

Números Complexos (12.º ano)  
Equações e problemas

Exercícios de Provas Nacionais e Testes Intermédios - Propostas de resolução



1. Temos que:

- $z^2 = (2e^{i\theta})^2 = 2^2 e^{i\theta \times 2} = 4e^{i(2\theta)}$
- $2z\bar{z} = 2e^{i \times 0} (2e^{i\theta}) (2e^{i(-\theta)}) = 2 \times 2 \times 2e^{i(0+\theta-\theta)} = 8e^{i \times 0} = 8$

Logo, vem que:

$$z^2 + 2z\bar{z} - 6 = 2\sqrt{3}i \Leftrightarrow 4e^{i(2\theta)} + 8 - 6 = 2\sqrt{3}i \Leftrightarrow 4e^{i(2\theta)} = -2 + 2\sqrt{3}i$$

Escrevendo  $-2 + 2\sqrt{3}i$  na forma trigonométrica ( $\rho e^{i\alpha}$ ) temos:

- $\rho = \sqrt{(-2)^2 + (2\sqrt{3})^2} = \sqrt{4 + 4 \times 3} = \sqrt{4 + 12} = \sqrt{16} = 4$
- $\operatorname{tg} \alpha = \frac{2\sqrt{3}}{-2} = -\sqrt{3}$ ; como  $\operatorname{sen} \alpha > 0$  e  $\operatorname{cos} \alpha < 0$ ,  $\alpha$  é um ângulo do 2.º quadrante, logo  $\alpha = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$

Desta forma temos que  $2 + 2\sqrt{3}i = 4e^{i\frac{2\pi}{3}}$ , pelo que:

$$z^2 + 2z\bar{z} - 6 = 2\sqrt{3}i \Leftrightarrow 4e^{i(2\theta)} = 2 + 2\sqrt{3}i \Leftrightarrow 4e^{i(2\theta)} = 4e^{i\frac{2\pi}{3}}$$

Logo podemos obter o valor de  $\theta$ :

$$2\theta = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \theta = \frac{2\pi}{2 \times 3}, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$$

Como  $\theta \in ]0, \frac{\pi}{2}[$ , para  $k = 0$  temos que  $\theta = \frac{\pi}{3}$

2. Observando que  $i^7 = i^{4+3} = i^3 = -i$ , temos que:

$$z = \frac{4}{1+i} - \frac{2}{i^7} = \frac{4(1-i)}{(1+i)(1-i)} - \frac{2}{-i} = \frac{4-4i}{1^2-i^2} - \frac{2(i)}{(-i)(i)} = \frac{4-4i}{1+1} - \frac{2i}{1} = 2-2i-2i = 2-4i$$

Como  $|z \times w| = 5\sqrt{2}$  e  $z \times w$  pertencente à bissetriz do terceiro quadrante, ou seja,  $\text{Arg}(z \times w) = \pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}$ . Assim, temos que:

$$\begin{aligned} z \times w &= 5\sqrt{2}e^{i(\frac{5\pi}{4})} = 5\sqrt{2} \left( \cos \frac{5\pi}{4} + i \operatorname{sen} \frac{5\pi}{4} \right) = 5\sqrt{2} \left( -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \\ &= -\frac{5 \times (\sqrt{2})^2}{2} - i\frac{5 \times (\sqrt{2})^2}{2} = -5 - 5i \end{aligned}$$

Logo, temos que  $z \times w = -5 - 5i \Leftrightarrow w = \frac{-5 - 5i}{z}$ , pelo que determinando o número complexo  $w$  na forma algébrica, vem:

$$\begin{aligned} w &= \frac{-5 - 5i}{z} = \frac{-5 - 5i}{2 - 4i} = \frac{(-5 - 5i)(2 + 4i)}{(2 - 4i)(2 + 4i)} = \frac{-10 - 20i - 10i - 20i^2}{2^2 - (4i)^2} = \\ &= \frac{-10 - 30i + 20}{4 + 16} = \frac{10 - 30i}{20} = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}i \end{aligned}$$

Exame – 2024, 1.<sup>a</sup> Fase



3. Escrevendo  $z_2$  na forma trigonométrica ( $\rho e^{i\theta}$ ) temos:

- $\rho = |z| = \sqrt{(-1)^2 + (-\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$
- $\operatorname{tg} \theta = \frac{-\sqrt{3}}{-1} = \sqrt{3}$ ; como  $\operatorname{sen} \theta < 0$  e  $\operatorname{cos} \theta < 0$ ,  $\theta$  é um ângulo do 3º quadrante, logo  $\theta = \pi + \frac{\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}$

Logo  $z_2 = 2e^{i\frac{4\pi}{3}}$ .

Como  $i^{23} = i^{4 \times 5 + 3} = i^3 = -i$ , escrevendo  $z_1 + i^{23}$  na forma trigonométrica, vem:

$$z_1 + i^{23} = -5i - i = -6i = 6e^{i\frac{3\pi}{2}}$$

Assim, simplificando a expressão de  $w$ , temos que:

$$w = \frac{z_1 + i^{23}}{z_2^n} = \frac{6e^{i\frac{3\pi}{2}}}{\left(2e^{i\frac{4\pi}{3}}\right)^n} = \frac{6e^{i\frac{3\pi}{2}}}{2^n e^{i\left(n \times \frac{4\pi}{3}\right)}} = \frac{6}{2^n} e^{i\left(\frac{3\pi}{2} - \frac{4n\pi}{3}\right)}$$

Como  $w$  é um imaginário puro se  $\operatorname{Arg} w = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ , temos que, para  $k \in \mathbb{Z}$ :

$$\begin{aligned} \operatorname{Arg} w = \frac{\pi}{2} + k\pi &\Leftrightarrow \frac{3\pi}{2} - \frac{4n\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow \frac{9\pi}{6} - \frac{8n\pi}{6} = \frac{3\pi}{6} + \frac{6k\pi}{6} \Leftrightarrow 9\pi - 8n\pi = 3\pi + 6k\pi \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 9\pi - 3\pi - 8n\pi &= 6k\pi \Leftrightarrow 6\pi - 8n\pi = 6k\pi \Leftrightarrow 2\pi(3 - 4n) = 6k\pi \Leftrightarrow \frac{2\pi(3 - 4n)}{6\pi} = k \Leftrightarrow \frac{3 - 4n}{3} = k \end{aligned}$$

Como  $n \in \mathbb{N}$ , o menor valor de  $n$  que corresponde a um valor inteiro de  $k$  é 3:

- $n = 1 \rightarrow k = \frac{3 - 4(1)}{3} = -\frac{1}{3}$
- $n = 2 \rightarrow k = \frac{3 - 4(2)}{3} = -\frac{5}{3}$
- $n = 3 \rightarrow k = \frac{3 - 4(3)}{3} = -\frac{9}{3} = -3$



4. Observando que:

- podemos escrever  $-1 - \sqrt{3}i$  na forma trigonométrica  $(\rho e^{i\theta})$ :
  - $\rho = |-1 - \sqrt{3}i| = \sqrt{(-1)^2 + (-\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$
  - $\operatorname{tg} \theta = \frac{-\sqrt{3}}{-1} = \sqrt{3}$ ; como  $\operatorname{sen} \theta < 0$  e  $\operatorname{cos} \theta < 0$ ,  $\theta$  é um ângulo do 3º quadrante, logo
 
$$\theta = \pi + \frac{\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}$$
- Pelo que  $-1 - \sqrt{3}i = 2e^{i(\frac{4\pi}{3})}$ ;
- como  $i^{11} = i^{4 \times 2 + 3} = i^3 = -i$ , então  $2i^{11} = 2(-i) = -2i = 2e^{i(\frac{3\pi}{2})}$ .

Assim, simplificando a expressão de  $z$ , temos que:

$$z = \frac{2i^{11}e^{i\alpha}}{-1 - \sqrt{3}i} = \frac{2e^{i(\frac{3\pi}{2})} \times e^{i\alpha}}{2e^{i(\frac{4\pi}{3})}} = \frac{2 \times 1}{2} e^{i(\frac{3\pi}{2} + \alpha - \frac{4\pi}{3})} = e^{i(\frac{9\pi}{6} + \alpha - \frac{8\pi}{6})} = e^{i(\frac{\pi}{6} + \alpha)}$$

Como  $\operatorname{Re} z = -\operatorname{Im} z$ , e o afixo de  $z$  pertence ao 4.º quadrante, então  $\operatorname{Arg} z = \frac{7\pi}{4} + 2k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , ou seja, para  $k \in \mathbb{Z}$ :

$$\frac{\pi}{6} + \alpha = \frac{7\pi}{4} + 2k\pi \Leftrightarrow \alpha = \frac{7\pi}{4} - \frac{\pi}{6} + 2k\pi \Leftrightarrow \alpha = \frac{27\pi}{12} - \frac{2\pi}{12} + 2k\pi \Leftrightarrow \alpha = \frac{19\pi}{12} + 2k\pi$$

Como  $\alpha \in [0, 2\pi[$ , então  $\alpha = \frac{19\pi}{12}$ .

Exame – 2023, 2.ª Fase



5. Escrevendo  $e^{i(\frac{5\pi}{6})}$  na forma algébrica, temos:

$$e^{i(\frac{5\pi}{6})} = \cos \frac{5\pi}{6} + i \operatorname{sen} \frac{5\pi}{6} = -\cos \frac{\pi}{6} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + i \times \frac{1}{2}$$

Como  $i^{17} = i^{4 \times 4 + 1} = i^1 = i$ , simplificando a expressão do número  $w$ , vem:

$$\begin{aligned} w &= \frac{e^{i(\frac{5\pi}{6})} - i^{17}}{i} = \frac{-\frac{\sqrt{3}}{2} + i \times \frac{1}{2} - i}{i} = \frac{-\frac{\sqrt{3}}{2} - i \times \frac{1}{2}}{i} = \frac{\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - i \times \frac{1}{2}\right) \times (-i)}{i \times (-i)} = \\ &= \frac{i \times \frac{\sqrt{3}}{2} + i^2 \times \frac{1}{2}}{-i^2} = \frac{i \times \frac{\sqrt{3}}{2} - 1 \times \frac{1}{2}}{-(-1)} = -\frac{1}{2} + i \times \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

Escrevendo  $w$  na forma trigonométrica ( $\rho e^{i\theta}$ ), vem que:

$$\bullet \rho = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = \sqrt{\frac{4}{4}} = \sqrt{1} = 1$$

$$\bullet \operatorname{tg} \theta = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{1}{2}} = -\sqrt{3}; \text{ como } \operatorname{sen} \theta > 0 \text{ e } \operatorname{cos} \theta < 0, \theta \text{ é um ângulo do } 2.^\circ \text{ quadrante, logo } \theta = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$$

Assim, temos que:

$$z^2 = w \Leftrightarrow z^2 = e^{i(\frac{2\pi}{3})} \Leftrightarrow z = e^{i\left(\frac{\frac{2\pi}{3} + 2k\pi}{2}\right)}, k \in \{0, 1\}$$

Assim, os dois números complexos que são solução da equação, são:

$$\bullet (k = 0) \rightarrow e^{i\left(\frac{\frac{2\pi}{3} + 2 \times 0 \times \pi}{2}\right)} = e^{i\left(\frac{2\pi}{3}\right)} = e^{i\left(\frac{2\pi}{3}\right)} = e^{i\left(\frac{\pi}{3}\right)} = \cos \frac{\pi}{3} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$\bullet (k = 1) \rightarrow e^{i\left(\frac{\frac{2\pi}{3} + 2 \times 1 \times \pi}{2}\right)} = e^{i\left(\frac{\frac{2\pi}{3} + 6\pi}{2}\right)} = e^{i\left(\frac{8\pi}{3}\right)} = e^{i\left(\frac{8\pi}{3}\right)} = e^{i\left(\frac{4\pi}{3}\right)} = \cos \frac{4\pi}{3} + i \operatorname{sen} \frac{4\pi}{3} =$$

$$= -\cos \frac{\pi}{3} - i \operatorname{sen} \frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

Exame – 2023, 1.ª Fase



6. Simplificando a expressão de  $z_1$ , como  $i^7 = i^{4+3} = i^3 = -i$ , temos que:

$$\begin{aligned} z_1 &= (1+i)^2 \times (2+i) + i^7 = (1+2i+i^2) \times (2+i) - i = 2i \times (2+i) - i = \\ &= (1+2i-1) \times (2+i) - i = 2i(2+i) - i = 4i + 2i^2 - i = 3i + 2(-1) = -2 + 3i \end{aligned}$$

Assim, podemos determinar o valor de  $z_2$ :

$$\begin{aligned} z_1 \times z_2 = 3+2i &\Leftrightarrow z_2 = \frac{3+2i}{z_1} \Leftrightarrow z_2 = \frac{3+2i}{-2+3i} \Leftrightarrow z_2 = \frac{(3+2i)(-2-3i)}{(-2+3i)(-2-3i)} \Leftrightarrow z_2 = \frac{-6-9i-4i-6i^2}{(-2)^2-(3i)^2} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow z_2 = \frac{-6-13i-6(-1)}{4-9(-1)^2} \Leftrightarrow z_2 = \frac{-6+6-13i}{4+9} \Leftrightarrow z_2 = -\frac{13i}{13} \Leftrightarrow z_2 = -i \end{aligned}$$

Logo temos que:

$$z_2 = \operatorname{sen} \theta + i \cos \theta \Leftrightarrow \operatorname{sen} \theta + i \cos \theta = -i \Leftrightarrow \operatorname{sen} \theta + i \cos \theta = 0 - i$$

Ou seja  $\operatorname{sen} \theta = 0 \wedge \cos \theta = -1$ , pelo que  $\theta = \pi$

Exame – 2022, Ép. especial

7. Temos que:

- $z_1^2 = \left(\frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times e^{2 \times i\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{4}e^{i\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{4}\left(\cos \frac{\pi}{2} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{4}i$
- $(\overline{z_2})^3 = (\overline{2i})^3 = (-2i)^3 = (-2)^3 i^3 = -8 \times (-i) = 8i$
- $z_1^2 \times (\overline{z_2})^3 = \frac{1}{4}i \times 8i = \frac{8}{4}i^2 = 2 \times (-1) = -2$

Assim, temos que:

$$\begin{aligned} iz^2 + z_1^2 \times (\overline{z_2})^3 - 2 = 0 &\Leftrightarrow iz^2 + (-2) - 2 = 0 \Leftrightarrow iz^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow iz^2 = 4 \Leftrightarrow z^2 = \frac{4}{i} \Leftrightarrow z^2 = \frac{4 \times i}{i \times i} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow z^2 = \frac{4i}{-1} \Leftrightarrow z^2 = -4i \Leftrightarrow z^2 = 4e^{i\frac{3\pi}{2}} \Leftrightarrow z = \sqrt{4e^{i\frac{3\pi}{2}}} \Leftrightarrow z = \sqrt{4}e^{i\left(\frac{\frac{3\pi}{2}+2k\pi}{2}\right)}, k \in \{0,1\} \end{aligned}$$

Assim, os dois números complexos que são solução da equação, escritos na forma trigonométrica, são:

- $(k=0) \rightarrow \sqrt{4}e^{i\left(\frac{\frac{3\pi}{2}+2(0)\pi}{2}\right)} = 2e^{i\left(\frac{3\pi}{2}\right)} = 2e^{i\frac{3\pi}{4}}$
- $(k=1) \rightarrow \sqrt{4}e^{i\left(\frac{\frac{3\pi}{2}+2(1)\pi}{2}\right)} = 2e^{i\left(\frac{3\pi}{2}+\pi\right)} = 2e^{i\left(\frac{3\pi}{4}+\pi\right)} = 2e^{i\frac{7\pi}{4}}$

Exame – 2021, Ép. especial



8. Considerando cada pontos do plano complexo na forma  $z = x + yi$ , temos que os pontos da reta são da forma:

$$\begin{aligned} (1 + 2i)(x + yi) + (1 - 2i)(x - yi) + 10 = 0 &\Leftrightarrow x + yi + 2xi + 2yi^2 + x - yi - 2xi + 2yi^2 + 10 = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 2x + 2y(-1) + 2y(-1) + 10 = 0 &\Leftrightarrow 2x - 2y - 2y + 10 = 0 \Leftrightarrow 2x - 4y + 10 = 0 \Leftrightarrow x - 2y + 5 = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x + 5 = 2y \Leftrightarrow \frac{x}{2} + \frac{5}{2} = y \end{aligned}$$

Assim, de todos os números complexos cujos afijos pertencem a esta reta, o que tem menor módulo, ou seja, o que está mais próximo da origem do plano complexo, é o ponto de tangência da circunferência tangente à reta e que passa na origem, ou seja a interseção com a reta perpendicular à dada que contém a origem.

Relativamente à reta perpendicular, sabemos que o declive é o simétrico do inverso do declive da reta dada e que a ordenada na origem é nula (porque contém a origem), ou seja, é definida por:

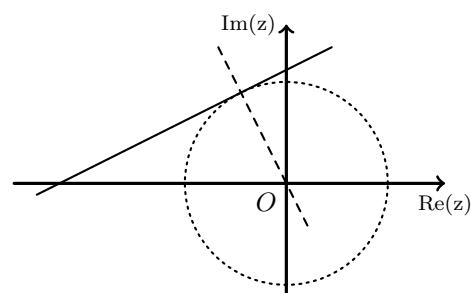
$$y = -\frac{1}{\frac{1}{2}}x + 0 \Leftrightarrow y = -2x$$

Desta forma, as coordenadas do ponto de interseção das duas retas no plano complexo, ou seja, o afixo do número complexo pretendido são:

$$\begin{aligned} \begin{cases} 2y = x + 5 \\ y = -2x \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 2(-2x) = x + 5 \\ y = -2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4x - x = 5 \\ y = -2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -5x = 5 \\ y = -2x \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{5}{5} \\ y = -2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = -2(-1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 2 \end{cases} \end{aligned}$$

Desta forma temos que o número complexo cujo afixo está sobre a reta e que tem menor módulo é  $-1 + 2i$

Exame – 2021, 2.ª Fase



9. Escrevendo  $z_1$  na f.t. temos  $-1 - i = \rho e^{i\theta}$ , onde:

- $\rho = |-1 - i| = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$
- $\operatorname{tg} \theta = \frac{-1}{-1} = 1$ ; como  $\operatorname{sen} \theta < 0$  e  $\operatorname{cos} \theta < 0$ ,  $\theta$  é um ângulo do 3.º quadrante, logo  $\theta = \pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}$

E assim  $z_1 = \sqrt{2}e^{i(\frac{5\pi}{4})}$ , pelo que, como o triângulo  $[OFG]$  é equilátero, o número complexo cujo afixo é o ponto  $G$  tem módulo igual a  $z_1$  e o argumento é  $\arg(z_1) + \frac{\pi}{3}$ , ou seja, é o número complexo:

$$\sqrt{2}e^{i(\frac{5\pi}{4} + \frac{\pi}{3})} = \sqrt{2}e^{i(\frac{19\pi}{12})}$$

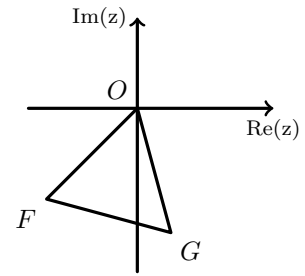
Desta forma podemos determinar  $z_2$  resolvendo a equação seguinte:

$$z_1 \times z_2 = \sqrt{2}e^{i(\frac{19\pi}{12})} \Leftrightarrow z_2 = \frac{\sqrt{2}e^{i(\frac{19\pi}{12})}}{z_1} \Leftrightarrow z_2 = \frac{\sqrt{2}e^{i(\frac{19\pi}{12})}}{\sqrt{2}e^{i(\frac{5\pi}{4})}} \Leftrightarrow z_2 = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}e^{i(\frac{19\pi}{12}) - (\frac{5\pi}{4})} \Leftrightarrow z_2 = e^{i(\frac{\pi}{3})}$$

E assim, escrevendo  $z_2$  na f.a. vem:

$$z_2 = \cos \frac{\pi}{3} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

Resposta: **Opção B**





10. Escrevendo  $z_1$  na forma algébrica, e como  $i^5 = i^{4+1} = i^4 \times i^1 = 1 \times i = i$  temos:

$$\begin{aligned} z_1 &= \frac{2}{1-i} + \frac{4}{i^5} = \frac{2}{1-i} + \frac{4}{i} = \frac{2(i) + 4(1-i)}{(1-i) \times i} = \frac{2i + 4 - 4i}{i - i^2} = \frac{4 - 2i}{i - (-1)} = \frac{4 - 2i}{1+i} = \frac{(4-2i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \\ &= \frac{4 - 4i - 2i + 2i^2}{1 - i + i - i^2} = \frac{4 - 6i + 2(-1)}{1 - (-1)} = \frac{4 - 6i - 2}{1+1} = \frac{2 - 6i}{2} = 1 - 3i \end{aligned}$$

Considerando  $z_2 = a + bi$ , com  $a \in \mathbb{R}$  e  $b \in \mathbb{R}$ , o produto  $z_1 \times z_2$ , é dado por:

$$z_1 \times z_2 = (1 - 3i) \times (a + bi) = a + bi - 3ai - 3bi^2 = a - 3b(-1) - (b - 3a)i = a + 3b + (b - 3a)i$$

Como o afixo de  $z_1 \times z_2$  tem coordenadas iguais, vem que:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(z_1 \times z_2) &= \operatorname{Im}(z_1 \times z_2) \Leftrightarrow a + 3b = b - 3a \Leftrightarrow a + 3a = b - 3b \Leftrightarrow a + 3b = b - 3a \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 4a = -2b \Leftrightarrow \frac{4}{-2}a = b \Leftrightarrow b = -2a \end{aligned}$$

E assim, como  $|z_2| = \sqrt{5}$ , temos que:

$$\sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{5} \Rightarrow a^2 + b^2 = 5 \Leftrightarrow a^2 + (-2a)^2 = 5 \Leftrightarrow a^2 + 4a^2 = 5 \Leftrightarrow 5a^2 = 5 \Leftrightarrow a^2 = \frac{5}{5} \Leftrightarrow a = \pm\sqrt{1}$$

E que:

$$b = -2(1) \vee b = -2(-1) \Leftrightarrow b = -2 \vee b = 2$$

Como o afixo de  $z_1 \times z_2$  tem coordenadas positivas, vem que:

- $a + 3b > 0 \wedge b = -2a \Rightarrow a + 3(-2a) > 0 \Leftrightarrow a - 6a > 0 \Leftrightarrow -5a > 0 \Leftrightarrow a < 0$ , ou seja,  $a = -1$
- $a + 3b > 0 \wedge b = -2a \Leftrightarrow a + 3b > 0 \wedge \frac{b}{-2} = a \Rightarrow -\frac{b}{2} + 3b > 0 \Leftrightarrow -\frac{b}{2} + \frac{6b}{2} > 0 \Leftrightarrow \frac{5b}{2} > 0 \Leftrightarrow b > 0$ , ou seja,  $b = 2$

Desta forma temos que:  $z_2 = a + bi = -1 + 2i$

Exame – 2020, 2.<sup>a</sup> Fase



11. Considerando  $z = \rho e^{i\theta}$ , temos que:

$$z^2 = \bar{z} \Leftrightarrow (\rho e^{i\theta})^2 = \rho e^{i(-\theta)} \Leftrightarrow \rho^2 e^{i(2\theta)} = \rho e^{i(-\theta)} \Leftrightarrow \rho^2 = \rho \wedge 2\theta = -\theta + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Assim temos que:

- $\rho^2 = \rho \Leftrightarrow \rho^2 - \rho = 0 \Leftrightarrow \rho(\rho - 1) = 0 \Leftrightarrow \rho = 0 \vee \rho - 1 = 0 \Leftrightarrow \rho = 0 \vee \rho = 1$
- $2\theta = -\theta + 2k\pi \Leftrightarrow 2\theta + \theta = 2k\pi \Leftrightarrow 3\theta = 2k\pi \Leftrightarrow \theta = \frac{2k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$

Assim, três soluções não nulas da equação ( $\rho \neq 0$ ), com afixos diferentes, são:

- $z_1 = e^{i(0)} (\rho = 1 \wedge k = 0)$
- $z_2 = e^{i(\frac{2\pi}{3})} (\rho = 1 \wedge k = 1)$
- $z_3 = e^{i(\frac{4\pi}{3})} (\rho = 1 \wedge k = 2)$

(As restantes soluções não nulas da equação, associadas a outros valores de  $k$ , têm afixos iguais a um dos três apresentados).

Logo, escrevendo duas das soluções apresentadas na forma algébrica, vem:

- $z_1 = e^{i(0)} = e^0 = 1$
- $z_2 = e^{i(\frac{2\pi}{3})} = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

Logo, como os afixos dos números complexos não nulos que são soluções desta equação são os vértices de um polígono regular, ou seja de um triângulo equilátero, temos que respetivo o perímetro é dado pelo triplo da medida do lado, que, por sua vez, é a distância entre dois afixos, ou seja:

$$\begin{aligned} P &= 3 \times |z_1 - z_2| = 3 \times \left| 1 - \left( -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) \right| = 3 \times \left| 1 + \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right| = 3 \times \left| \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right| = \\ &= 3 \times \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 3\sqrt{\frac{9}{4} + \frac{3}{4}} = 3\sqrt{\frac{12}{4}} = 3\sqrt{3} \end{aligned}$$

Exame – 2020, 1.ª Fase



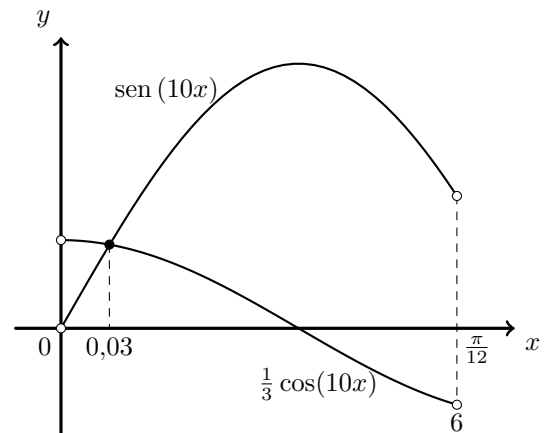
12. Como  $z = (\cos x + i \operatorname{sen} x)^{10} = (e^{ix})^{10} = e^{i \times 10x} = \cos(10x) + i \operatorname{sen}(10x)$ , temos que  $\operatorname{Im}(z) = \operatorname{sen}(10x)$  e  $\operatorname{Re}(z) = \cos(10x)$ , pelo que o valor de  $x \in \left]0, \frac{\pi}{12}\right[$  que verifica a condição  $\operatorname{Im}(z) = \frac{1}{3} \operatorname{Re}(z)$  é a solução da equação  $\operatorname{sen}(10x) = \frac{1}{3} \cos(10x)$  que pertence ao intervalo  $\left]0, \frac{\pi}{12}\right[$

Representando na calculadora gráfica os gráficos da funções  $f(x) = \operatorname{sen}(10x)$  e  $g(x) = \frac{1}{3} \cos(10x)$ , para valores de  $x \in \left]0, \frac{\pi}{12}\right[$ , obtemos o gráfico se reproduz na figura ao lado.

Recorrendo à função da calculadora que permite determinar valores aproximados de um ponto de interseção de dois gráficos, determinamos o valor de  $x$  (arredondado às centésimas):

$$x \approx 0,03$$

Resposta: **Opção B**



Exame – 2018, 1ª Fase

13. Simplificando as expressões de  $z_1$  e  $z_2$ , temos que:

- Como  $i^{19} = i^{4 \times 4 + 3} = i^3 = -i$ , vem que:

$$z_1 = \frac{1 - 3i^{19}}{1 + i} = \frac{1 - 3(-i)}{1 + i} = \frac{(1 + 3i)(1 - i)}{(1 + i)(1 - i)} = \frac{1 - i + 3i - 3i^2}{1 - i^2} = \frac{1 + 2i - 3(-1)}{1 - (-1)} = \frac{4 + 2i}{2} = 2 + i$$

- Como  $e^{i(\frac{3\pi}{2})} = \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0 + i(-1) = -i$ , vem que:

$$z_2 = -3ke^{i(\frac{3\pi}{2})} = -3k(-i) = 3ik$$

Assim, como a distância entre as imagens geométricas de  $z_1$  e de  $z_2$  é dada por  $|z_1 - z_2|$ , ou seja:

$$|z_1 - z_2| = |2 + i - 3ik| = |2 + i(1 - 3k)| = \sqrt{2^2 + (1 - 3k)^2} = \sqrt{4 + 1 - 6k + 9k^2} = \sqrt{9k^2 - 6k + 5}$$

E como a distância entre as imagens geométricas de  $z_1$  e de  $z_2$  é igual a  $\sqrt{5}$ , temos que:

$$|z_1 - z_2| = \sqrt{5} \Leftrightarrow \sqrt{9k^2 - 6k + 5} = \sqrt{5} \underset{k > 0}{\Rightarrow} \left(\sqrt{9k^2 - 6k + 5}\right)^2 = \left(\sqrt{5}\right)^2 \Leftrightarrow 9k^2 - 6k + 5 = 5 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 9k^2 - 6k + 5 - 5 = 0 \Leftrightarrow 9k^2 - 6k = 0 \Leftrightarrow k(9k - 6) = 0 \Leftrightarrow k = 0 \vee 9k - 6 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow k = 0 \vee k = \frac{6}{9} \Leftrightarrow k = 0 \vee k = \frac{2}{3}$$

Como  $k \in \mathbb{R}^+$ , temos que  $k = \frac{2}{3}$

Exame – 2017, 1ª Fase



14. Escrevendo  $-1 + i$  na f.t. temos  $-1 + i = \gamma e^{i\alpha}$ , onde:

- $\gamma = |-1 + i| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2}$
- $\operatorname{tg} \alpha = \frac{-1}{1} = -1$ ; como  $\operatorname{sen} \alpha > 0$  e  $\operatorname{cos} \alpha < 0$ ,  $\alpha$  é um ângulo do 2.º quadrante, logo  

$$\alpha = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{4\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$$

Assim temos que  $-1 + i = \sqrt{2}e^{i(\frac{3\pi}{4})}$ , pelo que podemos simplificar a expressão do número complexo  $z$ :

$$z = \frac{\sqrt{2}e^{i(\frac{3\pi}{4})}}{(\rho e^{i\theta})^2} = \frac{\sqrt{2}e^{i(\frac{3\pi}{4})}}{\rho^2 e^{i(2\theta)}} = \frac{\sqrt{2}}{\rho^2} e^{i(\frac{3\pi}{4} - 2\theta)}$$

Escrevendo  $w$  na f.t. temos  $w = -\sqrt{2}i = \sqrt{2}e^{i(\frac{3\pi}{2})}$

Como  $z = w$ , então temos que:

- $|z| = |w| \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{\rho^2} = \sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{\rho^2 \neq 0} = \sqrt{2} = \rho^2 \Leftrightarrow 1 = \rho^2 \xRightarrow{\rho > 0} \rho = 1$
- $\arg z = \arg w + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \frac{3\pi}{4} - 2\theta = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow 2\theta = \frac{3\pi}{4} - \frac{3\pi}{2} - 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$   
 $\Leftrightarrow 2\theta = -\frac{3\pi}{4} - 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \theta = -\frac{3\pi}{8} - k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Como  $\theta \in ]0, \pi[$ , determinamos o valor de  $\theta$ , atribuindo valores a  $k$ :

- Se  $k = 0$ , então  $\theta = -\frac{3\pi}{8}$  ( $\theta \notin ]0, \pi[$ )
- Se  $k = -1$ , então  $\theta = -\frac{3\pi}{8} - (-\pi) = -\frac{3\pi}{8} + \frac{8\pi}{8} = \frac{5\pi}{8}$  ( $\theta \in ]0, \pi[$ )
- Se  $k = -2$ , então  $\theta = -\frac{3\pi}{8} - (-2\pi) = -\frac{3\pi}{8} + \frac{16\pi}{8} = \frac{13\pi}{8}$  ( $\theta \notin ]0, \pi[$ )

Assim, se  $z = w$ ,  $\rho > 0$  e  $\theta \in ]0, \pi[$ , temos que  $\rho = 1$  e  $\theta = \frac{5\pi}{8}$



15. Escrevendo  $-1 + \sqrt{3}i$  na forma trigonométrica temos  $-1 + \sqrt{3}i = \rho e^{i\alpha}$ , onde:

- $\rho = |-1 + \sqrt{3}i| = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$
- $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{3}}{-1} = -\sqrt{3}$ ; como  $\operatorname{sen} \alpha > 0$  e  $\operatorname{cos} \alpha < 0$ ,  $\alpha$  é um ângulo do 2.º quadrante, logo  

$$\alpha = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{3\pi}{3} - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$$

Assim temos que  $-1 + \sqrt{3}i = 2e^{i(\frac{2\pi}{3})}$ , pelo que podemos simplificar a expressão do número complexo  $z_1$ :

$$z_1 = \frac{8e^{i\theta}}{2e^{i(\frac{2\pi}{3})}} = \frac{8}{2} \times \frac{e^{i\theta}}{e^{i(\frac{2\pi}{3})}} = 4e^{i(\theta - \frac{2\pi}{3})}$$

Como  $\arg(\bar{w}) = -\arg(w)$  e  $|\bar{w}| = |w|$ , vem que:  $\bar{z}_1 = 4e^{i(-(\theta - \frac{2\pi}{3}))} = 4e^{i(\frac{2\pi}{3} - \theta)}$

Logo:

$$\bar{z}_1 \times z_2 = 4e^{i(\frac{2\pi}{3} - \theta)} \times e^{i(2\theta)} = 4e^{i(\frac{2\pi}{3} - \theta + 2\theta)} = 4e^{i(\frac{2\pi}{3} + \theta)}$$

Para que  $\bar{z}_1 \times z_2$  seja um número real, então  $\arg(\bar{z}_1 \times z_2) = k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Atribuindo valores a  $k$ , vem que:

- Se  $k = 0$ , então  $\arg(\bar{z}_1 \times z_2) = 0 \Leftrightarrow \frac{2\pi}{3} + \theta = 0 \Leftrightarrow \theta = -\frac{2\pi}{3}, (\theta \notin ]0, \pi[)$
- Se  $k = 1$ , então  $\arg(\bar{z}_1 \times z_2) = \pi \Leftrightarrow \frac{2\pi}{3} + \theta = \pi \Leftrightarrow \theta = \pi - \frac{2\pi}{3} \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{3}, (\theta \in ]0, \pi[)$
- Se  $k = 2$ , então  $\arg(\bar{z}_1 \times z_2) = 2\pi \Leftrightarrow \frac{2\pi}{3} + \theta = 2\pi \Leftrightarrow \theta = 2\pi - \frac{2\pi}{3} \Leftrightarrow \theta = \frac{4\pi}{3}, (\theta \notin ]0, \pi[)$

Assim, o valor de  $\theta \in ]0, \pi[$  para o qual  $\bar{z}_1 \times z_2$  é um número real é  $\theta = \frac{\pi}{3}$

Exame – 2016, 1ª Fase

16. Temos que  $i^{19} = i^{4 \times 4 + 3} = i^3 = -i$

Pelo que, escrevendo o numerador da fração que define  $z$  na forma trigonométrica vem que

$$-2 + 2i^{19} = -2 + 2(-i) = -2 - 2i = \rho e^{i\alpha}$$

Em que

- $\rho = \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$
- $\operatorname{tg} \alpha = \frac{-2}{-2} = 1$ ; como  $\operatorname{sen} \alpha < 0$  e  $\operatorname{cos} \alpha < 0$ ,  $\alpha$  é um ângulo do 3.º quadrante, logo  $\alpha = \pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}$

Logo o numerador da fração que define  $z$  é  $2\sqrt{2}e^{i(\frac{5\pi}{4})}$ , pelo que

$$z = \frac{-2 + 2i^{19}}{\sqrt{2}e^{i\theta}} = \frac{2\sqrt{2}e^{i(\frac{5\pi}{4})}}{\sqrt{2}e^{i\theta}} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}} e^{i(\frac{5\pi}{4} - \theta)} = 2e^{i(\frac{5\pi}{4} - \theta)}$$

Como  $z$  é um imaginário puro se  $\arg(z) = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ , vem que

$$\begin{aligned} \frac{5\pi}{4} - \theta = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} &\Leftrightarrow -\theta = -\frac{5\pi}{4} + \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow -\theta = -\frac{5\pi}{4} + \frac{2\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow -\theta = -\frac{3\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \theta = \frac{3\pi}{4} - k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Como  $\theta \in ]0, 2\pi[$ , podemos atribuir a  $k$  os valores do conjunto  $\{-1, 0\}$  e calcular os valores de  $\theta$ , para os quais  $z$  é um imaginário puro:

- Se  $k = -1$ , então  $\theta = \frac{3\pi}{4} - (-1) \times \pi = \frac{3\pi}{4} + \frac{4\pi}{4} = \frac{7\pi}{4}$
- Se  $k = 0$ , então  $\theta = \frac{3\pi}{4} - 0 \times \pi = \frac{3\pi}{4}$

Exame – 2015, 1ª Fase



17.

17.1. Simplificando a expressão de  $z_1$  vem:

$$\begin{aligned} z_1 &= \frac{1-i}{2i} - i^{-1} = \frac{1-i}{2i} - \frac{1}{i} = \frac{1-i}{2i} - \frac{2}{2i} = \frac{1-i-2}{2i} = \frac{-1-i}{2i} = \frac{(-1-i)i}{(2i)i} = \\ &= \frac{-i-i^2}{2i^2} = \frac{-i-(-1)}{2(-1)} = \frac{-i+1}{-2} = \frac{i-1}{2} = \frac{-1+i}{2} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i \end{aligned}$$

Escrevendo  $z_1$  na forma trigonométrica, temos que  $z_1 = \rho e^{i\theta}$ , onde:

- $\rho = \left| -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i \right| = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{2}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$
- $\operatorname{tg} \theta = \frac{-\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = -1$ ; como  $\operatorname{sen} \theta > 0$  e  $\operatorname{cos} \theta < 0$ ,  $\theta$  é um ângulo do 2.º quadrante,  
logo  $\theta = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$

$$\text{Logo } z_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{i\left(\frac{3\pi}{4}\right)}$$

E assim, calculando a potência, vem:

$$(z_1)^4 = \left( \frac{\sqrt{2}}{2} e^{i\left(\frac{3\pi}{4}\right)} \right)^4 = \left( \frac{\sqrt{2}}{2} \right)^4 e^{i\left(4 \times \frac{3\pi}{4}\right)} = \frac{(\sqrt{2})^4}{2^4} e^{i(3\pi)} = \frac{4}{16} e^{i(3\pi)} = \frac{1}{4} e^{i\pi}$$

Como  $\arg \bar{w} = -\arg w$ , então  $\bar{z}_2 = e^{i(-(-\frac{\pi}{4}))} = e^{i(\frac{\pi}{4})}$ , fazendo o produto na forma trigonométrica, vem:

$$(z_1)^4 \times \bar{z}_2 = \frac{1}{4} e^{i\pi} \times e^{i\left(\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{1}{4} e^{i\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right)}$$

Como  $\arg((z_1)^4 \times \bar{z}_2)$  é da forma  $\frac{\pi}{4} + k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , a imagem geométrica de  $(z_1)^4 \times \bar{z}_2$  pertence à bissetriz dos quadrantes ímpares.17.2. Como  $\operatorname{sen}(2\alpha) = 2 \operatorname{sen} \alpha \operatorname{cos} \alpha$ ,  $\operatorname{sen} \alpha = \operatorname{cos}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$  e  $\operatorname{cos} \alpha = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$  vem que

$$\begin{aligned} w &= \operatorname{sen}(2\alpha) + 2i \operatorname{cos}^2 \alpha = 2 \operatorname{sen} \alpha \operatorname{cos} \alpha + 2i \operatorname{cos}^2 \alpha = 2 \operatorname{cos} \alpha (\operatorname{sen} \alpha + i \operatorname{cos} \alpha) = \\ &= 2 \operatorname{cos} \alpha \left( \operatorname{cos}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \right) = 2 \operatorname{cos} \alpha \left( e^{i\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)} \right) \end{aligned}$$

Como  $\operatorname{cos} \alpha > 0$ , porque  $\alpha \in \left] 0, \frac{\pi}{2} \right[$ , a forma trigonométrica do número complexo  $w$  é

$$w = 2 \operatorname{cos} \alpha \left( e^{i\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)} \right), \text{ em que } |w| = 2 \operatorname{cos} \alpha$$

Exame – 2014, Ép. especial



18.

18.1. Escrevendo  $z$  na forma algébrica temos:

$$z = 2e^{i(\frac{\pi}{6})} = 2 \left( \cos \frac{\pi}{6} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{6} \right) = 2 \left( \frac{\sqrt{3}}{2} + i \times \frac{1}{2} \right) = \sqrt{3} + i \times \frac{2}{2} = \sqrt{3} + i$$

Assim temos que

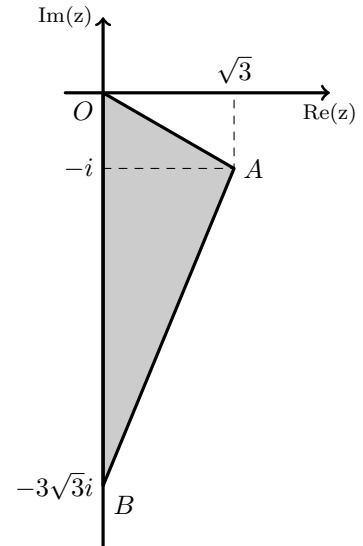
$$\bar{z} = \overline{\sqrt{3} + i} = \sqrt{3} - i$$

E, simplificando a expressão que define  $w$ , substituindo  $z$ , vem:

$$\begin{aligned} w &= \frac{(z-i)^4}{1+zi} = \frac{(\sqrt{3}+i-i)^4}{1+(\sqrt{3}+i)i} = \frac{(\sqrt{3})^4}{1+\sqrt{3}i+i^2} = \frac{3^2}{1+\sqrt{3}i-1} = \\ &= \frac{9}{\sqrt{3}i} = \frac{9 \times \sqrt{3} \times i}{(\sqrt{3})^2 i^2} = \frac{9\sqrt{3}i}{3 \times (-1)} = -3\sqrt{3}i \end{aligned}$$

Assim, podemos fazer a representação do triângulo  $[AOB]$ , como na figura ao lado.Por observação da figura, temos que a área do triângulo  $[AOB]$  é

$$A_{[AOB]} = \frac{\operatorname{Re}(z) \times |\operatorname{Im}(w)|}{2} = \frac{\sqrt{3} \times 3\sqrt{3}}{2} = \frac{3 \times 3}{2} = \frac{9}{2}$$

18.2. Considerando a equação na forma  $az^2 + bz + c = 0$ , com  $a = 1$ ,  $b = -2 \cos \alpha$  e  $c = 1$ , temos uma equação do segundo grau na variável  $z$ .

Assim,

$$\begin{aligned} z^2 - 2 \cos \alpha z + 1 &= 0 \Leftrightarrow z = \frac{-(-2 \cos \alpha) \pm \sqrt{(-2 \cos \alpha)^2 - 4(1)(1)}}{2 \times 1} \Leftrightarrow z = \frac{2 \cos \alpha \pm \sqrt{4 \cos^2 \alpha - 4}}{2} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow z &= \frac{2 \cos \alpha \pm \sqrt{4(\cos^2 \alpha - 1)}}{2} \Leftrightarrow z = \frac{2 \cos \alpha \pm \sqrt{-4(1 - \cos^2 \alpha)}}{2} \Leftrightarrow z = \frac{2 \cos \alpha \pm \sqrt{-4(\operatorname{sen}^2 \alpha)}}{2} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow z &= \frac{2 \cos \alpha \pm (\sqrt{-4} \times \sqrt{\operatorname{sen}^2 \alpha})}{2} \Leftrightarrow z = \frac{2 \cos \alpha \pm (\sqrt{-1} \times \sqrt{4} \operatorname{sen} \alpha)}{2} \Leftrightarrow z = \frac{2 \cos \alpha \pm 2i \operatorname{sen} \alpha}{2} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow z &= \cos \alpha \pm i \operatorname{sen} \alpha \Leftrightarrow z = \cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha \vee z = \cos \alpha - i \operatorname{sen} \alpha \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow z &= \cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha \vee z = \cos(-\alpha) + i \operatorname{sen}(-\alpha) \Leftrightarrow z = e^{i\alpha} \vee z = e^{i(-\alpha)} \end{aligned}$$

Resposta: A equação tem duas soluções, que são, na forma trigonométrica em função de  $\alpha$ :  $e^{i\alpha}$  e  $e^{i(-\alpha)}$ 

Exame – 2014, 2ª Fase



19.

19.1. Escrevendo  $-1 + \sqrt{3}i$  na forma trigonométrica temos  $-1 + \sqrt{3}i = \rho e^{i\theta}$ , onde:

- $\rho = |-1 + \sqrt{3}i| = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$
- $\operatorname{tg} \theta = \frac{\sqrt{3}}{-1} = -\sqrt{3}$ ; como  $\operatorname{sen} \theta > 0$  e  $\operatorname{cos} \theta < 0$ ,  $\theta$  é um ângulo do 2.º quadrante, logo  
 $\theta = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{3\pi}{3} - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$

Assim  $-1 + \sqrt{3}i = 2e^{i(\frac{2\pi}{3})}$

Pelo que  $(-1 + \sqrt{3}i)^3 = \left(2e^{i(\frac{2\pi}{3})}\right)^3 = 2^3 e^{i(3 \times \frac{2\pi}{3})} = 8e^{i(2\pi)} = 8e^{i \times 0}$

Escrevendo  $1 - i$  na forma trigonométrica temos  $1 - i = \varphi e^{i\beta}$ , onde:

- $\varphi = |1 - i| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$
- $\operatorname{tg} \beta = \frac{-1}{1} = -1$ ; como  $\operatorname{sen} \beta < 0$  e  $\operatorname{cos} \beta > 0$ ,  $\beta$  é um ângulo do 4.º quadrante, logo  $\beta = -\frac{\pi}{4} =$

Assim  $1 - i = \sqrt{2}e^{i(-\frac{\pi}{4})}$

Desta forma, calculando as potências, o quociente e o produto na forma trigonométrica, vem:

$$\begin{aligned} z_1 \times (z_2)^2 &= \frac{8e^{i \times 0}}{\sqrt{2}e^{i(-\frac{\pi}{4})}} \times (e^{i\alpha})^2 = \frac{8}{\sqrt{2}} e^{i(0 - (-\frac{\pi}{4}))} \times e^{i(2\alpha)} = \frac{8\sqrt{2}}{2} e^{i(\frac{\pi}{4})} \times e^{i(2\alpha)} = \\ &= 4\sqrt{2}e^{i(\frac{\pi}{4})} \times e^{i(2\alpha)} = 4\sqrt{2}e^{i(\frac{\pi}{4} + 2\alpha)} \end{aligned}$$

Logo, para que  $z_1 \times (z_2)^2$  seja um imaginário puro, temos que  $\arg(z_1 \times (z_2)^2) = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ .

Pelo que:

$$\frac{\pi}{4} + 2\alpha = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow 2\alpha = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow 2\alpha = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

Como  $\alpha \in [0, \pi[$ , concretizando os valores de  $k$ , temos que  $\alpha = \frac{\pi}{8}$  ( $k = 0$ ) e

$\alpha = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{8} + \frac{4\pi}{8} = \frac{5\pi}{8}$  ( $k = 1$ ) são os únicos valores de  $\alpha \in [0, \pi[$ , para os quais  $z_1 \times (z_2)^2$  é um imaginário puro.

19.2. Seja  $z = a + bi$

Assim, vem que:

$$\begin{aligned} |1+z|^2 + |1-z|^2 \leq 10 &\Leftrightarrow |1+(a+bi)|^2 + |1-(a+bi)|^2 \leq 10 \Leftrightarrow |1+a+bi|^2 + |1-a-bi|^2 \leq 10 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (\sqrt{(1+a)^2 + b^2})^2 + (\sqrt{(1-a)^2 + (-b)^2})^2 \leq 10 \Leftrightarrow (1+a)^2 + b^2 + (1-a)^2 + (-b)^2 \leq 10 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 1+2a+a^2+b^2+1-2a+a^2+b^2 \leq 10 \Leftrightarrow 2+2a^2+2b^2 \leq 10 \Leftrightarrow 1+a^2+b^2 \leq 5 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow a^2+b^2 \leq 4 \Leftrightarrow_{a^2+b^2 \geq 0} \sqrt{a^2+b^2} \leq \sqrt{4} \Leftrightarrow \sqrt{a^2+b^2} \leq 2 \Leftrightarrow |z| \leq 2 \end{aligned}$$

Exame – 2014, 1ª Fase





20. Como  $\cos \frac{5\pi}{6} = -\cos \frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$  e  $\sin \frac{5\pi}{6} = \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$  vem que:

$$1 + 2ie^{i(\frac{5\pi}{6})} = 1 + 2i \left( -\frac{\sqrt{3}}{2} + i \times \frac{1}{2} \right) = 1 - \sqrt{3}i + i^2 = 1 - \sqrt{3}i - 1 = -\sqrt{3}i = \sqrt{3}e^{i(-\frac{\pi}{2})}$$

Escrevendo  $1 + \sqrt{3}i$  na forma trigonométrica temos  $1 + \sqrt{3}i = \rho e^{i\theta}$ , onde:

- $\rho = |1 + \sqrt{3}i| = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$
- $\operatorname{tg} \theta = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$ ; como  $\sin \theta > 0$  e  $\cos \theta > 0$ ,  $\theta$  é um ângulo do 1.º quadrante, logo  $\theta = \frac{\pi}{3}$

Assim  $1 + \sqrt{3}i = 2e^{i(\frac{\pi}{3})}$

Logo, vem que:

$$z_1 = \frac{1 + \sqrt{3}i}{1 + 2ie^{i(\frac{5\pi}{6})}} = \frac{2e^{i\frac{\pi}{3}}}{\sqrt{3}e^{i(-\frac{\pi}{2})}} = \frac{2}{\sqrt{3}} e^{i(\frac{\pi}{3} - (-\frac{\pi}{2}))} = \frac{2 \times \sqrt{3}}{\sqrt{3} \times \sqrt{3}} e^{i(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2})} = \frac{2\sqrt{3}}{3} e^{i(\frac{2\pi}{6} + \frac{3\pi}{6})} = \frac{2\sqrt{3}}{3} e^{i(\frac{5\pi}{6})}$$

$$\text{Se } z = e^{i\theta}, \text{ então } \frac{z}{z_1} = \frac{e^{i\theta}}{\frac{2\sqrt{3}}{3} e^{i(\frac{5\pi}{6})}} = \frac{1}{\frac{2\sqrt{3}}{3}} e^{i(\theta - \frac{5\pi}{6})} = \frac{3}{2\sqrt{3}} e^{i(\theta - \frac{5\pi}{6})}$$

E como  $\frac{z}{z_1}$  é número real negativo, então  $\arg \left( \frac{z}{z_1} \right) = \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ , logo temos que:

$$\theta - \frac{5\pi}{6} = \pi + 2k\pi \Leftrightarrow \theta = \pi + \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \Leftrightarrow \theta = \frac{6\pi}{6} + \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \Leftrightarrow \theta = \frac{11\pi}{6} + 2k\pi$$

Como  $\theta \in [0, 2\pi[$ , então  $k = 0$  e  $\theta = \frac{11\pi}{6}$



21. Como  $i^{22} = i^{4 \times 5 + 2} = i^2 = -1$ , temos que:

$$z_1 = \frac{1 + \sqrt{3}i}{2} + i^{22} = \frac{1 + \sqrt{3}i}{2} - 1 = \frac{1 + \sqrt{3}i}{2} - \frac{2}{2} = \frac{1 - 2 + \sqrt{3}i}{2} = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}i}{2}$$

Escrevendo  $z_1$  na forma trigonométrica temos  $z_1 = \rho e^{i\theta}$ , onde:

$$\bullet \rho = |z_1| = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{4}\right) + \left(\frac{3}{4}\right)} = \sqrt{\frac{4}{4}} = \sqrt{1} = 1$$

$$\bullet \operatorname{tg} \theta = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{-1} = -\sqrt{3}; \text{ como } \operatorname{sen} \theta > 0 \text{ e } \operatorname{cos} \theta < 0, \theta \text{ é um ângulo do } 2.^\circ \text{ quadrante, logo } \theta = \frac{2\pi}{3}$$

Assim  $z_1 = e^{i\left(\frac{2\pi}{3}\right)}$

E como  $-2 = 2e^{i\pi}$  e  $i = e^{i\left(\frac{\pi}{2}\right)}$ , temos que:

$$z_2 = \frac{-2}{iz_1} = \frac{2e^{i\pi}}{e^{i\left(\frac{\pi}{2}\right)} \times e^{i\left(\frac{2\pi}{3}\right)}} = \frac{2e^{i\pi}}{e^{i\left(\frac{\pi}{2} + \frac{2\pi}{3}\right)}} = \frac{2e^{i\pi}}{e^{i\left(\frac{3\pi}{6} + \frac{4\pi}{6}\right)}} = \frac{2e^{i\pi}}{e^{i\left(\frac{7\pi}{6}\right)}} = 2e^{i\left(\pi - \frac{7\pi}{6}\right)} = 2e^{i\left(\frac{6\pi}{6} - \frac{7\pi}{6}\right)} = 2e^{i\left(-\frac{\pi}{6}\right)}$$

Assim temos que  $(z_2)^n = \left(2e^{i\left(-\frac{\pi}{6}\right)}\right)^n = 2^n e^{i\left(n \times \left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)}$

E para que  $(z_2)^n$  seja um número real negativo,  $\arg(z_2)^n = \pi + 2k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ ; ou seja:

$$n \times \left(-\frac{\pi}{6}\right) = \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow n = \frac{\pi + 2k\pi}{-\frac{\pi}{6}}, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow n = \frac{6\pi + 12k\pi}{-\pi}, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow n = -6 - 12k, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Como } n = -6 - 12k \Leftrightarrow \frac{n + 6}{-12} = k \Leftrightarrow \frac{-n - 6}{12} = k$$

logo, para que  $k \in \mathbb{Z}$ , o menor valor natural que  $n$  pode tomar é 6, ficando  $\frac{-6 - 6}{12} = k \Leftrightarrow k = -1$

Exame – 2013, 2ª Fase

22. Temos que  $z_3 = \cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha$  e que  $\bar{z}_2 = 1 - i$ , pelo que  $z_3 + \bar{z}_2 = \cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha + 1 - i = \cos \alpha + 1 + i(\operatorname{sen} \alpha - 1)$

Como  $z_3 + \bar{z}_2$  é um número real se  $\operatorname{Im}(z_3 + \bar{z}_2) = 0$  temos que:

$$\operatorname{sen} \alpha - 1 = 0 \Leftrightarrow \operatorname{sen} \alpha = 1 \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Como  $\alpha \in ] - 2\pi, - \pi[$ , seja  $k = -1$ , e assim  $\alpha = \frac{\pi}{2} - 2\pi = \frac{\pi}{2} - \frac{4\pi}{2} = -\frac{3\pi}{2}$

Exame – 2013, 1ª Fase

23. Fazendo  $z = 2e^{i\left(\frac{\pi}{10}\right)}$ , temos que:

$$\bullet \bar{z} = 2e^{i\left(-\frac{\pi}{10}\right)}$$

$$\bullet z^6 = \left(2e^{i\left(\frac{\pi}{10}\right)}\right)^6 = 2^6 e^{i\left(6 \times \frac{\pi}{10}\right)} = 64e^{i\left(\frac{6\pi}{10}\right)} = 64e^{i\left(\frac{3\pi}{5}\right)}$$

Assim, para mostrarmos que  $2e^{i\left(\frac{\pi}{10}\right)}$  é solução da equação  $z^6 \times \bar{z} = 128i$  vamos substituir  $z$  por  $2e^{i\left(\frac{\pi}{10}\right)}$  na equação:

$$z^6 \times \bar{z} = 128i \Leftrightarrow 64e^{i\left(\frac{6\pi}{10}\right)} \times 2e^{i\left(-\frac{\pi}{10}\right)} = 128i \Leftrightarrow (64 \times 2)e^{i\left(\frac{6\pi}{10} + \left(-\frac{\pi}{10}\right)\right)} = 128i \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 128e^{i\left(\frac{5\pi}{10}\right)} = 128i \Leftrightarrow 128e^{i\left(\frac{\pi}{2}\right)} = 128i \Leftrightarrow 128i = 128i$$

Como da substituição resultou uma proposição verdadeira,  $z$  é solução da equação.

Teste Intermédio 12.º ano – 24.05.2013



24. Temos que metade do inverso de  $w$  é  $\frac{1}{2} \frac{\bar{w}}{w} = \frac{1}{2w}$

Logo, como o conjugado de  $w$  é igual a metade do inverso de  $w$ , vem que:  $\bar{w} = \frac{1}{2w} \Leftrightarrow w \times \bar{w} = \frac{1}{2}$

Se  $w = \rho e^{i\theta}$ , então  $\bar{w} = \rho e^{i(-\theta)}$  e, por isso,  $w \times \bar{w} = \rho e^{i\theta} \times \rho e^{i(-\theta)} = \rho \times \rho \times e^{i(\theta-\theta)} = \rho^2 e^0 = \rho^2 = |w|^2$

Assim, temos que:

$$\bar{w} = \frac{1}{2w} \Leftrightarrow w \times \bar{w} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow |w|^2 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow |w| = \pm \sqrt{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow |w| = \pm \frac{1 \times \sqrt{2}}{\sqrt{2} \times \sqrt{2}} \Leftrightarrow |w| = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Como  $|w|$  é um valor positivo, temos que  $\bar{w} = \frac{1}{2w} \Leftrightarrow |w| = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow |w - 0| = \frac{\sqrt{2}}{2}$  é a condição que define os números complexos, cujas imagens geométricas, no plano complexo, pertencem à circunferência de centro na origem e de raio  $\frac{\sqrt{2}}{2}$

Exame – 2012, Ép. especial

25. Como  $z_1 = e^{i\alpha} = \cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha$  e

$$z_2 = e^{i(\alpha + \frac{\pi}{2})} = \cos \left( \alpha + \frac{\pi}{2} \right) + i \operatorname{sen} \left( \alpha + \frac{\pi}{2} \right) = -\operatorname{sen} \alpha + i \cos \alpha, \text{ vem que:}$$

$$z_1 + z_2 = (\cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha) + (-\operatorname{sen} \alpha + i \cos \alpha) = (\cos \alpha - \operatorname{sen} \alpha) + i(\operatorname{sen} \alpha + \cos \alpha)$$

Assim,

- $\operatorname{Re}(z_1 + z_2) = \cos \alpha - \operatorname{sen} \alpha$  e como  $\alpha \in \left] \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2} \right[$ , logo  $\cos \alpha < \operatorname{sen} \alpha \Leftrightarrow \cos \alpha - \operatorname{sen} \alpha < 0$ , logo temos que  $\operatorname{Re}(z_1 + z_2) < 0$
- $\operatorname{Im}(z_1 + z_2) = \operatorname{sen} \alpha + \cos \alpha$  e como  $\alpha$  é um ângulo do 1.º quadrante,  $\operatorname{sen} \alpha > 0 \wedge \cos \alpha > 0 \Rightarrow \operatorname{sen} \alpha + \cos \alpha > 0$ , logo temos que  $\operatorname{Im}(z_1 + z_2) > 0$

Ou seja, a representação geométrica de  $z_1 + z_2$  no plano complexo, pertence ao 2.º quadrante.

Exame – 2012, 2ª Fase



26.

26.1. Começamos por simplificar as expressões de  $z_1$  e de  $z_2$ :

Recorrendo aos coeficientes da linha 3 do Triângulo de Pascal (1 3 3 1), temos que:

$$z_1 = (-2+i)^3 = 1(-2)^3 + 3(-2)^2(i) + 3(-2)(i)^2 + 1(i)^3 = -8 + 12i - 6i^2 - i = -8 + 6 + 12i - i = -2 + 11i$$

$$z_2 = \frac{1+28i}{2+i} = \frac{(1+28i) \times (2-i)}{(2+i) \times (2-i)} = \frac{2-i+56i-28i^2}{2^2-i^2} = \frac{2-28(-1)+55i}{4-(-1)} = \frac{30+55i}{5} = 6+11i$$

Assim, temos que

$$z^3 + z_1 = z_2 \Leftrightarrow z^3 + (-2+11i) = 6+11i \Leftrightarrow z^3 - 2 + 11i = 6+11i \Leftrightarrow z^3 = 8 \Leftrightarrow z = \sqrt[3]{8} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow z = \sqrt[3]{8}e^{i \times 0} \Leftrightarrow z = \sqrt[3]{8}e^{i(\frac{0}{3} + \frac{2k\pi}{3})}, k \in \{0,1,2\} \Leftrightarrow z = 2e^{i(\frac{2k\pi}{3})}, k \in \{0,1,2\}$$

Ou seja, temos 3 raízes de índice 3, que são as 3 soluções da equação:

- $k = 0 \rightarrow z = 2e^{i \times 0}$
- $k = 1 \rightarrow z = 2e^{i(\frac{2\pi}{3})}$
- $k = 2 \rightarrow z = 2e^{i(\frac{4\pi}{3})}$

26.2. Se  $w$  e  $\frac{1}{w}$  são raízes de índice  $n$  de um mesmo número complexo  $z$ , então  $w^n = z$  e  $\left(\frac{1}{w}\right)^n = z$ 

Logo temos que:

$$w^n = \left(\frac{1}{w}\right)^n \Leftrightarrow w^n = \frac{1}{w^n} \Leftrightarrow w^n \times w^n = 1 \Leftrightarrow (w^n)^2 = 1 \Leftrightarrow w^n = \pm\sqrt{1} \Leftrightarrow w^n = \pm 1$$

Como  $w^n = z$  temos que  $w^n = \pm 1 \Leftrightarrow z = \pm 1 \Leftrightarrow z = 1 \vee z = -1$ 

Exame – 2012, 1ª Fase

27. Como  $(\sqrt{2}i)^3 = (\sqrt{2})^3 i^3 = 2\sqrt{2}(-i) = -2\sqrt{2}i$ ,

$$\text{e como } e^{i(\frac{\pi}{4})} = \cos \frac{\pi}{4} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Vem que

$$\begin{aligned} \frac{(\sqrt{2}i)^3 \times e^{i(\frac{\pi}{4})}}{k+i} &= \frac{-2\sqrt{2}i \times \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{k+i} = \frac{\frac{-2i \times \sqrt{2}^2}{2} + \frac{-2i \times i\sqrt{2}^2}{2}}{k+i} = \frac{-2i - 2i^2}{k+i} = \frac{-2i - 2(-1)}{k+i} = \\ &= \frac{2-2i}{k+i} = \frac{(2-2i)(k-i)}{(k+i)(k-i)} = \frac{2k-2i-2ki+2i^2}{k^2-i^2} = \frac{2k-2-i(2+2k)}{k^2+1} \end{aligned}$$

$$\text{Logo vem que: } \operatorname{Re} \left( \frac{(\sqrt{2}i)^3 \times e^{i(\frac{\pi}{4})}}{k+i} \right) = \frac{2k-2}{k^2+1} \quad \text{e} \quad \operatorname{Im} \left( \frac{(\sqrt{2}i)^3 \times e^{i(\frac{\pi}{4})}}{k+i} \right) = -\frac{2+2k}{k^2+1}$$

Como  $z$  é um um número real se  $\operatorname{Im}(z) = 0$ , temos que:

$$-\frac{2+2k}{k^2+1} = 0 \Leftrightarrow 2+2k = 0 \Leftrightarrow k = \frac{-2}{2} \Leftrightarrow k = -1$$

Teste Intermédio 12.º ano – 24.05.2012



28.

28.1. Resolvendo a equação, vem:

$$z^2 + z + 1 = 0 \Leftrightarrow z = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4(1)(1)}}{2(1)} \Leftrightarrow z = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2} \Leftrightarrow z = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow z = \frac{-1 \pm \sqrt{3 \times (-1)}}{2} \Leftrightarrow z = \frac{-1 \pm \sqrt{3} \times \sqrt{-1}}{2} \Leftrightarrow z = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{C.S.: } \left\{ -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i ; -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right\}$$

Como  $w$  é a solução com coeficiente da parte imaginária positivo,  $w = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

Escrevendo  $w$  na forma trigonométrica temos  $w = \rho e^{i\theta}$ , onde:

$$\bullet \rho = |w| = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{4}\right) + \left(\frac{3}{4}\right)} = \sqrt{\frac{4}{4}} = \sqrt{1} = 1$$

$$\bullet \operatorname{tg} \theta = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{-1} = -\sqrt{3}; \text{ como } \operatorname{sen} \theta > 0 \text{ e } \operatorname{cos} \theta < 0, \theta \text{ é um ângulo do } 2.^\circ \text{ quadrante, logo}$$

$$\theta = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{3\pi}{3} - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$$

$$\text{Assim } z_1 = e^{i\left(\frac{2\pi}{3}\right)} \quad \text{e logo } \frac{1}{w} = \frac{1}{e^{i\left(\frac{2\pi}{3}\right)}} = e^{-i\left(\frac{2\pi}{3}\right)} = e^{i\left(-\frac{2\pi}{3}\right)}$$

28.2. Seja  $z = a + bi$ , com  $a \in \mathbb{R}$  e  $b \in \mathbb{R}$ .

Assim temos que  $\bar{z} = a - bi$ , pelo que:

$$(\bar{z} + i) \times (z - i) = (a - bi + i)(a + bi - i) = a^2 + abi - ai - abi - b^2i^2 + bi^2 + ai + bi^2 - i^2 =$$

$$= a^2 - b^2(-1) + b(-1) + b(-1) - (-1) = a^2 + b^2 - 2b + 1$$

$$\text{E como } |z - i|^2 = |a + bi - i|^2 = |a + i(b - 1)|^2 = \left(\sqrt{a^2 + (b - 1)^2}\right)^2 = a^2 + (b - 1)^2 = a^2 + b^2 - 2b + 1$$

$$\text{Temos que } (\bar{z} + i) \times (z - i) = |z - i|^2$$

Exame - 2011, Prova especial

29.

29.1. Como  $i^{4n+3} = i^3 = -i$ , vem que:

$$z_1 \times i^{4n+3} - b = (1 + 2i)(-i) - b = -i - 2i^2 - b = -i - 2(-1) - b = 2 - b - i$$

E como:

$$\sqrt{2}e^{i\left(\frac{5\pi}{4}\right)} = \sqrt{2} \left( \cos \frac{5\pi}{4} + i \operatorname{sen} \frac{5\pi}{4} \right) = \sqrt{2} \left( -\cos \frac{\pi}{4} - i \operatorname{sen} \frac{\pi}{4} \right) = \sqrt{2} \left( -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i \right) = -1 - i$$

Logo temos que:

$$w = \frac{z_1 \times i^{4n+3} - b}{\sqrt{2}e^{i\left(\frac{5\pi}{4}\right)}} = \frac{2 - b - i}{-1 - i} = \frac{(2 - b - i)(-1 + i)}{(-1 - i)(-1 + i)} = \frac{-2 + b + i + 2i - bi - i^2}{(-1)^2 - i^2} =$$

$$= \frac{-2 + b + 3i - bi - (-1)}{1 - (-1)} = \frac{-2 + 1 + b + i(3 - b)}{1 + 1} = \frac{-1 + b + i(3 - b)}{2} = \frac{-1 + b}{2} + \frac{3 - b}{2}i$$

Assim para que  $w$  seja um número real,  $\operatorname{Im}(w) = 0$ , ou seja:

$$\operatorname{Im}(w) = 0 \Leftrightarrow \frac{3 - b}{2} = 0 \Leftrightarrow 3 - b = 0 \Leftrightarrow 3 = b$$



29.2. Seja  $z = a + bi$ , com  $a \in \mathbb{R}$  e  $b \in \mathbb{R}$ .

Temos que:

- $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ , pelo que se  $|z| = 1$  então:

$$\sqrt{a^2 + b^2} = 1 \Leftrightarrow (\sqrt{a^2 + b^2})^2 = 1^2 \Leftrightarrow a^2 + b^2 = 1$$

- $|1 + z|^2 = |1 + a + bi|^2 = (\sqrt{(1+a)^2 + b^2})^2 = (\sqrt{1 + 2a + a^2 + b^2})^2 = 1 + 2a + a^2 + b^2$

- $|1 - z|^2 = |1 - a - bi|^2 = (\sqrt{(1-a)^2 + (-b)^2})^2 = (\sqrt{1 - 2a + a^2 + b^2})^2 = 1 - 2a + a^2 + b^2$

Assim temos que:

$$|1 + z|^2 + |1 - z|^2 = 1 + 2a + a^2 + b^2 + 1 - 2a + a^2 + b^2 = 2 + 2a^2 + 2b^2 = 2 + 2(a^2 + b^2) = 2 + 2(1) = 4$$

Exame – 2011, 2ª Fase

30.

30.1. Como  $z_1$  é raiz do polinómio, este é divisível por  $(z - 1)$ , pelo que podemos usar a regra de Ruffini para fazer a divisão e obter um polinómio de grau 2.

E assim temos que

$$z^3 - z^2 + 16z - 16 = (z - 1)(z^2 + 0z + 16) + 0 = (z - 1)(z^2 + 16)$$

Podemos agora determinar as raízes do polinómio  $z^2 + 16$  (que também são raízes do polinómio  $z^3 - z^2 + 16z - 16$ ) resolvendo a equação  $z^2 + 16 = 0$ :

$$z^2 + 16 = 0 \Leftrightarrow z^2 = -16 \Leftrightarrow z = \pm\sqrt{-16} \Leftrightarrow z = \pm\sqrt{16 \times (-1)} \Leftrightarrow z = 4i \vee z = -4i$$

Escrevendo as raízes encontradas na forma trigonométrica, temos:

$$z = 4e^{i(\frac{\pi}{2})} \vee z = 4e^{i(-\frac{\pi}{2})}$$

30.2. Começamos por escrever  $z_2$  na forma trigonométrica e calcular o produto  $z_2 \times z_3$  na forma trigonométrica:

Como  $\text{Re}(z_2) = 0$  e  $\text{Im}(z_2) > 0$ , então  $\arg(z_2) = \frac{\pi}{2}$ ; e como  $|z_2| = 5$ , logo  $z_2 = 5e^{i(\frac{\pi}{2})}$

Assim temos que:

$$z_2 \times z_3 = 5e^{i(\frac{\pi}{2})} \times e^{i(\frac{n\pi}{40})} = 5e^{i(\frac{\pi}{2} + \frac{n\pi}{40})} = 5e^{i(\frac{20\pi + n\pi}{40})} = 5e^{i(\frac{20\pi + n\pi}{40})}$$

Como a representação geométrica do número complexo  $z_2 \times z_3$  está no terceiro quadrante e pertence à bissetriz dos quadrantes ímpares se

$$\arg(z_2 \times z_3) = \pi + \frac{\pi}{4} + 2k\pi = \frac{4\pi}{4} + \frac{\pi}{4} + \frac{8k\pi}{4} = \frac{5\pi + 8k\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}, \text{ vem que:}$$

$$\frac{20\pi + n\pi}{40} = \frac{5\pi + 8k\pi}{4} \Leftrightarrow \frac{20\pi + n\pi}{40} = \frac{50\pi + 80k\pi}{40} \Leftrightarrow 20\pi + n\pi = 50\pi + 80k\pi \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 20 + n = 50 + 80k \Leftrightarrow n = 30 + 80k, k \in \mathbb{Z}$$

Substituindo  $k$  por valores inteiros, vem que:

- $k = -1$ , temos  $n = -50$ ;
- $k = 0$ , temos  $n = 30$ ;
- $k = 1$ , temos  $n = 110$ ;

Logo, o menor valor natural de  $n$  é 30.

Exame – 2011, 1ª Fase



31. Como 1 é solução da equação, o polinómio  $z^3 - z^2 + 4z - 4$  é divisível por  $(z - 1)$ , pelo que podemos usar a regra de Ruffini para fazer a divisão e obter um polinómio de grau 2.

E assim temos que

$$z^3 - z^2 + 4z - 4 = (z - 1)(z^2 + 0z + 4) + 0 = (z - 1)(z^2 + 4)$$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -1 & 4 & -4 \\ 1 & & 1 & 0 & 4 \\ \hline & 1 & 0 & 4 & 0 \end{array}$$

$$\text{Como } z^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow z^2 = -4 \Leftrightarrow z = \pm\sqrt{-4} \Leftrightarrow z = \pm\sqrt{4 \times (-1)} \Leftrightarrow z = 2i \vee z = -2i$$

Temos que:

$$z^3 - z^2 + 4z - 4 = 0 \Leftrightarrow (z - 1)(z^2 + 4) = 0 \Leftrightarrow z - 1 = 0 \vee z^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow z = 1 \vee z = 2i \vee z = -2i$$

Ou seja as três soluções são  $w_1 = 1$ ,  $w_2 = 2i$  e  $w_3 = -2i$

Logo as medidas dos lados do triângulo, cujos vértices são as representações geométricas das soluções da equação podem ser calculadas como

- $|w_1 - w_2| = |1 - 2i| = \sqrt{1^2 + (-2)^2} = \sqrt{1 + 4} = \sqrt{5}$
- $|w_1 - w_3| = |1 - (-2i)| = |1 + 2i| = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{1 + 4} = \sqrt{5}$
- $|w_2 - w_3| = |2i - (-2i)| = |2i + 2i| = |4i| = \sqrt{0^2 + 4^2} = \sqrt{16} = 4$

Logo o perímetro do triângulo é:

$$|w_1 - w_2| + |w_1 - w_3| + |w_2 - w_3| = \sqrt{5} + \sqrt{5} + 4 = 4 + 2\sqrt{5}$$

Teste Intermédio 12.º ano - 26.05.2011

32. Como não podemos calcular somas na forma trigonométrica, devemos escrever  $z_1$  na forma algébrica:  
 $z_1 = e^{i(\frac{\pi}{7})} = \cos \frac{\pi}{7} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{7}$

Assim temos que:

$$z_1 + z_2 = \cos \frac{\pi}{7} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{7} + 2 + i = 2 + \cos \frac{\pi}{7} + i \left(1 + \operatorname{sen} \frac{\pi}{7}\right)$$

$$\begin{aligned} \text{Logo, } |z_1 + z_2|^2 &= \left( \sqrt{\left(2 + \cos \frac{\pi}{7}\right)^2 + \left(1 + \operatorname{sen} \frac{\pi}{7}\right)^2} \right)^2 = \left(2 + \cos \frac{\pi}{7}\right)^2 + \left(1 + \operatorname{sen} \frac{\pi}{7}\right)^2 = \\ &= 2^2 + 2 \times 2 \times \cos \frac{\pi}{7} + \left(\cos \frac{\pi}{7}\right)^2 + 1^2 + 2 \times 1 \times \operatorname{sen} \frac{\pi}{7} + \left(\operatorname{sen} \frac{\pi}{7}\right)^2 = \\ &= 4 + 4 \cos \frac{\pi}{7} + \left(\cos \frac{\pi}{7}\right)^2 + 1 + 2 \operatorname{sen} \frac{\pi}{7} + \left(\operatorname{sen} \frac{\pi}{7}\right)^2 = \\ &= 5 + 4 \cos \frac{\pi}{7} + 2 \operatorname{sen} \frac{\pi}{7} + \left(\operatorname{sen} \frac{\pi}{7}\right)^2 + \left(\cos \frac{\pi}{7}\right)^2 = 5 + 4 \cos \frac{\pi}{7} + 2 \operatorname{sen} \frac{\pi}{7} + 1 = \\ &= 6 + 4 \cos \left(\frac{\pi}{7}\right) + 2 \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{7}\right) \end{aligned}$$

Exame - 2010, 1ª Fase



33. Escrevendo  $1 + \sqrt{3}i$  na forma trigonométrica temos  $1 + \sqrt{3}i = \rho e^{i\theta}$ , onde:

- $\rho = |1 + \sqrt{3}i| = \sqrt{1^2 + \sqrt{3}^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$
- $\operatorname{tg} \theta = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$ ; como  $\operatorname{sen} \theta > 0$  e  $\operatorname{cos} \theta > 0$ ,  $\theta$  é um ângulo do 1.º quadrante, logo  $\theta = \frac{\pi}{3}$

Assim  $1 + \sqrt{3}i = 2e^{i(\frac{\pi}{3})}$

Calculando o quadrado e, depois, o produto na forma trigonométrica temos:

$$(2e^{i\theta})^2 \times (1 + \sqrt{3}i) = 2^2 e^{i(2\theta)} \times 2e^{i(\frac{\pi}{3})} = 4 \times 2 \times e^{i(2\theta + \frac{\pi}{3})} = 8e^{i(2\theta + \frac{\pi}{3})}$$

Para que a imagem geométrica do número complexo  $(2e^{i\theta})^2 \times (1 + \sqrt{3}i)$  pertença à bissetriz do 3.º quadrante, o seu argumento deve ser igual a  $\frac{5\pi}{4} + 2k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , pelo que podemos calcular o valor de  $\theta$  com a igualdade:

$$\begin{aligned} 2\theta + \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} &\Leftrightarrow 2\theta = \frac{5\pi}{4} - \frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow 2\theta = \frac{15\pi}{12} - \frac{4\pi}{12} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 2\theta = \frac{11\pi}{12} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \theta = \frac{11\pi}{24} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Como  $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ , para  $k = 0$ , temos que  $\theta = \frac{11\pi}{24}$

Exame – 2009, Ép. especial

34. Simplificando a expressão indicada para  $z_1$ , temos:

$$z_1 = (k - i)(3 - 2i) = 3k - 2ki - 3i + 2i^2 = 3k + i(-2k - 3) + 2(-1) = 3k - 2 + i(-2k - 3)$$

Ou seja,  $\operatorname{Re}(z_1) = 3k - 2$  e  $\operatorname{Im}(z_1) = -2k - 3$

E para que  $z_1$  seja um imaginário puro,  $\operatorname{Re}(z_1) = 0$ , logo temos que:

$$3k - 2 = 0 \Leftrightarrow 3k = 2 \Leftrightarrow k = \frac{2}{3}$$

Resposta: **Opção C**

Exame – 2009, 2ª Fase





35. Temos que  $w = a + bi$ , com  $a \in \mathbb{R}^+$  e  $b \in \mathbb{R}^+$ , pelo que  $\bar{w} = a - bi$  e  $-w = -a - bi$ .

Como  $\overline{BC} = |\bar{w} - (-w)| = |a - bi - (-a - bi)| = |a - bi + a + bi| = |2a|$  e  $\overline{BC} = 8$ , vem que:

$$|2a| = 8, \text{ como } a > 0, \text{ sabemos que } 2a = 8 \Leftrightarrow a = 4$$

E como  $w = \sqrt{a^2 + b^2}$ , sendo  $a = 4$ , vem que  $w = \sqrt{4^2 + b^2} = \sqrt{16 + b^2}$ . Como  $|w| = 5$ , vem que:

$$\sqrt{16 + b^2} = 5 \Leftrightarrow (\sqrt{16 + b^2})^2 = 5^2 \Leftrightarrow 16 + b^2 = 25 \Leftrightarrow b^2 = 25 - 16 \Leftrightarrow b^2 = 9 \Leftrightarrow b = \pm\sqrt{9}$$

Como  $b > 0$ , sabemos que  $b = \sqrt{9} = 3$

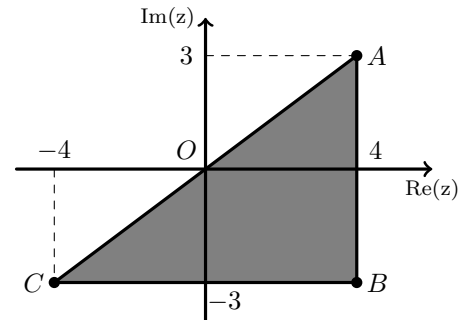
Assim, como  $a = 4$  e  $b = 3$  temos que:

- $w = a + bi = 4 + 3i$
- $\bar{w} = a - bi = 4 - 3i$
- $-w = -a - bi = -4 - 3i$

Pelo que podemos representar o triângulo, e perceber que considerando  $[BC]$  a base do triângulo ( $\overline{BC} = 8$ ), a altura é  $[AB]$  ( $\overline{AB} = |w - \bar{w}| = 6$ ).

Assim temos que a área é:

$$A_{[ABC]} = \frac{\overline{BC} \times \overline{AB}}{2} = \frac{8 \times 6}{2} = \frac{48}{2} = 24$$



Exame – 2009, 2ª Fase

36. Escrevendo  $-i$  na forma trigonométrica para facilitar o cálculo do produto temos:

$-i = e^{i(-\frac{\pi}{2})}$ , e logo:

$$-iz_2 = e^{i(-\frac{\pi}{2})} \times e^{i(\frac{5\pi}{6})} = e^{i(-\frac{\pi}{2} + \frac{5\pi}{6})} = e^{i(-\frac{3\pi}{6} + \frac{5\pi}{6})} = e^{i(\frac{2\pi}{6})} = e^{i(\frac{\pi}{3})}$$

$$\text{Logo } (-iz_2)^n = \left( e^{i(\frac{\pi}{3})} \right)^n = e^{i(n \times \frac{\pi}{3})} = e^{i(\frac{n\pi}{3})}$$

E como  $-1 = e^{i\pi}$ , temos que:

$$(-iz_2)^n = -1 \Leftrightarrow e^{i(\frac{n\pi}{3})} = e^{i\pi}, \text{ pelo que } \frac{n\pi}{3} = \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Como  $\frac{n\pi}{3} = \pi + 2k\pi$ , se atribuirmos valores a  $k$  temos:

- Se  $k = -1$ ,  $\frac{n\pi}{3} = \pi + 2(-1)\pi \Leftrightarrow n\pi = 3\pi - 6\pi \Leftrightarrow n = 3 - 6 \Leftrightarrow n = -3$  (mas  $-3 \notin \mathbb{N}$ )
- Se  $k = 0$ ,  $\frac{n\pi}{3} = \pi + 2(0)\pi \Leftrightarrow n\pi = 3\pi \Leftrightarrow n = 3$  ( $3 \in \mathbb{N}$ )
- Se  $k = 1$ ,  $\frac{n\pi}{3} = \pi + 2(1)\pi \Leftrightarrow n\pi = 3\pi + 6\pi \Leftrightarrow n = 3 + 6 \Leftrightarrow n = 9$  ( $9 \in \mathbb{N}$ , mas  $9 > 3$ )

Logo que o menor valor natural de  $n \in \mathbb{N}$ , tal que  $(-iz_2)^n = -1$  é 3, para  $k = 0$

Exame – 2009, 1ª Fase



37. Representando os pontos  $A$  e  $B$ , podemos desenhar o triângulo  $[ABO]$  (ver figura ao lado).

Como  $z_2 = 8e^{i(-\frac{\pi}{4})}$ , podemos escrever este número na forma algébrica:

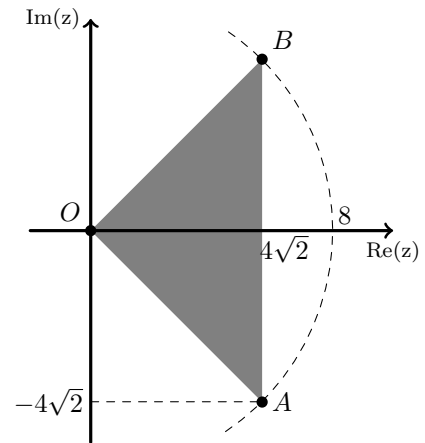
$$\begin{aligned} z_2 &= 8e^{i(-\frac{\pi}{4})} = 8 \left( \cos \left( -\frac{\pi}{4} \right) + i \operatorname{sen} \left( -\frac{\pi}{4} \right) \right) = \\ &= 8 \left( \cos \frac{\pi}{4} - i \operatorname{sen} \frac{\pi}{4} \right) = 8 \left( \frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = 4\sqrt{2} - 4\sqrt{2}i \end{aligned}$$

E assim, considerando como base do triângulo o lado  $[AB]$ , temos que a medida da base é  $2|\operatorname{Im}(z)| = 2 \times 4\sqrt{2}$  e a medida da altura é  $\operatorname{Re}(z) = 4\sqrt{2}$ .

Logo a área do triângulo  $[ABO]$  é:

$$A_{[ABO]} = \frac{2 \times 4\sqrt{2} \times 4\sqrt{2}}{2} = 4^2 \times (\sqrt{2})^2 = 16 \times 2 = 32$$

Exame – 2008, Ép. especial



38. Como  $i^{46} = i^{4 \times 11 + 2} = i^2 = -1$ , pelo que  $z_2 = z_1 \cdot i^{46} = z_1(-1) = -z_1 = -1 + \sqrt{3}i$

Como  $\overline{AB} = |z_1 - z_2|$ , vem que:

$$\begin{aligned} \overline{AB} &= \left| 1 - \sqrt{3}i - (-1 + \sqrt{3}i) \right| = \left| 1 - \sqrt{3}i + 1 - \sqrt{3}i \right| = \left| 2 - 2\sqrt{3}i \right| = \\ &= \sqrt{2^2 + (-2\sqrt{3})^2} = \sqrt{4 + 4 \times 3} = \sqrt{4 + 12} = \sqrt{16} = 4 \end{aligned}$$

Exame – 2008, 1ª Fase

39. Como  $z_2 = 4iz_1$ , vem que:

$$z_2 = 4iz_1 = 4i(3 + yi) = 12i + 4yi^2 = 12i + 4y(-1) = -4y + 12i$$

Assim sabemos que  $\operatorname{Im}(z_2) = 12$ , e também que  $\operatorname{Im}(z_1) = y$ .

Como  $\operatorname{Im}(z_1) = \operatorname{Im}(z_2)$  temos que  $y = 12$ , pelo que, substituindo na expressão simplificada de  $z_2$  temos:

$$z_2 = -4(12) + 12i = -48 + 12i$$

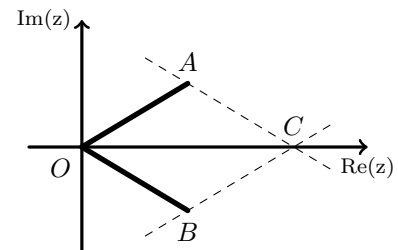
Exame – 2007, 2ª fase

40.

- 40.1. Como  $[AOBC]$  é um paralelogramo temos que  $C$  é a imagem geométrica da soma dos complexos que têm como imagens geométricas os pontos  $A$  e  $B$ , ou seja,  $w = z + \bar{z}$

Como  $z = e^{i\alpha} = \cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha$ ,  
temos que  $\bar{z} = \cos \alpha - i \operatorname{sen} \alpha$

Assim  $w = z + \bar{z} = \cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha + \cos \alpha - i \operatorname{sen} \alpha = 2 \cos \alpha$



40.2. Como  $z = e^{i\alpha}$ , calculando a potência, vem  $z^3 = (e^{i\alpha})^3 = e^{i(3\alpha)}$

Como  $i = e^{i(\frac{\pi}{2})}$ , fazendo a divisão na forma trigonométrica temos:

$$\frac{z^3}{i} = \frac{e^{i(3\alpha)}}{e^{i(\frac{\pi}{2})}} = e^{i(3\alpha - \frac{\pi}{2})} = \cos\left(3\alpha - \frac{\pi}{2}\right) + i \operatorname{sen}\left(3\alpha - \frac{\pi}{2}\right)$$

E  $\frac{z^3}{i}$  é um número real se  $\operatorname{Im}\left(\frac{z^3}{i}\right) = 0$ , pelo que,  $\operatorname{sen}\left(3\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = 0$

$$\operatorname{sen}\left(3\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow 3\alpha - \frac{\pi}{2} = 0 + k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow 3\alpha = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$$

Como se pretende que  $\alpha \in ]0, \frac{\pi}{2}[$ , atribuindo o valor zero a  $k$  temos  $\alpha = \frac{\pi}{6}$

Exame – 2007, 1ª fase

41. Resolvendo a equação temos:

$$iz^3 - \sqrt{3} - i = 0 \Leftrightarrow iz^3 = \sqrt{3} + i \Leftrightarrow z^3 = \frac{\sqrt{3}}{i} + \frac{i}{i} \Leftrightarrow z^3 = \frac{i\sqrt{3}}{i^2} + 1 \Leftrightarrow z^3 = -i\sqrt{3} + 1 \Leftrightarrow z^3 = 1 - \sqrt{3}i$$

Escrevendo  $1 - \sqrt{3}i$  na forma trigonométrica ( $z^3 = \rho e^{i\theta}$ ) temos:

- $\rho = |z^3| = \sqrt{1^2 + (-\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$
- $\operatorname{tg} \theta = \frac{-\sqrt{3}}{1} = -\sqrt{3}$ ; como  $\operatorname{sen} \theta < 0$  e  $\operatorname{cos} \theta > 0$ ,  $\theta$  é um ângulo do 4.º quadrante, logo  $\theta = -\frac{\pi}{3}$

Assim  $z^3 = 2e^{i(-\frac{\pi}{3})}$ , e por isso temos que:

$$\sqrt[3]{2e^{i(-\frac{\pi}{3})}} = \sqrt[3]{2}e^{i\left(-\frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3}\right)}, k \in \{0, 1, 2\}, \text{ ou seja, temos 3 raízes de índice 3:}$$

- $k = 0 \rightarrow w_1 = \sqrt[3]{2}e^{i(-\frac{\pi}{9})}$
- $k = 1 \rightarrow w_2 = \sqrt[3]{2}e^{i(-\frac{\pi}{9} + \frac{2\pi}{3})} = \sqrt[3]{2}e^{i(-\frac{\pi}{9} + \frac{6\pi}{9})} = \sqrt[3]{2}e^{i(\frac{5\pi}{9})}$
- $k = 2 \rightarrow w_3 = \sqrt[3]{2}e^{i(-\frac{\pi}{9} + \frac{4\pi}{3})} = \sqrt[3]{2}e^{i(-\frac{\pi}{9} + \frac{12\pi}{9})} = \sqrt[3]{2}e^{i(\frac{11\pi}{9})}$

Logo  $w_3$  é a única solução da equação que pertence ao terceiro quadrante, porque  $\pi < \frac{11\pi}{9} < \frac{3\pi}{2}$ , ou seja

$$\pi < \arg(w_3) < \frac{3\pi}{2}.$$

Logo, a solução da equação que pertence ao 3.º quadrante, escrita na fórmula trigonométrica é:

$$w_3 = \sqrt[3]{2}e^{i(\frac{11\pi}{9})}$$

Exame – 2006, Ép. especial



42. Como o triângulo  $[AOB]$  é equilátero e tem perímetro 6, logo cada lado tem comprimento 2.

Assim  $A$  e  $B$  devem estar sobre a circunferência de centro na origem e raio 2, para que  $\overline{OA} = \overline{OB} = 2$  (o que significa que  $|z| = |\bar{z}| = 2$ ).

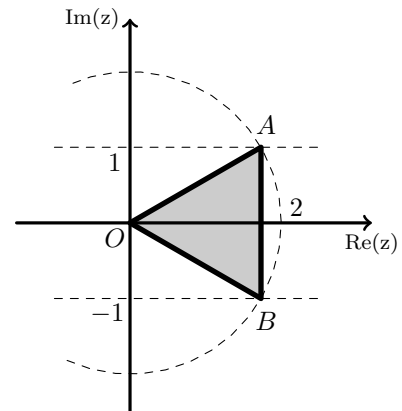
Como  $B$  é simétrico de  $A$  relativamente ao eixo real (porque  $\bar{z}$  é o conjugado de  $z$ ) e  $\overline{AB} = 2$ , sabemos que  $A$  está sobre a reta  $\text{Im}(w) = 1$  e  $B$  sobre a reta  $\text{Im}(w) = -1$

Como  $\text{Im}(z) = 1$  e  $\text{Re}(z) > 0$ , sabemos que  $z$  é da forma  $z = a + i, a \in \mathbb{R}^+$

Por outro lado, temos que  $|z| = |a + i| = \sqrt{a^2 + 1^2} = \sqrt{a^2 + 1}$ , e como  $|z| = 2$ , temos que:

$$\sqrt{a^2 + 1} = 2 \Leftrightarrow (\sqrt{a^2 + 1})^2 = 2^2 \Rightarrow a^2 + 1 = 4$$

Como  $a > 0$ , temos que  $a^2 + 1 = 4 \Leftrightarrow a^2 = 3 \Leftrightarrow a = \sqrt{3}$ , logo  $z = \sqrt{3} + i$



Exame – 2006, 2ª fase

43. Temos que:

$$z_1 = e^{i\alpha} = \cos \alpha + i \sin \alpha, \text{ e}$$

$$z_2 = e^{i(\frac{\pi}{2} - \alpha)} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha + i \cos \alpha = \sin \alpha + i \cos \alpha$$

$$\text{Logo } z_1 + z_2 = (\cos \alpha + i \sin \alpha) + (\sin \alpha + i \cos \alpha) = (\cos \alpha + \sin \alpha) + i(\sin \alpha + \cos \alpha)$$

Logo  $\text{Re}(z_1 + z_2) = \text{Im}(z_1 + z_2)$ , o que significa que a representação geométrica de  $z_1 + z_2$  pertence à bissetriz dos quadrantes ímpares.

Exame – 2005, 1ª fase

44. Como a área do retângulo é 6, e a lado maior mede  $3\sqrt{2}$  ( $\overline{OR} = 3\sqrt{2}$ ), temos que:

$$A_{[OPQR]} = 6 \Leftrightarrow \overline{OP} \times \overline{OR} = 6 \Leftrightarrow \overline{OP} \times 3\sqrt{2} = 6 \Leftrightarrow \overline{OP} = \frac{6}{3\sqrt{2}} \Leftrightarrow \overline{OP} = \frac{6 \times \sqrt{2}}{3\sqrt{2}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \overline{OP} = \frac{6\sqrt{2}}{3 \times 2} \Leftrightarrow \overline{OP} = \sqrt{2}$$

Assim, temos que  $|z_1| = \sqrt{2}$  e  $\arg(z_1) = \frac{\pi}{4}$ , ou seja:

$$z_1 = \sqrt{2}e^{i(\frac{\pi}{4})} = \sqrt{2}\left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = \frac{2}{2} + \frac{2}{2}i = 1 + i$$

Por outro lado, como as retas  $OP$  e  $OR$  são perpendiculares (porque contém lados adjacentes de um retângulo), se  $\arg(z_1) = \frac{\pi}{4}$ , então  $\arg(z_2) = -\frac{\pi}{4}$  ( $z_2$  tem a imagem geométrica no 4.º quadrante).

Assim, temos que  $|z_2| = 3\sqrt{2}$  e  $\arg(z_2) = -\frac{\pi}{4}$ , ou seja:

$$z_2 = 3\sqrt{2}e^{i(-\frac{\pi}{4})} = 3\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) = 3\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)i\right) = \frac{3 \times 2}{2} - \frac{3 \times 2}{2}i = 3 - 3i$$

Exame – 2004, Ép. especial



45. Considerando  $z$  na forma trigonométrica temos  $z = \rho e^{i\theta}$ , calculando a potência, vem que:  
 $z^3 = \rho^3 e^{i(3\theta)}$

Como a imagem geométrica de  $z$  pertence ao primeiro quadrante, temos que  $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ , e assim:

$$3 \times 0 < 3\theta < 3 \times \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow 0 < 3\theta < \frac{3\pi}{2}$$

Logo  $0 < \arg(z^3) < \frac{3\pi}{2}$ , o que significa que, dependendo do valor de  $\theta$ , a imagem geométrica de  $z^3$  pode pertencer ao primeiro quadrante (se  $0 < 3\theta < \frac{\pi}{2}$ ), ou ao segundo (se  $\frac{\pi}{2} < 3\theta < \pi$ ), ou ao terceiro (se  $\pi < 3\theta < \frac{3\pi}{2}$ ), mas nunca ao quarto quadrante.

Exame – 2004, 1ª fase

46. Como a representação geométrica de  $z$  está situada sobre a reta definida pela equação  $\operatorname{Re}(z) = -2$ , temos que  $z = -2 + bi$ , com  $b \in \mathbb{R}$ .  
 Assim  $\bar{z} = -2 - bi$ , com  $b \in \mathbb{R}$ .

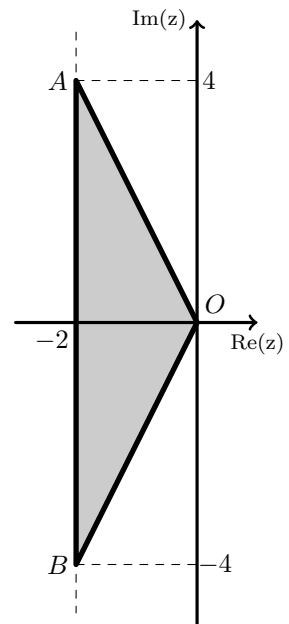
Tomando para altura a distância da origem à reta  $\operatorname{Re}(z) = -2$ , temos que a altura é 2, e a base terá de comprimento  $|z - \bar{z}| = |a + bi - (a - bi)| = |a + bi - a + bi| = |2bi|$

Como a representação geométrica de  $z$  pertence ao segundo quadrante,  $b > 0$ , e logo a medida da base será  $2b$ .

Como a área do triângulo é 8, (com altura 2 e base  $2b$ ) temos que:

$$A_{[AOB]} = 8 \Leftrightarrow \frac{2b \times 2}{2} = 8 \Leftrightarrow 2b = 8 \Leftrightarrow b = 4$$

Assim temos que  $z = -2 + 4i$ , pelo que  $\bar{z} = -2 - 4i$  e temos, na figura ao lado a representação, no plano complexo, do triângulo  $[AOB]$ .



Exame – 2003, 2ª Fase



47. Escrevendo  $z_1$  na forma trigonométrica temos  $z_1 = \rho e^{i\theta}$ , onde:

- $\rho = |z_1| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$
- $\operatorname{tg} \theta = \frac{-1}{1} = -1$ ; como  $\operatorname{sen} \theta < 0$  e  $\operatorname{cos} \theta > 0$ ,  $\theta$  é um ângulo do 4.º quadrante, logo  $\theta = -\frac{\pi}{4}$

Assim,  $z_1 = \sqrt{2}e^{i(-\frac{\pi}{4})}$

Por outro lado, podemos escrever  $z = \rho e^{i\theta}$  e  $\bar{z} = \rho e^{i(-\theta)}$ , pelo que calculando a potência e multiplicando na forma trigonométrica temos que:

$$z^2 = \bar{z} \times z_1 \Leftrightarrow (\rho e^{i\theta})^2 = \rho e^{i(-\theta)} \times \sqrt{2}e^{i(-\frac{\pi}{4})} \Leftrightarrow \rho^2 e^{i(2\theta)} = \rho \times \sqrt{2} \times e^{i(-\theta - \frac{\pi}{4})}$$

Como dois números complexos  $w_1$  e  $w_2$ , são iguais se  $|w_1| = |w_2| \wedge \arg(w_1) = \arg(w_2) + 2k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$  vem:

$$\begin{cases} \rho^2 = \rho\sqrt{2} \\ 2\theta = -\theta - \frac{\pi}{4} + 2k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \rho^2 - \rho\sqrt{2} = 0 \\ 2\theta + \theta = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \rho(\rho - \sqrt{2}) = 0 \\ 3\theta = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \rho = 0 \vee \rho = \sqrt{2} \\ \theta = -\frac{\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3} \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

Assim, atribuindo valores 0, 1 e 2 a  $k$ , temos:

- $k = 0 \rightarrow \theta = -\frac{\pi}{12}$
- $k = 1 \rightarrow \theta = -\frac{\pi}{12} + \frac{2\pi}{3} = -\frac{\pi}{12} + \frac{8\pi}{12} = \frac{7\pi}{12}$
- $k = 2 \rightarrow \theta = -\frac{\pi}{12} + \frac{2 \times 2\pi}{3} = -\frac{\pi}{12} + \frac{4\pi}{3} = -\frac{\pi}{12} + \frac{16\pi}{12} = \frac{15\pi}{12} = \frac{5\pi}{4}$

Logo os números complexos, não nulos, que são soluções da equação são:

$$w_1 = \sqrt{2}e^{i(-\frac{\pi}{12})}, \quad w_2 = \sqrt{2}e^{i(\frac{7\pi}{12})} \quad \text{e} \quad w_3 = \sqrt{2}e^{i(\frac{5\pi}{4})}$$

Exame – 2002, Prova para militares

48.

48.1.  $z_1$  é raiz do polinómio se  $z_1^2 + b(z_1) + c = 0$ , pelo que temos:

$$\begin{aligned} (1+i)^2 + b(1+i) + c = 0 &\Leftrightarrow (1^2 + 2i + i^2) + (b+bi) + c = 0 \Leftrightarrow 1 + 2i - 1 + b + bi + c = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow b + c + 2i + bi = 0 \Leftrightarrow (b+c) + (2+b)i = 0 + 0i \end{aligned}$$

Como dois números complexos,  $w_1$  e  $w_2$  são iguais se  $\operatorname{Re}(w_1) = \operatorname{Re}(w_2) \wedge \operatorname{Im}(w_1) = \operatorname{Im}(w_2)$ , temos que:

$$\begin{cases} b+c=0 \\ 2+b=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2+c=0 \\ b=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=2 \\ b=-2 \end{cases}$$

Logo  $z_1$  é raiz do polinómio  $x^2 + bx + c$  se  $b = -2 \wedge c = 2$



48.2. Escrevendo  $z_1$  na forma trigonométrica temos  $z_1 = \rho e^{i\theta}$ , onde:

- $\rho = |z_1| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$
- $\operatorname{tg} \theta = \frac{1}{1} = 1$ ; como  $\operatorname{sen} \theta > 0$  e  $\operatorname{cos} \theta > 0$ ,  $\theta$  é um ângulo do 1.º quadrante, logo  $\theta = \frac{\pi}{4}$

Assim,  $z_1 = \sqrt{2}e^{i(\frac{\pi}{4})}$  e como  $\overline{z_2} = e^{i(-\alpha)}$ , vem que:

$$z_1 \times \overline{z_2} = \sqrt{2}e^{i(\frac{\pi}{4})} \times e^{i(-\alpha)} = \sqrt{2}e^{i(\frac{\pi}{4}-\alpha)}$$

Como  $z_1 \times \overline{z_2}$  é um número real negativo se  $\arg(z_1 \times \overline{z_2}) = \pi + 2k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , temos que:

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{4} - \alpha = \pi + 2k\pi &\Leftrightarrow \frac{\pi}{4} - \frac{4\alpha}{4} = \frac{4\pi}{4} + \frac{4 \times 2k\pi}{4} \Leftrightarrow \pi - 4\alpha = 4\pi + 8k\pi \Leftrightarrow -4\alpha = 3\pi + 8k\pi \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \alpha = -\frac{3\pi}{4} - \frac{8k\pi}{4} \Leftrightarrow \alpha = -\frac{3\pi}{4} - 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Como se pretende um valor de  $\alpha$ , pertencente ao intervalo de  $[0, 2\pi]$ , para  $k = -1$ , temos:

$$\alpha = -\frac{3\pi}{4} - 2(-1)\pi = -\frac{3\pi}{4} + 2\pi = -\frac{3\pi}{4} + \frac{8\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}$$

Exame – 2002, 2ª Fase

49. O perímetro do triângulo  $[ABO]$  é dado por:  $P_{[ABO]} = \overline{AB} + \overline{OA} + \overline{AB}$ .

Escrevendo  $z_2$  na forma algébrica temos:

$$z_2 = \sqrt{2}e^{i(\frac{3\pi}{4})} = \sqrt{2} \left( \cos \frac{3\pi}{4} + i \operatorname{sen} \frac{3\pi}{4} \right) = \sqrt{2} \left( -\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \frac{\sqrt{2}}{2}i \right) = -\frac{2}{2} + \frac{2}{2}i = -1 + i$$

- $\overline{OB} = |z_2| = \sqrt{2}$
- $\overline{OA} = |z_1| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$
- $\overline{AB} = |z_1 - z_2| = |1 + i - (-1 + i)| = |1 + i + 1 - i| = |2| = 2$

Assim,  $P_{[ABO]} = \overline{AB} + \overline{OA} + \overline{AB} = 2 + \sqrt{2} + \sqrt{2} = 2 + 2\sqrt{2}$

Exame – 2002, 1ª fase - 1ª chamada

50. Como  $2i = 2e^{i(\frac{\pi}{2})}$ , calculando o produto na forma trigonométrica, temos que:

$$z_2 = 2i \times z_1 = 2e^{i(\frac{\pi}{2})} \times \rho e^{i(\frac{\pi}{3})} = 2\rho e^{i(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3})}$$

Pelo que,  $\arg(z_2) - \arg(z_1) = \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3}\right) - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2}$ , o que significa que o triângulo  $[AOB]$  é retângulo em  $O$ .

Assim podemos considerar  $|z_1|$  como a medida da base e  $|z_2|$  como a medida da altura (ou vice-versa):

$$A_{[AOB]} = 16 \Leftrightarrow \frac{|z_1| \times |z_2|}{2} = 16 \Leftrightarrow \frac{\rho \times 2\rho}{2} = 16 \Leftrightarrow \rho^2 = 16 \Leftrightarrow \rho = \pm\sqrt{16} = \rho = \pm 4$$

Como  $\rho$  é positivo, temos que  $\rho = 4$  e logo  $z_1 = 4e^{i(\frac{\pi}{3})}$

Escrevendo  $z_1$  na forma algébrica, vem:

$$z_1 = 4e^{i(\frac{\pi}{3})} = 4 \left( \cos \frac{\pi}{3} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{3} \right) = 4 \left( \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) = \frac{4}{2} + \frac{4\sqrt{3}}{2}i = 2 + 2\sqrt{3}i$$

Exame – 2001, Prova para militares



51. Escrevendo  $z_1$  na forma trigonométrica temos  $z_1 = \rho e^{i\theta}$ , onde:

- $\rho = |z_1| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$
- $\operatorname{tg} \theta = \frac{1}{1} = 1$ ; como  $\operatorname{sen} \theta > 0$  e  $\operatorname{cos} \theta > 0$ ,  $\theta$  é um ângulo do 1.º quadrante, logo  $\theta = \frac{\pi}{4}$

Assim,  $z_1 = \sqrt{2}e^{i(\frac{\pi}{4})}$

Logo calculando  $z_1^{4n+1}$ , temos:

$$z_1^{4n+1} = \left(\sqrt{2}e^{i(\frac{\pi}{4})}\right)^{4n+1} = \left(\sqrt{2}\right)^{4n+1} e^{i((4n+1)\times\frac{\pi}{4})} = \left(\sqrt{2}\right)^{4n+1} e^{i(\frac{4n\pi}{4} + \frac{\pi}{4})} = \left(\sqrt{2}\right)^{4n+1} e^{i(\frac{\pi}{4} + n\pi)}, n \in \mathbb{N}$$

Como um número complexo  $w$  tem a sua representação geométrica sobre a bissetriz dos quadrantes ímpares se  $\arg(w) = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ , e  $\arg(z_1^{4n+1}) = \frac{\pi}{4} + n\pi, n \in \mathbb{N}$ , então a imagem geométrica de  $z_1^{4n+1}$  está sobre a bissetriz dos quadrantes ímpares para todos os valores naturais de  $n$ .

Exame – 2001, Ép. especial

52.

52.1. Como um losango tem os lados todos iguais, temos que o lado ( $l$ ) do losango tem medida  $\frac{20}{4} = 5$ .

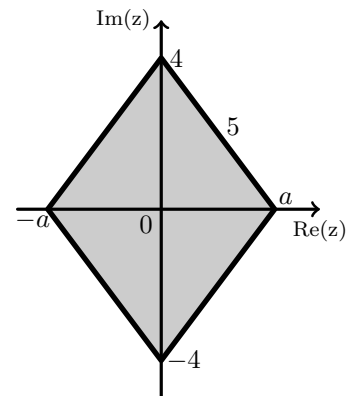
Logo, se o ponto  $A$ , for a representação geométrica de  $z_1$ , o ponto  $B$ , simétrico de  $A$ , relativamente à origem também é um vértice do losango, por este estar centrado na origem, ou seja,  $B$  é a imagem geométrica do número complexo  $z_2 = -4i$ .

Como o losango está centrado na origem, as suas diagonais estão sobre os eixos, pelos que os restantes vértices são números reais,  $z_3$  e  $z_4$ , tais que  $|z_1 - z_3| = 5$  e  $|z_1 - z_4| = 5$ .

Assim, sendo  $z = a$  um número real, temos que:

$$\begin{aligned} |z_1 - z| = 5 &\Leftrightarrow |4i - a| = 5 \Leftrightarrow |-a + 4i| = 5 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \sqrt{(-a)^2 + (4)^2} = 5 \Leftrightarrow \sqrt{a^2 + 16} = 5 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \left(\sqrt{a^2 + 16}\right)^2 = (5)^2 \Leftrightarrow a^2 + 16 = 25 \Leftrightarrow a^2 = 25 - 16 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow a = \pm\sqrt{9} \Leftrightarrow a = 3 \vee a = -3 \end{aligned}$$

Logo os números complexos, cujas imagens geométricas são os restantes vértices do losango, são  $z_2 = -4i$ ,  $z_3 = 3$  e  $z_4 = -3$ .



52.2. Como  $\left(\sqrt{2}e^{i(\frac{\pi}{4})}\right)^2 = (\sqrt{2})^2 e^{i(2\times\frac{\pi}{4})} = 2e^{i(\frac{\pi}{2})} = 2i$ , temos que:

$$\begin{aligned} \left(\sqrt{2}e^{i(\frac{\pi}{4})}\right)^2 \cdot z = 2 + z_1 &\Leftrightarrow 2i \cdot z = 2 + 4i \Leftrightarrow z = \frac{2 + 4i}{2i} \Leftrightarrow z = \frac{(2 + 4i)(i)}{2i(i)} \Leftrightarrow z = \frac{2i + 4i^2}{2i^2} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow z = \frac{2i + 4(-1)}{2(-1)} \Leftrightarrow z = \frac{-4 + 2i}{-2} \Leftrightarrow z = 2 - i \end{aligned}$$

Exame – 2001, 1ª fase - 2ª chamada





53.

53.1. Seja  $w$  o número complexo que tem por imagem geométrica o ponto  $P$ , e como  $w$  é uma das raízes quadradas de  $z_1$ , temos que  $w^2 = z_1$ .

$$w^2 = (4 + bi)^2 = 4^2 + 2 \times 4 \times bi + (bi)^2 = 16 + 8bi + b^2i^2 = 16 + 8bi - b^2 = 16 - b^2 + 8bi$$

Como  $w^2 = z_1$ , então  $\operatorname{Re}(w) = \operatorname{Re}(z_1) \wedge \operatorname{Im}(w) = \operatorname{Im}(z_1)$ , ou seja:

$$\begin{aligned} 16 - b^2 = 7 \wedge 8b = 24 &\Leftrightarrow 16 - b^2 = 7 \wedge 8b = 24 \Leftrightarrow 16 - 7 = b^2 \wedge b = 3 \Leftrightarrow 9 = b^2 \wedge b = 3 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow b = \pm\sqrt{9} \wedge b = 3 \Leftrightarrow b = \pm 3 \wedge b = 3 \Leftrightarrow b = 3 \end{aligned}$$

Logo a ordenada do ponto  $P$  é 3.

53.2. Como  $\operatorname{Re}(z_1) > 0$  e também  $\operatorname{Im}(z_1) > 0$ , temos que a representação geométrica de  $z_1$  pertence ao primeiro quadrante, isto é  $0 < \arg(z_1) < \frac{\pi}{2}$ .

Mas também, e porque  $\operatorname{Re}(z_1) < \operatorname{Im}(z_1)$ , a representação geométrica de  $z_1$  está acima da bissetriz dos quadrantes ímpares, ou seja,  $\frac{\pi}{4} < \arg(z_1) < \frac{3\pi}{4}$ .

Pela conjunção das duas condições sabemos que  $\frac{\pi}{4} < \arg(z_1) < \frac{\pi}{2}$

Considerando  $|z_1| = \rho$  e fazendo o produto na forma trigonométrica, vem:

$$z_1 \times z_2 = \rho e^{i\theta} \times e^{i\alpha} = \rho e^{i(\theta+\alpha)}$$

Assim, como  $\arg(z_1 \times z_2) = \theta + \alpha$ , vem que:

$$\frac{\pi}{4} + \frac{3\pi}{4} < \arg(z_1 \times z_2) < \frac{\pi}{2} + \pi \Leftrightarrow \frac{4\pi}{4} < \arg(z_1 \times z_2) < \frac{\pi}{2} + \frac{2\pi}{2} \Leftrightarrow \pi < \arg(z_1 \times z_2) < \frac{3\pi}{2}$$

Ou seja, a imagem geométrica de  $(z_1 \times z_2)$  pertence ao **3.º quadrante**.

Exame – 2001, Prova modelo

54.

54.1. Como  $z_1$  tem argumento  $\frac{\pi}{6}$ , podemos considerar  $z_1 = \rho e^{i(\frac{\pi}{6})}$ ,  $\rho \in \mathbb{R}^+$ , e assim:

$$z_2 = z_1^4 = \left(\rho e^{i(\frac{\pi}{6})}\right)^4 = \rho^4 e^{i(4 \times \frac{\pi}{6})} = \rho^4 e^{i(\frac{4\pi}{3})} = \rho^4 e^{i(\frac{2\pi}{3})}$$

Assim, vem que, a amplitude do ângulo  $A_1OA_2$ , é dada por:

$$\arg(z_2) - \arg(z_1) = \frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{6} = \frac{4\pi}{6} - \frac{\pi}{6} = \frac{3\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$$

Ou seja, ângulo  $A_1OA_2$  é reto.

54.2. Se o perímetro  $P_C$  da circunferência é  $4\pi$ , então podemos calcular o raio  $r$ :

$$P_C = 2\pi r \Leftrightarrow 4\pi = 2\pi r \Leftrightarrow \frac{4\pi}{2\pi} = r \Leftrightarrow 2 = r, \text{ ou seja } |z_1| = 2$$

Logo podemos escrever  $z_1$  na forma trigonométrica e depois na forma algébrica:

$$z_1 = 2e^{i(\frac{\pi}{6})} = 2 \left( \cos \frac{\pi}{6} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{6} \right) = 2 \left( \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right) = \sqrt{3} + i$$

Exame – 2000, 2ª fase



55.

55.1. Como 1 é raiz do polinómio, este é divisível por  $(x - 1)$ , pelo que podemos usar a regra de Ruffini para fazer a divisão e obter um polinómio de grau 2.

E assim temos que

$$x^3 - 3x^2 + 6x - 4 = (x - 1)(x^2 - 2x + 4) + 0 = (x - 1)(x^2 - 2x + 4)$$

Podemos agora determinar as raízes do polinómio  $x^2 - 2x + 4$  (que também são raízes do polinómio  $x^3 - 3x^2 + 6x - 4$ ) resolvendo a equação  $x^2 - 2x + 4 = 0$ :

$$\begin{aligned} x^2 - 2x + 4 = 0 &\Leftrightarrow x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(1)(4)}}{2 \times 1} \Leftrightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 16}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{-12}}{2} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{4 \times 3 \times (-1)}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{2 \pm 2i\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow x = 1 \pm \sqrt{3}i \end{aligned}$$

Logo as raízes do polinómio são  $1$ ,  $1 + \sqrt{3}i$  e  $1 - \sqrt{3}i$

- 55.2. • como  $\bar{z}$  é o conjugado de  $z$ , sabemos que  $\arg(z) = -\arg(\bar{z})$   
 • como o ângulo  $AOB$  é reto, temos que  $\arg(z) + -(\arg(\bar{z})) = \frac{\pi}{2}$

Logo,

$$\arg(z) + -(\arg(\bar{z})) = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \arg(z) + -(-\arg(z)) = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow$$

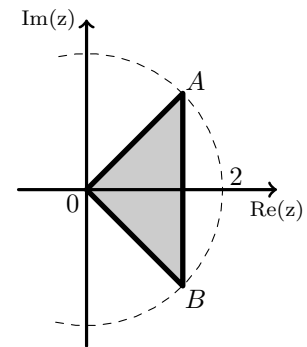
$$\Leftrightarrow \arg(z) + \arg(z) = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow 2\arg(z) = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \arg(z) = \frac{\pi}{4}$$

$$\text{Logo } z = 2e^{i(\frac{\pi}{4})}$$

Assim, como  $i = e^{i(\frac{\pi}{2})}$ , fazendo a divisão na forma trigonométrica. e escrevendo o resultado na forma algébrica vem que:

$$\begin{aligned} \frac{z}{i} &= \frac{2e^{i(\frac{\pi}{4})}}{e^{i(\frac{\pi}{2})}} = 2e^{i(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2})} = 2e^{i(\frac{\pi}{4} - \frac{2\pi}{4})} = 2e^{i(-\frac{\pi}{4})} = 2 \left( \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i \operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{4}\right) \right) = \\ &= 2 \left( \cos\frac{\pi}{4} + i \left(-\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\right) \right) = 2 \left( \frac{\sqrt{2}}{2} + i \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \right) = \sqrt{2} - \sqrt{2}i \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -3 & 6 & -4 \\ 1 & & 1 & -2 & 4 \\ \hline & 1 & -2 & 4 & 0 \end{array}$$



Exame - 2000, Prova modelo

