos^2 \alpha = \frac{1}{9} \Leftrightarrow \cos \alpha = \pm \sqrt{\frac{1}{9}} \Leftrightarrow \cos \alpha = \pm \frac{1}{3}$$

Como α é um ângulo do 3º quadrante, $\cos \alpha < 0$, e assim, temos que $\cos \alpha = -\frac{1}{3}$

Assim, podemos observar que:

- $\operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{2} + \alpha \right) = \cos \alpha = -\frac{1}{3}$
- $\cos(3\pi - \alpha) = \cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha = -\left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}$

E, desta forma, vem que:

$$5 \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{2} + \alpha \right) + 2 \cos(3\pi - \alpha) = 5 \left(-\frac{1}{3} \right) + 2 \times \frac{1}{3} = -\frac{5}{3} + \frac{2}{3} = -\frac{3}{3} = -1$$

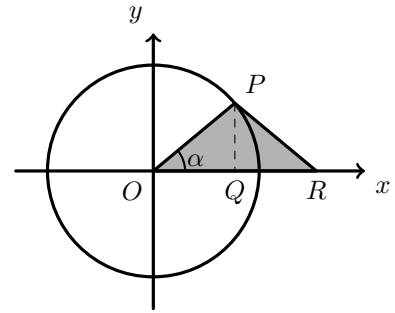
Teste Intermédio 11.º ano – 10.05.2007



64. Considerando o ponto Q como o pé da altura do triângulo relativa à base $[OR]$ e usando a definição de seno e cosseno temos que:

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{\overline{PQ}}{\overline{OP}} \Leftrightarrow \operatorname{sen} \alpha = \frac{\overline{PQ}}{1} \Leftrightarrow \overline{PQ} = \operatorname{sen} \alpha$$

$$\operatorname{cos} \alpha = \frac{\overline{OQ}}{\overline{OA}} \Leftrightarrow \operatorname{cos} \alpha = \frac{\overline{OQ}}{1} \Leftrightarrow \overline{OQ} = \operatorname{cos} \alpha$$



Assim, como o triângulo $[OPR]$ é isósceles, $\overline{OP} = \overline{PR}$ e também $\overline{OQ} = \overline{QR}$, pelo que a área do triângulo, em função de α , é:

$$A_{[OPR]} = \frac{\overline{OR} \times \overline{PQ}}{2} = \frac{(\overline{OQ} + \overline{QR}) \times \overline{PQ}}{2} = \frac{(\operatorname{cos} \alpha + \operatorname{cos} \alpha) \times \operatorname{sen} \alpha}{2} = \frac{2 \operatorname{cos} \alpha \times \operatorname{sen} \alpha}{2} = \operatorname{cos} \alpha \times \operatorname{sen} \alpha$$

Resposta: **Opção A**

Teste Intermédio 11.º ano – 19.05.2006

65. Pela fórmula fundamental da trigonometria, temos que:

$$\operatorname{sen}^2 \alpha + \operatorname{cos}^2 \alpha = 1 \Leftrightarrow \operatorname{sen}^2 \alpha = 1 - \operatorname{cos}^2 \alpha \Leftrightarrow \operatorname{sen} \alpha = \pm \sqrt{1 - \operatorname{cos}^2 \alpha}$$

Como $\operatorname{cos} \alpha < 0$ e $\operatorname{tg} \alpha > 0$, então α é um ângulo do 3º quadrante, e assim $\operatorname{sen} \alpha < 0$, pelo que:

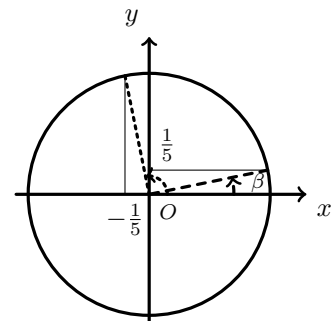
$$\operatorname{sen} \alpha = -\sqrt{1 - \operatorname{cos}^2 \alpha}$$

Resposta: **Opção B**

Teste Intermédio 11.º ano – 19.05.2006

66. Representando no círculo trigonométrico um ângulo de amplitude β , tal que, $\operatorname{sen} \beta = \frac{1}{5}$ (como na figura ao lado), podemos verificar que, a representação do ângulo com amplitude $\frac{\pi}{2} + \beta$ verifica a condição $\operatorname{cos} \left(\frac{\pi}{2} + \beta \right) = -\frac{1}{5}$, ou seja:

$$\operatorname{cos} \left(\frac{\pi}{2} + \beta \right) = -\operatorname{sen} \beta$$



E assim, de entre as opções apresentadas $\frac{\pi}{2} + \beta$ é a única solução da equação $\operatorname{cos} x = -\frac{1}{5}$

Resposta: **Opção B**

Teste Intermédio 11.º ano – 19.05.2006



67. Considerando o lado $[OC]$ como a base do triângulo ($\overline{OC} = 1$), a altura será o segmento que contém o ponto P e a sua projeção ortogonal (P') sobre a reta OC .

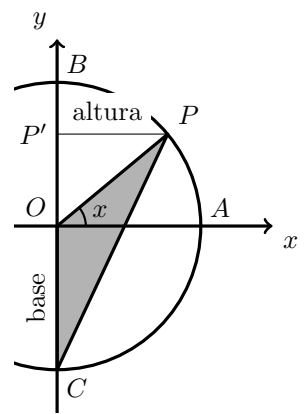
Como $\overline{OP} = 1$, recorrendo à definição de cosseno, vem:

$$\cos x = \frac{\overline{PP'}}{\overline{OP}} \Leftrightarrow \cos x = \frac{\overline{PP'}}{1} \Leftrightarrow \overline{PP'} = \cos x$$

Assim a área do triângulo $[OPC]$ é:

$$A_{[OPC]} = \frac{\overline{OC} \times \overline{PP'}}{2} = \frac{1 \times \cos x}{2} = \frac{\cos x}{2}$$

Resposta: **Opção B**



Exame – 2006, Ép. especial

68. Como o arco BA é um arco de uma circunferência de raio 1, e com amplitude α , tem de comprimento α .

Como $\overline{OA} = 1$, e recorrendo às definições de seno e cosseno, vem:

$$\sin \alpha = \frac{\overline{AC}}{\overline{OA}} \Leftrightarrow \sin \alpha = \frac{\overline{AC}}{1} \Leftrightarrow \overline{AC} = \sin \alpha$$

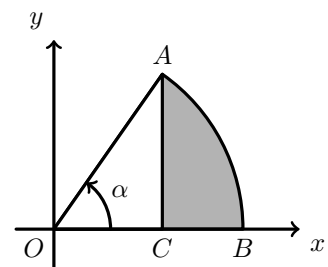
$$\cos \alpha = \frac{\overline{OC}}{\overline{OA}} \Leftrightarrow \cos \alpha = \frac{\overline{OC}}{1} \Leftrightarrow \overline{OC} = \cos \alpha$$

Logo, $\overline{OB} = \overline{OC} + \overline{CB} \Leftrightarrow 1 = \cos \alpha + \overline{CB} \Leftrightarrow \overline{CB} = 1 - \cos \alpha$

Assim, o perímetro da região sombreada é:

$$P = \alpha + \overline{AC} + \overline{CB} = \alpha + \sin \alpha + 1 - \cos \alpha = 1 + \alpha + \sin \alpha - \cos \alpha$$

Resposta: **Opção D**



Exame – 2006, 2.ª Fase

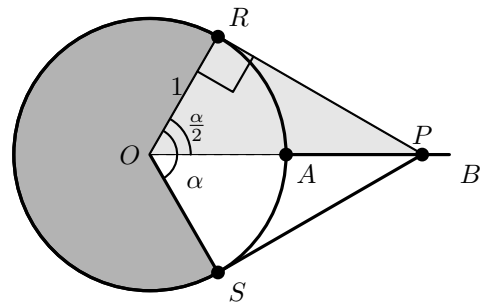
69. Como a reta PR é tangente à circunferência no ponto R , é perpendicular ao raio $[OR]$, ou seja o ângulo ORP é reto, e por isso o triângulo $[ORP]$ é retângulo.

Como o ângulo POR tem amplitude $\frac{\alpha}{2}$ radianos e $\overline{OR} = 1$, recorrendo à definição de tangente, temos:

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{\overline{RP}}{\overline{OR}} \Leftrightarrow \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{\overline{RP}}{1} \Leftrightarrow \overline{RP} = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$$

Logo, considerando $[OR]$ como a base do triângulo $[ORP]$ e $[RP]$ como a altura, vem:

$$A_{[ORP]} = \frac{\overline{OR} \times \overline{RP}}{2} = \frac{1 \times \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{2} = \frac{\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{2}$$



Como os pontos R e S são simétricos relativamente à reta AB , temos que, para cada valor de $\alpha \in]0, \pi[$, a área do quadrilátero $[ORPS]$ é dada por:

$$A_{[ORPS]} = A_{[ORP]} + A_{[OPS]} = 2 \times A_{[ORP]} = 2 \times \frac{\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{2} = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$$

Exame – 2005, Ép. especial (cód. 435)



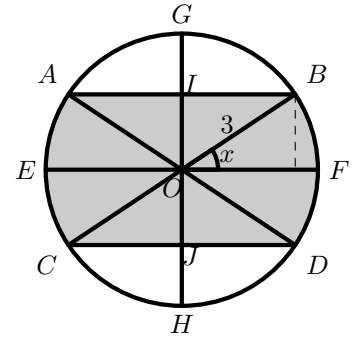
70. Como $\overline{OB} = 3$, recorrendo à definição de seno e cosseno temos:

$$\sin x = \frac{\overline{OI}}{\overline{OB}} \Leftrightarrow \sin x = \frac{\overline{OI}}{3} \Leftrightarrow \overline{OI} = 3 \sin x$$

$$\cos x = \frac{\overline{BI}}{\overline{OB}} \Leftrightarrow \cos x = \frac{\overline{BI}}{3} \Leftrightarrow \overline{BI} = 3 \cos x$$

Recorrendo à decomposição sugerida na figura temos que a área da zona sombreada pode ser obtida através da soma das áreas de 4 triângulos congruentes e de 4 setores circulares de raio 3 e amplitude x , ou seja, para cada valor de $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, a área da região sombreada é dada por:

$$\begin{aligned} A &= 4 \times A_{[OIB]} + 4 \times A_{\text{setor}FB} = 4 \times \frac{\overline{OI} \times \overline{BI}}{2} + 4 \times \frac{x \times \overline{OB}^2}{2} = 4 \times \frac{3 \sin x \times 3 \cos x}{2} + 4 \times \frac{x \times 3^2}{2} = \\ &= 2 \times 9 \sin x \cdot \cos x + 2 \times x \times 9 = 18x + 18 \sin x \cdot \cos x = 18(x + \sin x \cdot \cos x) \end{aligned}$$



Exame – 2005, 1.ª Fase (cód. 435)

71. Como $\overline{OR} = 5$, recorrendo à definição de seno e cosseno, e notando que $\overline{CR} = \overline{OB}$ e ainda que $\overline{OC} = \overline{BR}$, temos:

$$\sin x = \frac{\overline{CR}}{\overline{OR}} \Leftrightarrow \sin x = \frac{\overline{CR}}{5} \Leftrightarrow \overline{CR} = 5 \sin x \Leftrightarrow \overline{OB} = 5 \sin x$$

$$\cos x = \frac{\overline{OC}}{\overline{OR}} \Leftrightarrow \cos x = \frac{\overline{OC}}{5} \Leftrightarrow \overline{OC} = 5 \cos x \Leftrightarrow \overline{BR} = 5 \cos x$$

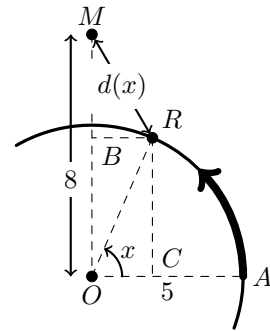
Temos ainda que:

$$\overline{OB} + \overline{BM} = 8 \Leftrightarrow \overline{BM} = 8 \Leftrightarrow \overline{BM} = 8 - \overline{OB} \Leftrightarrow \overline{BM} = 8 - 5 \sin x$$

Logo, usando o Teorema de Pitágoras, vem:

$$\begin{aligned} \overline{RM}^2 &= \overline{BM}^2 + \overline{BR}^2 \Leftrightarrow \overline{RM}^2 = (8 - 5 \sin x)^2 + (5 \cos x)^2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \overline{RM}^2 &= 64 - 80 \sin x + 25 \sin^2 x + 25 \cos^2 x \Leftrightarrow \overline{RM}^2 = 64 - 80 \sin x + 25(\sin^2 x + \cos^2 x) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \overline{RM}^2 &= 64 - 80 \sin x + 25(1) \Leftrightarrow \overline{RM}^2 = 64 + 25 - 80 \sin x \Leftrightarrow \overline{RM}^2 = 89 - 80 \sin x \end{aligned}$$

Logo, para cada valor de x , a distância da Rita à mãe, é: $\overline{RM} = \sqrt{89 - 80 \sin x}$



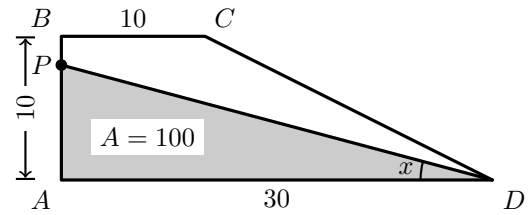
Exame – 2003, Prova para militares (cód. 435)



72. Calculando a área do trapézio, temos:

$$A_{[ABCD]} = \frac{\overline{AD} + \overline{BC}}{2} \times \overline{AB} = \frac{30 + 10}{2} \times 10 = 20 \times 10 = 200$$

Logo, dividir o trapézio em duas figuras com a mesma área, significa que o triângulo $[APD]$ terá área 100.



Usando a definição de tangente vem:

$$\operatorname{tg} x = \frac{\overline{PA}}{\overline{AD}} \Leftrightarrow \operatorname{tg} x = \frac{\overline{PA}}{30} \Leftrightarrow \overline{PA} = 30 \operatorname{tg} x$$

$$\text{Logo a área do triângulo } [APD], \text{ é: } A_{[APD]} = \frac{\overline{AD} \times \overline{PA}}{2} = \frac{30 \times 30 \operatorname{tg} x}{2} = \frac{30^2 \operatorname{tg} x}{2}$$

$$\text{Ou seja, } A_{[APD]} = 100 \Leftrightarrow \frac{30^2 \operatorname{tg} x}{2} = 100$$

Resposta: **Opção B**

Exame – 2003, 2.ª Fase (cód. 435)

73. Como $\operatorname{tg}^2 x + 1 = \frac{1}{\cos^2 x}$ e $\operatorname{tg} \theta = \frac{1}{2}$, vem:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1 = \frac{1}{\cos^2 \theta} \Leftrightarrow \frac{1}{4} + 1 = \frac{1}{\cos^2 \theta} \Leftrightarrow \frac{5}{4} = \frac{1}{\cos^2 \theta} \Leftrightarrow \cos^2 \theta = \frac{1}{\frac{5}{4}} \Leftrightarrow \cos^2 \theta = \frac{4}{5}$$

Como $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$ e $\cos^2 \theta = \frac{4}{5}$, vem:

$$\operatorname{sen}^2 \theta + \frac{4}{5} = 1 \Leftrightarrow \operatorname{sen}^2 \theta = 1 - \frac{4}{5} \Leftrightarrow \operatorname{sen}^2 \theta = \frac{5}{5} - \frac{4}{5} \Leftrightarrow \operatorname{sen}^2 \theta = \frac{1}{5}$$

$$\text{Logo, } 2 - 5 \operatorname{sen}^2 \theta = 2 - 5 \left(\frac{1}{5}\right) = 2 - 1 = 1$$

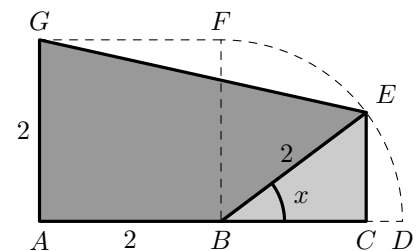
Exame – 2003, 1.ª fase - 2.ª chamada (cód. 435) (adaptado)

74.

74.1. Considerando o triângulo $[BCE]$, e recorrendo à definição de seno e cosseno, temos:

$$\operatorname{sen} x = \frac{\overline{CE}}{\overline{BE}} \Leftrightarrow \operatorname{sen} x = \frac{\overline{CE}}{2} \Leftrightarrow \overline{CE} = 2 \operatorname{sen} x$$

$$\operatorname{cos} x = \frac{\overline{BC}}{\overline{BE}} \Leftrightarrow \operatorname{cos} x = \frac{\overline{BC}}{2} \Leftrightarrow \overline{BC} = 2 \operatorname{cos} x$$



Logo, considerando a área da zona sombreada como a diferença das áreas do trapézio $[ACEG]$ e do triângulo $[BCE]$, para cada valor de $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, a área do polígono $[ABEG]$ é dada por:

$$\begin{aligned} A_{[ABEG]} &= A_{[ACEG]} - A_{[BCE]} = \frac{\overline{AG} + \overline{CE}}{2} \times \overline{AC} - \frac{\overline{BC} \times \overline{CE}}{2} = \frac{2 + 2 \operatorname{sen} x}{2} \times (2 + \overline{BC}) - \frac{2 \operatorname{cos} x \times 2 \operatorname{sen} x}{2} = \\ &= (1 + \operatorname{sen} x) \times (2 + 2 \operatorname{cos} x) - \frac{4 \operatorname{sen} x \operatorname{cos} x}{2} = 2 + 2 \operatorname{cos} x + 2 \operatorname{sen} x + 2 \operatorname{sen} x \operatorname{cos} x - 2 \operatorname{sen} x \operatorname{cos} x = \\ &= 2 + 2 \operatorname{sen} x + 2 \operatorname{cos} x = 2(1 + \operatorname{sen} x + \operatorname{cos} x) \end{aligned}$$



- 74.2. • Se $x = 0$, então $A_{[ABEG]} = 2(1 + \sin(0) + \cos(0)) = 2(1 + 0 + 1) = 2 \times 2 = 4$
 O que também pode ser observado na figura, porque se $x = 0$, o ponto E coincide com o ponto D , e por isso a área sombreada também pode ser calculada como a área do triângulo $[AGD]$:

$$A_{[AGD]} = \frac{\overline{AG} \times \overline{AD}}{2} = \frac{4 \times 2}{2} = 4$$

- Se $x = \frac{\pi}{2}$, então $A_{[ABEG]} = 2\left(2(1 + \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2}\right))\right) = 2(1 + 1 + 0) = 2 \times 2 = 4$
 O que também pode ser observado na figura, porque se $x = \frac{\pi}{2}$, o ponto E coincide com o ponto F , e por isso a área sombreada também pode ser calculada como a área do quadrado $[ABFG]$:

$$A_{[ABFG]} = \overline{AB} \times \overline{AG} = 2 \times 2 = 4$$

Exame – 2003, 1.ª fase - 1.ª chamada (cód. 435)

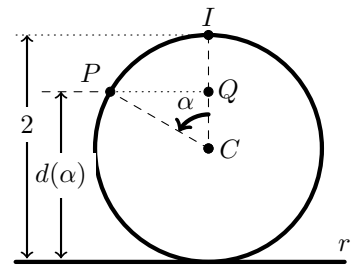
75. Considerando o ponto I como a posição inicial do ponto P , e o ponto Q como a projeção ortogonal do ponto P sobre a reta IC , pela definição de cosseno vem:

$$\cos \alpha = \frac{\overline{CQ}}{\overline{CP}} \Leftrightarrow \cos \alpha = \frac{\overline{CQ}}{1} \Leftrightarrow \overline{CQ} = \cos \alpha$$

Como $\overline{CQ} + \overline{QI} = 1 \Leftrightarrow \overline{QI} = 1 - \overline{CQ} \Leftrightarrow \overline{QI} = 1 - \cos \alpha$, temos que:

$$\begin{aligned} d(\alpha) &= 2 - \overline{QI} \Leftrightarrow d(\alpha) = 2 - (1 - \cos \alpha) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow d(\alpha) = 2 - 1 + \cos \alpha \Leftrightarrow d(\alpha) = 1 + \cos \alpha \end{aligned}$$

Resposta: **Opção A**



Exame – 2002, 2.ª fase (cód. 435)

76. Considerando o ponto P como intersecção da reta AB com o eixo Ox e usando a definição de seno e cosseno temos que:

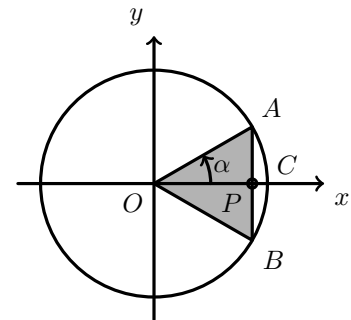
$$\sin \alpha = \frac{\overline{AP}}{\overline{OA}} \Leftrightarrow \sin \alpha = \frac{\overline{AP}}{1} \Leftrightarrow \overline{AP} = \sin \alpha$$

$$\cos \alpha = \frac{\overline{OP}}{\overline{OA}} \Leftrightarrow \cos \alpha = \frac{\overline{OP}}{1} \Leftrightarrow \overline{OP} = \cos \alpha$$

Assim, considerando $[AB]$ como a base e $[OP]$ como a altura, a área do triângulo $[OAB]$ é:

$$A_{[OAB]} = \frac{\overline{AB} \times \overline{OP}}{2} = \frac{2 \times \overline{AP} \times \overline{OP}}{2} = \overline{AP} \times \overline{OP} = \sin \alpha \cdot \cos \alpha$$

Resposta: **Opção A**



Exame – 2002, 1.ª fase - 2.ª chamada (cód. 435)



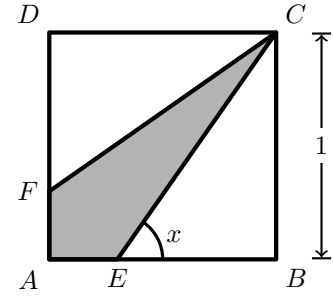
77. Usando as definições de seno e tangente, vem:

$$\operatorname{sen} x = \frac{\overline{BC}}{\overline{EC}} \Leftrightarrow \operatorname{sen} x = \frac{1}{\overline{EC}} \Leftrightarrow \overline{EC} = \frac{1}{\operatorname{sen} x}$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{\overline{BC}}{\overline{EB}} \Leftrightarrow \operatorname{tg} x = \frac{1}{\overline{EB}} \Leftrightarrow \overline{EB} = \frac{1}{\operatorname{tg} x}$$

Sabemos ainda que

$$\overline{AE} + \overline{EB} = 1 \Leftrightarrow \overline{AE} = 1 - \overline{EB} \Leftrightarrow \overline{AE} = 1 - \frac{1}{\operatorname{tg} x}$$



Assim, como $\overline{FC} = \overline{EC}$ e $\overline{AF} = \overline{AE}$, para cada valor de $x \in \left] \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2} \right[$, o perímetro do quadrilátero é:

$$P_{[CEAF]} = 2 \times \overline{AE} + 2 \times \overline{EC} = 2 \times \left(1 - \frac{1}{\operatorname{tg} x} \right) + 2 \times \frac{1}{\operatorname{sen} x} = 2 - \frac{2}{\operatorname{tg} x} + \frac{2}{\operatorname{sen} x}$$

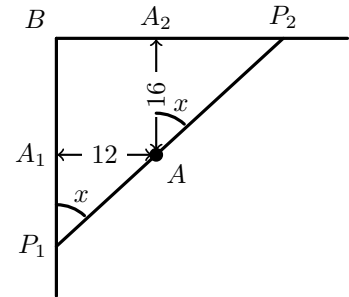
Exame – 2002, 1.ª fase - 1.ª chamada (cód. 435)

78.

78.1. Considerando A_1 e A_2 as projeções ortogonais do ponto sobre as retas BP_1 e BP_2 , respectivamente, temos que o ângulo A_2AP_2 também tem amplitude x , pelo que recorrendo às definições de seno e cosseno temos:

$$\operatorname{sen} x = \frac{\overline{AA_1}}{\overline{AP_1}} \Leftrightarrow \operatorname{sen} x = \frac{12}{\overline{AP_1}} \Leftrightarrow \overline{AP_1} = \frac{12}{\operatorname{sen} x}$$

$$\operatorname{cos} x = \frac{\overline{AA_2}}{\overline{AP_2}} \Leftrightarrow \operatorname{cos} x = \frac{16}{\overline{AP_2}} \Leftrightarrow \overline{AP_2} = \frac{16}{\operatorname{cos} x}$$



Calculando o comprimento da ponte, em função de x , vem:

$$\overline{AP_2} + \overline{AP_1} = \frac{16}{\operatorname{cos} x} + \frac{12}{\operatorname{sen} x} = \frac{16 \operatorname{sen} x}{\operatorname{cos} x \cdot \operatorname{sen} x} + \frac{12 \operatorname{cos} x}{\operatorname{sen} x \cdot \operatorname{cos} x} = \frac{16 \operatorname{sen} x + 12 \operatorname{cos} x}{\operatorname{sen} x \cdot \operatorname{cos} x}$$

78.2. Se $\overline{BP_1} = \overline{BP_2}$, o triângulo $[P_1BP]$ é um triângulo retângulo isósceles, ou seja os ângulos agudos são iguais, e por isso, têm amplitude $\frac{\pi}{4}$ radianos.

Assim, calculando o comprimento da ponte, para $x = \frac{\pi}{4}$, vem:

$$\frac{16 \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{4} \right) + 12 \operatorname{cos} \left(\frac{\pi}{4} \right)}{\operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{4} \right) \cdot \operatorname{cos} \left(\frac{\pi}{4} \right)} = \frac{16 \times \frac{\sqrt{2}}{2} + 12 \times \frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{28 \times \frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{2}{4}} = 28\sqrt{2} \approx 39,6$$

Ou, seja, se o vértice a ponte for construída entre dois pontos equidistantes do vértice B , terá um comprimento aproximado de 39,6 metros.

Exame – 2001, Ép. especial (cód. 435)



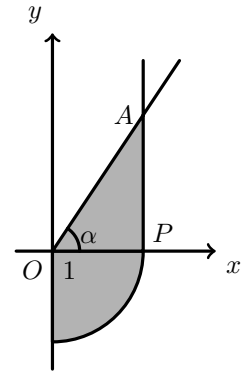
79. Designando o ponto $(1,0)$ por P e recorrendo à definição de tangente, temos que:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\overline{AP}}{\overline{OP}} \Leftrightarrow \operatorname{tg} \alpha = \frac{\overline{AP}}{1} \Leftrightarrow \overline{AP} = \operatorname{tg} \alpha$$

Logo, podemos calcular a área da região sombreada, como a soma do quarto de círculo de raio 1, com a área do triângulo $[OPA]$:

$$A = \frac{A_o}{4} + A_{[OPA]} = \frac{\pi \times 1^2}{4} + \frac{\overline{OP} \times \overline{AP}}{2} = \frac{\pi}{4} + \frac{1 \times \operatorname{tg} \alpha}{2} = \frac{\pi}{4} + \frac{\operatorname{tg} \alpha}{2}$$

Resposta: **Opção A**



Exame – 2001, 1.ª fase - 2.ª chamada (cód. 435)

80. Para determinar a área de uma das faces laterais, começamos determinar a altura do triângulo (\overline{EG}) .

Recorrendo à definição de cosseno, como $\overline{FG} = \frac{\overline{AB}}{2} = \frac{2}{2} = 1$, vem:

$$\cos x = \frac{\overline{FG}}{\overline{EG}} \Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{\overline{EG}} \Leftrightarrow \overline{EG} = \frac{1}{\cos x}$$

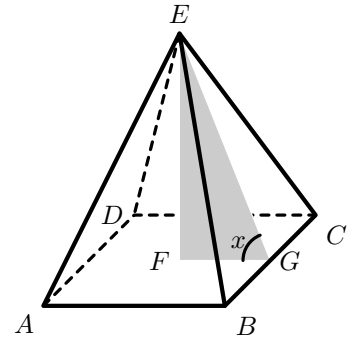
Assim, calculando a área do triângulo $[BCE]$, temos:

$$A_{[BCE]} = \frac{\overline{BC} \times \overline{EG}}{2} = \frac{2 \times \frac{1}{\cos x}}{2} = \frac{1}{\cos x}$$

Logo, para cada valor de $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$, a área da pirâmide é dada por:

$$A_T = 4 \times A_{[BCE]} + A_{[ABCD]} = 4 \times \frac{1}{\cos x} + 2 \times 2 = \frac{4}{\cos x} + 4 = \frac{4}{\cos x} + \frac{4 \cos x}{\cos x} = \frac{4 \cos x + 4}{\cos x}$$

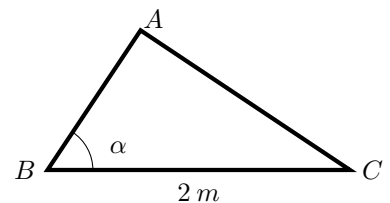
Exame – 2001, 1.ª fase - 1.ª chamada (cód. 435)



81. Recorrendo às definições de seno e cosseno temos:

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} \Leftrightarrow \operatorname{sen} \alpha = \frac{\overline{AC}}{2} \Leftrightarrow \overline{AC} = 2 \operatorname{sen} \alpha$$

$$\operatorname{cos} \alpha = \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} \Leftrightarrow \operatorname{cos} \alpha = \frac{\overline{AB}}{2} \Leftrightarrow \overline{AB} = 2 \operatorname{cos} \alpha$$



E assim, considerando o lado $[AB]$ como a base e o lado $[AC]$ como a altura, a área do triângulo $[ABC]$ é:

$$A_{[ABC]} = \frac{\overline{AB} \times \overline{AC}}{2} = \frac{2 \operatorname{cos} \alpha \times 2 \operatorname{sen} \alpha}{2} = \frac{4 \operatorname{sen} \alpha \cdot \operatorname{cos} \alpha}{2} = 2 \operatorname{sen} \alpha \cdot \operatorname{cos} \alpha$$

Resposta: **Opção A**

Exame – 2000, Prova para militares (cód. 135)

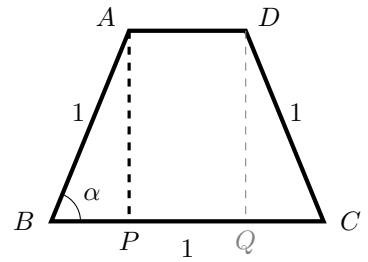


82.

82.1. Considerando as projeções ortogonais dos vértices A e D sobre o lado $[BC]$, respectivamente os pontos P e Q , e recorrendo às definições de seno e cosseno, vem:

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{\overline{AP}}{\overline{AB}} \Leftrightarrow \operatorname{sen} \alpha = \frac{\overline{AP}}{1} \Leftrightarrow \overline{AP} = \operatorname{sen} \alpha$$

$$\operatorname{cos} \alpha = \frac{\overline{BP}}{\overline{AB}} \Leftrightarrow \operatorname{cos} \alpha = \frac{\overline{BP}}{1} \Leftrightarrow \overline{BP} = \operatorname{cos} \alpha$$



Logo, como $\overline{AD} = 1 - \overline{BP} - \overline{QC} = 1 - 2\overline{BP} = 1 - 2\operatorname{cos} \alpha$, para cada valor de $\alpha \in \left] \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2} \right]$ a área do trapézio é:

$$\begin{aligned} A_{[ABCD]} &= \frac{\overline{BC} + \overline{AD}}{2} \times \overline{AP} = \frac{1 + 1 - 2\operatorname{cos} \alpha}{2} \times \operatorname{sen} \alpha = \frac{2 - 2\operatorname{cos} \alpha}{2} \times \operatorname{sen} \alpha = \left(\frac{2}{2} - \frac{2\operatorname{cos} \alpha}{2} \right) \times \operatorname{sen} \alpha = \\ &= (1 - \operatorname{cos} \alpha) \operatorname{sen} \alpha = (\operatorname{sen} \alpha)(1 - \operatorname{cos} \alpha) \end{aligned}$$

82.2. Se $\alpha = \frac{\pi}{2}$, então a área do trapézio é:

$$\left(\operatorname{sen} \frac{\pi}{2} \right) \left(1 - \operatorname{cos} \frac{\pi}{2} \right) = 1 \times (1 - 0) = 1 \times 1 = 1$$

Se $\alpha = \frac{\pi}{2}$, o ângulo ABC é reto, tal como o ângulo BCD , e como os lados $[AB]$, $[BC]$ e $[CD]$ são congruentes, o quadrilátero é um quadrado de lado 1, pelo que a sua área também é 1, de acordo com o cálculo anterior.

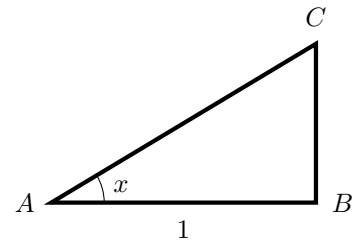
Exame – 1999, Prova modelo (cód. 135) (adaptado)

83.

83.1. Usando as definições de cosseno e de tangente, temos:

$$\operatorname{cos} x = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} \Leftrightarrow \operatorname{cos} x = \frac{1}{\overline{AC}} \Leftrightarrow \overline{AC} = \frac{1}{\operatorname{cos} x}$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} \Leftrightarrow \operatorname{tg} x = \frac{\overline{BC}}{1} \Leftrightarrow \overline{BC} = \operatorname{tg} x$$



Logo, para cada valor de $x \in \left] 0, \frac{\pi}{2} \right[$, o perímetro do triângulo é:

$$P_{[ABC]} = \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{AC} = 1 + \operatorname{tg} x + \frac{1}{\operatorname{cos} x} = \frac{\operatorname{cos} x}{\operatorname{cos} x} + \frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{cos} x} + \frac{1}{\operatorname{cos} x} = \frac{1 + \operatorname{sen} x + \operatorname{cos} x}{\operatorname{cos} x}$$

83.2. Como $\operatorname{cos} \left(\frac{\pi}{2} + \alpha \right) = -\operatorname{sen} \alpha$, temos que: $\operatorname{sen} \alpha = - \left(-\frac{3}{5} \right) = \frac{3}{5}$

E, pela fórmula fundamental ($\operatorname{sen}^2 \alpha + \operatorname{cos}^2 \alpha = 1$), temos que:

$$\left(\frac{3}{5} \right)^2 + \operatorname{cos}^2 \alpha = 1 \Leftrightarrow \operatorname{cos}^2 \alpha = 1 - \frac{9}{25} \Leftrightarrow \operatorname{cos}^2 \alpha = \frac{25}{25} - \frac{9}{25} \Leftrightarrow \operatorname{cos}^2 \alpha = \frac{16}{25} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{cos} \alpha = \pm \sqrt{\frac{16}{25}} \Leftrightarrow \operatorname{cos} \alpha = \pm \frac{4}{5}$$

Como $\alpha \in \left] 0, \frac{\pi}{2} \right[$ sabemos que $\operatorname{cos} \alpha > 0$, logo $\operatorname{cos} \alpha = \frac{4}{5}$

Desta forma, o valor do perímetro do triângulo $[ABC]$ para este valor de α é:

$$\frac{1 + \operatorname{sen} \alpha + \operatorname{cos} \alpha}{\operatorname{cos} \alpha} = \frac{1 + \frac{3}{5} + \frac{4}{5}}{\frac{4}{5}} = \frac{\frac{5}{5} + \frac{3}{5} + \frac{4}{5}}{\frac{4}{5}} = \frac{5 + 3 + 4}{4} = \frac{12}{4} = 3$$

Exame – 1998, Prova para militares (cód. 135)



84. Como $\overline{DE} = 1$ e $\overline{EH} = \frac{\overline{DG}}{2} = 1$, e recorrendo à definição de tangente, vem:

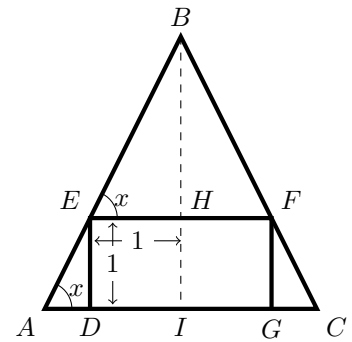
$$\operatorname{tg} x = \frac{\overline{DE}}{\overline{AD}} \Leftrightarrow \operatorname{tg} x = \frac{1}{\overline{AD}} \Leftrightarrow \overline{AD} = \frac{1}{\operatorname{tg} x}$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{\overline{BH}}{\overline{EH}} \Leftrightarrow \operatorname{tg} x = \frac{\overline{BH}}{1} \Leftrightarrow \overline{BH} = \operatorname{tg} x$$

Assim, temos que:

$$\overline{AC} = \overline{AD} + \overline{DG} + \overline{GC} = 2\overline{AD} + 2 = 2\left(\frac{1}{\operatorname{tg} x}\right) + 2 = \frac{2}{\operatorname{tg} x} + 2$$

$$\overline{BI} = \overline{BH} + \overline{HI} = \operatorname{tg} x + 1$$



Logo, para cada valor de $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$, a área do triângulo $[ABC]$ é:

$$\begin{aligned} A_{[ABC]} &= \frac{\overline{AC} \times \overline{BI}}{2} = \frac{\left(\frac{2}{\operatorname{tg} x} + 2\right) \times (\operatorname{tg} x + 1)}{2} = \frac{\frac{2 \operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} x} + \frac{2}{\operatorname{tg} x} + 2 \operatorname{tg} x + 2}{2} = \\ &= \frac{2\left(\operatorname{tg} x + \frac{1}{\operatorname{tg} x} + \operatorname{tg} x + 1\right)}{2} = 1 + \frac{1}{\operatorname{tg} x} + \operatorname{tg} x + 1 = 2 + \operatorname{tg} x + \frac{1}{\operatorname{tg} x} \end{aligned}$$

Exame – 1998, 2.ª fase (cód. 135)

85. Considerando o ponto P como a projeção ortogonal do vértice B sobre a reta HF , e recorrendo às definições de seno e cosseno, vem:

$$\operatorname{sen} x = \frac{\overline{BP}}{\overline{OB}} \Leftrightarrow \operatorname{sen} x = \frac{\overline{BP}}{5} \Leftrightarrow \overline{BP} = 5 \operatorname{sen} x$$

$$\operatorname{cos} x = \frac{\overline{OP}}{\overline{OB}} \Leftrightarrow \operatorname{cos} x = \frac{\overline{OP}}{5} \Leftrightarrow \overline{OP} = 5 \operatorname{cos} x$$

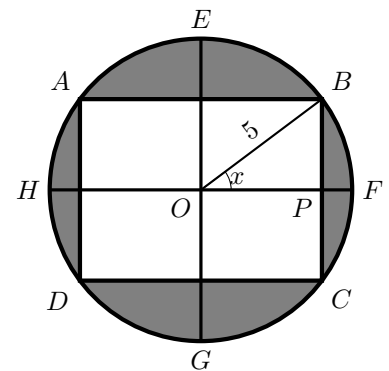
Sabemos ainda que

- $\overline{AB} = 2\overline{OP} = 2 \times 5 \operatorname{cos} x = 10 \operatorname{cos} x$
- $\overline{BC} = 2\overline{BP} = 2 \times 5 \operatorname{sen} x = 10 \operatorname{sen} x$

Logo, para cada valor de $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$ a área da zona relvada, em m^2 , é dada pela diferença da área da circunferência e do retângulo $[ABCD]$:

$$\begin{aligned} A &= A_{\circ} - A_{[ABCD]} = \pi (\overline{OB})^2 - \overline{AB} \times \overline{BC} = \pi(5)^2 - 10 \operatorname{cos} x \times 10 \operatorname{sen} x = \\ &= 25\pi - 100 \operatorname{sen} x \cdot \operatorname{cos} x = 25(\pi - 4 \operatorname{sen} x \cdot \operatorname{cos} x) \end{aligned}$$

Exame – 1998, 1.ª fase - 2.ª chamada (cód. 135)



86.

86.1. Como $\overline{AM} = \frac{\overline{AB}}{2} = \frac{4}{2} = 2$, e recorrendo à definição de cosseno e tangente, vem:

$$\cos x = \frac{\overline{AM}}{\overline{PA}} \Leftrightarrow \cos x = \frac{4}{\overline{PA}} \Leftrightarrow \overline{PA} = \frac{4}{\cos x}$$

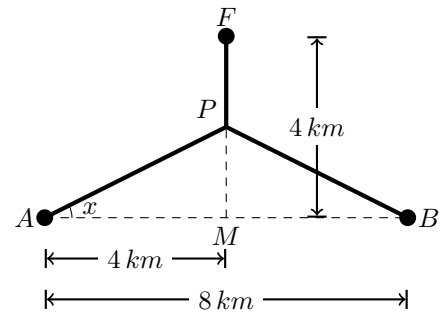
$$\operatorname{tg} x = \frac{\overline{PM}}{\overline{AM}} \Leftrightarrow \operatorname{tg} x = \frac{\overline{PM}}{4} \Leftrightarrow \overline{PM} = 4 \operatorname{tg} x$$

Como $\overline{FM} = \overline{FP} + \overline{PM}$ e $\overline{FM} = 4$, temos que:

$$\overline{FP} + \overline{PM} = 4 \Leftrightarrow \overline{FP} = 4 - \overline{PM} \Leftrightarrow \overline{FP} = 4 - 4 \operatorname{tg} x$$

Assim, como $\overline{PA} = \overline{PB}$, temos que, para cada $x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$, o comprimento total é dado por:

$$\begin{aligned} \overline{PA} + \overline{PB} + \overline{FP} &= 2\overline{PA} + \overline{FP} = 2\left(\frac{4}{\cos x}\right) + 4 - 4 \operatorname{tg} x = \frac{8}{\cos x} + 4 - 4 \times \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = \\ &= 4 + \frac{8}{\cos x} - \frac{4 \operatorname{sen} x}{\cos x} = 4 + \frac{8 - 4 \operatorname{sen} x}{\cos x} \end{aligned}$$



86.2. Para $x = 0$, o comprimento da canalização é:

$$4 + \frac{8 - 4 \operatorname{sen} 0}{\cos 0} = 4 + \frac{8 - 4 \times 0}{1} = 4 + 8 = 12$$

Ou seja, se o ângulo x tiver amplitude de 0 (zero) radianos, o comprimento da canalização é 12 km, o que pode ser observado na figura, porque com este valor do ângulo x , o comprimento é dado por $\overline{AB} + \overline{FM} = 8 + 4 = 12$, tendo a canalização a forma de um "T" invertido (\perp).

Exame – 1988, 1.ª fase - 1.ª chamada (cód. 135)

87. Recorrendo às definições de seno e cosseno vem:

$$\operatorname{sen} x = \frac{\overline{BH}}{\overline{BC}} \Leftrightarrow \operatorname{sen} x = \frac{\overline{BH}}{2} \Leftrightarrow \overline{BH} = 2 \operatorname{sen} x$$

$$\cos x = \frac{\overline{CH}}{\overline{BC}} \Leftrightarrow \cos x = \frac{\overline{CH}}{2} \Leftrightarrow \overline{CH} = 2 \cos x$$

Como $\overline{AH} = 1$ e $\overline{AC} = \overline{AH} + \overline{CH}$, temos que:

$$\overline{AC} = \overline{AH} + \overline{CH} \Leftrightarrow \overline{AC} = 1 + \overline{CH} \Leftrightarrow \overline{AC} = 1 + 2 \cos x$$

Logo a área do triângulo $[ABC]$ é:

$$\begin{aligned} A_{[ABC]} &= \frac{\overline{AC} \times \overline{BH}}{2} = \frac{(1 + 2 \cos x) \times 2 \operatorname{sen} x}{2} = \frac{2 \operatorname{sen} x + 4 \operatorname{sen} x \cos x}{2} = \operatorname{sen} x + 2 \operatorname{sen} x \cos x = \\ &= \operatorname{sen} x(1 + 2 \cos x) \end{aligned}$$

Exame – 1998, Prova modelo (cód. 135) (adaptado)

