

Funções (12.º ano)
1.ª derivada

Exercícios de Provas Nacionais e Testes Intermédios - Propostas de resolução



1. Temos que:

- Como a reta r é tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa 0 e contém um ponto do 4.º quadrante, tem declive negativo, pelo que a função f é decrescente em $x = 0$, ou seja, $f'(0) < 0$. Assim, a afirmação **I.** é falsa.
- Como a origem pertence ao gráfico de f , temos que $f(0) = 0$ pelo que o declive da reta r é:

$$m_r = f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$$

Como a reta s é uma assíntota do gráfico de f , quando $x \rightarrow +\infty$, temos que o declive da reta s é:

$$m_s = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$$

Logo $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} \times \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = -\frac{8}{9} \Rightarrow m_r \times m_s \neq -1$ pelo que a afirmação **II.** é falsa.

Exame – 2024, Ép. especial

2. Temos que, como $f'(1) = 2$ e f' é estritamente crescente no intervalo $]1,5[$ (porque é estritamente crescente em \mathbb{R}^+), então a equação $f'(x) = 0$ é impossível em $]1,5[$, pelo que não existem extremos da função f neste intervalo, logo a afirmação é falsa.

Exame – 2024, 2.ª Fase (adaptado)

3. Pela definição de derivada de uma função num ponto, temos que:

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Como a função f é par, sabemos que $f(-a) = f(a)$, determinando $f'(-a)$, vem que:

$$f'(-a) = \lim_{x \rightarrow -a} \frac{f(x) - f(-a)}{x - (-a)} = \lim_{x \rightarrow -a} \frac{f(x) - f(a)}{x + a} = \frac{f(a) - f(a)}{-a + a} = \frac{0}{0} \text{ (Indeterminação)}$$

(considerando $y = -x$, temos $x = -y$ e se $x \rightarrow -a$, então $y \rightarrow a$)

Como f é par então $f(-y) = f(y)$, e pela definição de derivada num ponto, vem que:

$$\lim_{x \rightarrow -a} \frac{f(x) - f(a)}{x + a} = \lim_{y \rightarrow a} \frac{f(-y) - f(a)}{-y + a} = \lim_{y \rightarrow a} \frac{f(y) - f(a)}{-(y - a)} = -\lim_{y \rightarrow a} \frac{f(y) - f(a)}{y - a} = -f'(a)$$

Desta forma, como $f'(-a) = -f'(a)$, temos que:

$$f'(-a) \times f'(a) = -f'(a) \times f'(a) = -[f'(a)]^2 = -[f'(a)]^2$$

Exame – 2024, 2.ª Fase

4. Começamos por determinar a expressão da derivada da função g , em $]1, +\infty[$:

$$g'(x) = (x^2 - 3x - 2 \ln x)' = (x^2)' - (3x)' - (2 \ln x)' = 2x - 3 - 2(\ln x)' = 2x - 3 - 2\left(\frac{1}{x}\right)' = 2x - 3 - \frac{2}{x}$$

Calculando os zeros da derivada da função g , em $]1, +\infty[$:

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x - 3 - \frac{2}{x} = 0 \Leftrightarrow \frac{2x^2 - 3x - 2}{x} = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 3x - 2 = 0 \wedge \underbrace{x \neq 0}_{\text{P.V.}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 4(2)(-2)}}{2 \times 2} \Leftrightarrow x = 2 \vee x = -\frac{1}{2}$$

Como no intervalo $]1, +\infty[$ a equação $g'(x) = 0$ só tem um zero, estudando a variação do sinal da derivada e relacionando com a monotonia da função, vem:

x	1		2	$+\infty$
$2x^2 - 3x - 2$	n.d.	-	0	+
x	n.d.	+	+	+
g'	n.d.	-	0	+
g	n.d.	\searrow	min	\nearrow

Assim, podemos concluir que a função g :

- é decrescente no intervalo $]1, 2[$;
- é crescente no intervalo $[2, +\infty[$;
- tem um mínimo relativo que é $g(2) = 2^2 - 3 \times 2 - 2 \ln 2 = 4 - 6 - 2 \ln 2 = -2 - 2 \ln 2$

Exame – 2024, 1.ª Fase



5. Como o declive da reta tangente ao gráfico de f , em cada ponto é dado por $f'(x)$, começamos por derivar a função f :

$$f'(x) = (2x^2 + bx + 5) = 4x + b$$

Designado por a a abcissa do ponto de tangência, temos que:

- a ordenada do ponto de tangência é: $f(a) = 2a^2 + ba + 5$
- o declive da reta tangente é: $m = f'(a) = 4a + b$

Assim, substituindo as coordenadas do ponto de tangência, $(a, 2a^2 + ba + 5)$, e a expressão do declive na equação da reta tangente ($y = mx + 1$), podemos determinar o valor de a :

$$\begin{aligned} y = mx + 1 &\Leftrightarrow 2a^2 + ba + 5 = (4a + b) \times a + 1 \Leftrightarrow 2a^2 + ba + 5 = 4a^2 + ba + 1 \Leftrightarrow 2a^2 + 5 = 4a^2 + 1 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 5 - 1 = 4a^2 - 2a^2 \Leftrightarrow 4 = 2a^2 \Leftrightarrow a^2 = 2 \Leftrightarrow a = \pm\sqrt{2} \end{aligned}$$

Como a abcissa do ponto de tangência é positiva, temos que $a = \sqrt{2}$.

Exame – 2024, 1.ª Fase



6. Designando por m e n as abscissas dos pontos A e B , temos que as respectivas coordenadas e as do ponto médio são:

- $A(m, h(m)) = (m, am^2)$
- $B(n, h(n)) = (n, an^2)$
- $M\left(\frac{m+n}{2}, \frac{am^2+an^2}{2}\right)$

Como a derivada da função h é $h'(x) = (ax^2)' = 2ax$, os declives das retas tangentes ao gráfico de h , nos pontos A e B , são:

- $m_A = h'(m) = 2am$
- $m_B = h'(n) = 2an$

E assim, designado por podemos determinar uma expressão para a ordenada da origem para cada uma das equações das retas, substituindo a expressão do declive e das coordenadas dos pontos de tangência:

- $y = m_A \times x + b_A \Leftrightarrow am^2 = 2am \times m + b_A \Leftrightarrow am^2 - 2am^2 = b_A \Leftrightarrow -am^2 = b_A$
- $y = m_B \times x + b_B \Leftrightarrow an^2 = 2an \times n + b_B \Leftrightarrow an^2 - 2an^2 = b_B \Leftrightarrow -an^2 = b_B$

Ou seja as equações das retas tangentes nos pontos A e B , são, respetivamente, $y = 2max - am^2$ e $y = 2nax - an^2$, pelo que a abscissa do ponto de interseção das retas é a solução da equação:

$$\begin{aligned} 2max - am^2 = 2nax - an^2 &\Leftrightarrow \frac{2max - am^2}{a} = \frac{2nax - an^2}{a} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 2mx - m^2 = 2nx - n^2 &\Leftrightarrow 2mx - 2nx = m^2 - n^2 \Leftrightarrow x(2m - 2n) = m^2 - n^2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x = \frac{(n-m)(n+m)}{2(m-n)} &\Leftrightarrow x = \frac{n+m}{2} \end{aligned}$$

Como as abscissas do ponto médio e do ponto de interseção das tangentes são iguais, logo, o ponto de interseção das tangentes pertence à reta vertical que contém o ponto médio.

Exame – 2023, Ép. especial

7. Temos que:

- pela observação do referencial **I**, podemos concluir que $\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) < 0$, e como a função é diferenciável, então é contínua, em particular em $x = 0$, logo $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = g(0)$, pelo que $g(0) > 0$ o que é incompatível com a segunda condição definida ($g(0) < 0$) pelo que no referencial **I** não está representado parte do gráfico da função g ;
- pela observação do referencial **II**, podemos concluir que a função é crescente no intervalo $] -\infty, -1[$, ou seja, $g'(x) > 0, \forall x \in] -\infty, -1[$ o que é incompatível com a terceira condição definida ($g'(x) < 0, \forall x \in] -\infty, -1[$) pelo que no referencial **II** não está representado parte do gráfico da função g ;
- pela observação do referencial **III**, podemos concluir que $\lim_{x \rightarrow -1^+} g(x) = -\infty$, e como a função é par, então $\lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} g(x) = -\infty$, o que é incompatível com a primeira condição definida ($\lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = +\infty$) pelo que no referencial **III** também não está representado parte do gráfico da função g .

Exame – 2023, 2.ª Fase



8. Começamos por determinar a expressão da derivada da função f :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{\ln x + 2x}{x} \right)' = \left(\frac{\ln x}{x} + \frac{2x}{x} \right)' = \left(\frac{\ln x}{x} \right)' + (2)' = \frac{(\ln x)' \times x - (x)' \times \ln x}{x^2} + 0 = \\ &= \frac{(x)'}{x} \times x - 1 \times \ln x = \frac{1}{x} \times x - \ln x = \frac{1 - \ln x}{x^2} \end{aligned}$$

Calculando os zeros da derivada da função f , temos:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1 - \ln x}{x^2} = 0 \underset{x > 0}{\Rightarrow} 1 - \ln x = 0 \Leftrightarrow 1 = \ln x \Leftrightarrow x = e^1 \Leftrightarrow x = e$$

Estudando a variação do sinal da derivada e relacionando com a monotonia da função, vem:

x	0		e	$+\infty$
$1 - \ln x$	n.d.	+	0	-
x^2	n.d.	+	+	+
f'	n.d.	+	0	-
f	n.d.	\nearrow	Máx.	\searrow

Assim, podemos concluir que a função f :

- é crescente no intervalo $]0, e[$;
- é decrescente no intervalo $[e, +\infty[$;
- tem um máximo relativo que é:

$$f(e) = \frac{\ln e + 2e}{e} = \frac{\ln e}{e} + \frac{2e}{e} = \frac{1}{e} + 2$$

Exame – 2023, 2.ª Fase



9. Designando por a a abscissa dos pontos P e Q , determinamos as equações das retas s e t :

- $P\left(a, \frac{k}{a}\right)$

- $f'(x) = \frac{(k)' \times x - (x)' \times k}{x^2} = \frac{0 - k}{x^2} = -\frac{k}{x^2}$

- $m_s = f'(a) = -\frac{k}{a^2}$

$$y_P = -\frac{k}{a^2} \times x_P + b \Leftrightarrow \frac{k}{a} = -\frac{k}{a^2} \times a + b \Leftrightarrow \frac{k}{a} = -\frac{k}{a} + b \Leftrightarrow \frac{k}{a} + \frac{k}{a} = b \Leftrightarrow \frac{2k}{a} = b$$

- $s : y = -\frac{k}{a^2}x + \frac{2k}{a}$

- $Q\left(a, -\frac{k}{a}\right)$

- $g'(x) = -\frac{(k)' \times x - (x)' \times k}{x^2} = -\frac{0 - k}{x^2} = \frac{k}{x^2}$

- $m_t = g'(a) = \frac{k}{a^2}$

$$y_Q = \frac{k}{a^2} \times x_Q + b \Leftrightarrow -\frac{k}{a} = \frac{k}{a^2} \times a + b \Leftrightarrow -\frac{k}{a} = \frac{k}{a} + b \Leftrightarrow -\frac{k}{a} - \frac{k}{a} = b \Leftrightarrow -\frac{2k}{a} = b$$

- $t : y = \frac{k}{a^2}x - \frac{2k}{a}$

Determinando as coordenadas do ponto R , temos:

$$\begin{cases} y = -\frac{k}{a^2}x + \frac{2k}{a} \\ y = \frac{k}{a^2}x - \frac{2k}{a} \end{cases}$$

Ou seja a abscissa do ponto R , é:

$$\frac{k}{a^2}x - \frac{2k}{a} = -\frac{k}{a^2}x + \frac{2k}{a} \Leftrightarrow \frac{k}{a^2}x + \frac{k}{a^2}x = \frac{2k}{a} + \frac{2k}{a} \Leftrightarrow \frac{2kx}{a^2} = \frac{4k}{a} \Leftrightarrow \frac{2kx}{k} = \frac{4a^2}{a} \Leftrightarrow 2x = 4ax = 2a$$

E a ordenada do ponto R é:

$$y_R = \frac{k}{a^2}x_R - \frac{2k}{a} = \frac{k}{a^2} \times 2a - \frac{2k}{a} = \frac{k}{a^2} \times 2a - \frac{2k}{a} = \frac{2k}{a} - \frac{2k}{a} = 0$$

Assim, considerando $[PQ]$ como a base do triângulo $[PQR]$, temos:

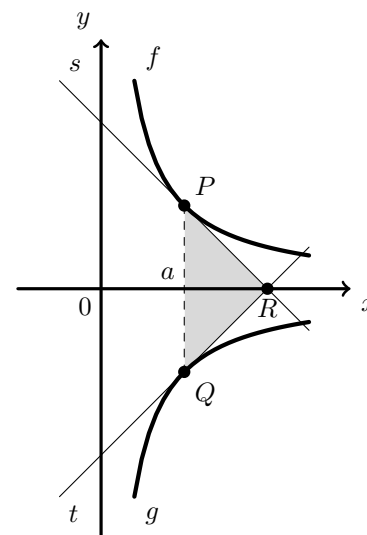
$$\overline{PQ} = x_P + |x_Q| = \frac{k}{a} + \left|-\frac{k}{a}\right| = \frac{2k}{a}$$

E a medida da altura correspondente é:

$$x_R - a = 2a - a = a$$

Logo, a área do triângulo $[PQR]$ é:

$$A_{[PQR]} = \frac{\overline{PQ} \times (x_R - a)}{2} = \frac{\frac{2k}{a} \times a}{2} = \frac{2k}{2} = k$$



10. Como o declive da reta tangente ao gráfico de f , é dado por $f'(x)$, começamos por derivar a função f :

$$f'(x) = (ax^2 + bx) = 2ax + b$$

Como sabemos que o declive da reta tangente é a , a abcissa do ponto de tangência é a solução da equação $f'(x) = a$, e desta forma temos:

$$f'(x) = a \Leftrightarrow 2ax + b = a \Leftrightarrow 2ax = a - b \Leftrightarrow x = \frac{a - b}{2a}$$

Assim, podemos determinar a ordenada do ponto de tangência:

- através da equação da reta tangente:

$$y = a \left(\frac{a - b}{2a} \right) + b = \frac{a - b}{2} + b = \frac{a - b}{2} + \frac{2b}{2} = \frac{a - b + 2b}{2} = \frac{a + b}{2}$$

- através da expressão algébrica da função f :

$$\begin{aligned} f \left(\frac{a - b}{2a} \right) &= a \left(\frac{a - b}{2a} \right)^2 + b \left(\frac{a - b}{2a} \right) = a \left(\frac{a^2 - 2ab + b^2}{4a^2} \right) + \frac{ba - b^2}{2a} = \frac{a^2 - 2ab + b^2}{4a} + \frac{ba - b^2}{2a} = \\ &= \frac{a^2 - 2ab + b^2}{4a} + \frac{2ba - 2b^2}{4a} = \frac{a^2 - 2ab + b^2}{4a} + \frac{2ba - 2b^2}{4a} = \frac{a^2 - b^2}{4a} \end{aligned}$$

Desta forma, igualando as duas expressões da ordenada do ponto de tangência, temos:

$$\frac{a + b}{2} = \frac{a^2 - b^2}{4a} \Leftrightarrow \frac{4a}{2} = \frac{(a - b)(a + b)}{a + b} \Leftrightarrow 2a = a - b \Leftrightarrow 2a - a = -b \Leftrightarrow a = -b$$

Assim, temos que:

- a abcissa do ponto de tangência é: $\frac{a - b}{2a} = \frac{a + a}{2a} = \frac{-b - b}{2(-b)} = \frac{-2b}{-2b} = 1$;
- a ordenada do ponto de tangência é: $\frac{a + b}{2} = \frac{-b + b}{2} = \frac{0}{2} = 0$.

Ou seja o ponto de tangência tem coordenadas $(1,0)$.



11. Determinando a expressão da função derivada, temos:

$$\begin{aligned} g'(x) &= (g(x))' = (\ln(1 + e^x) - x)' = (\ln(1 + e^x))' - (x)' = \frac{(1 + e^x)'}{1 + e^x} - 1 = \frac{(1)' + (e^x)'}{1 + e^x} - 1 = \\ &= \frac{0 + e^x}{1 + e^x} - 1 = \frac{e^x}{1 + e^x} - 1 \end{aligned}$$

O declive da reta tangente ao gráfico de g , no ponto de abscissa 0, é dado por:

$$m = g'(0) = \frac{e^0}{1 + e^0} - 1 = \frac{1}{1 + 1} - 1 = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}$$

Determinando a ordenada do ponto do gráfico de abscissa 0, temos:

$$g(0) = \ln(1 + e^0) - 0 = \ln(1 + 1) = \ln 2$$

Como o ponto de abscissa 0, também pertence à reta tangente, substituímos as coordenadas deste ponto e o declive da reta, em $y = mx + b$, para calcular o valor de b :

$$\ln 2 = -\frac{1}{2} \times 0 + b \Leftrightarrow \ln 2 = b$$

Desta forma, a equação da reta tangente ao gráfico de g no ponto de abscissa 0, é:

$$y = -\frac{1}{2} \times x + \ln 2 \Leftrightarrow y = -\frac{x}{2} + \ln 2$$

Assim, as coordenadas dos pontos A e B , são:

- $A(0, \ln 2)$ porque $g(0) = \ln 2$
- $B(2 \ln 2, 0)$ porque $0 = -\frac{x}{2} + \ln 2 \Leftrightarrow \frac{x}{2} = \ln 2 \Leftrightarrow x = 2 \ln 2$

E assim, a área do triângulo $[OAB]$ é:

$$A_{[OAB]} = \frac{\overline{OA} \times \overline{OB}}{2} = \frac{\ln 2 \times 2 \ln 2}{2} = \frac{2(\ln 2)^2}{2} = (\ln 2)^2$$

Exame – 2022, Ép. especial



12. Começamos por determinar a expressão da derivada da função f , para estudar a monotonia da função e a existência de extremos:

$$\begin{aligned} f'(x) &= (\sqrt{kx} - \ln(kx))' = (\sqrt{kx})' - (\ln(kx))' = ((kx)^{\frac{1}{2}})' - \frac{(kx)'}{kx} = \frac{1}{2} \times (kx)^{1-\frac{1}{2}} \times (kx)' - \frac{k}{kx} = \\ &= \frac{1}{2} \times (kx)^{-\frac{1}{2}} \times k - \frac{k}{kx} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{\sqrt{kx}} \times k - \frac{k}{kx} = \frac{k}{2\sqrt{kx}} - \frac{k}{kx} = \frac{k^2x - 2k\sqrt{kx}}{2kx\sqrt{kx}} = \\ &= \frac{k(kx - 2\sqrt{kx})}{k \times 2x\sqrt{kx}} \stackrel{k \neq 0}{=} \frac{kx - 2\sqrt{kx}}{2x\sqrt{kx}} \end{aligned}$$

Calculando os zeros da derivada da função f , temos:

$$\begin{aligned} f'(x) = 0 &\Leftrightarrow \frac{kx - 2\sqrt{kx}}{2x\sqrt{kx}} = 0 \Leftrightarrow kx - 2\sqrt{kx} = 0 \wedge \underbrace{2x\sqrt{kx} \neq 0}_{\text{Cond. universal para } x > 0} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow kx = 2\sqrt{kx} \Rightarrow (kx)^2 = (2\sqrt{kx})^2 \Leftrightarrow (kx)^2 = 4kx \Leftrightarrow \frac{(kx)^2}{kx} = 4 \stackrel{kx \neq 0}{=} kx = 4 \Leftrightarrow x = \frac{4}{k} \end{aligned}$$

Estudando a variação do sinal da derivada e relacionando com a monotonia da função, vem:

x	0		$\frac{4}{k}$	$+\infty$
$kx - 2\sqrt{kx}$	n.d.	-	0	+
$2x\sqrt{kx}$	n.d.	+	+	+
f'	n.d.	-	0	+
f	n.d.	\searrow	min	\nearrow

Assim, podemos concluir que a função f tem um mínimo absoluto em $x = \frac{4}{k}$ porque é decrescente no intervalo $\left]0, \frac{4}{k}\right[$ e crescente no intervalo $\left]\frac{4}{k}, +\infty\right[$.

O valor do mínimo é:

$$f\left(\frac{4}{k}\right) = \sqrt{k \times \frac{4}{k}} - \ln\left(k \times \frac{4}{k}\right) = \sqrt{4} - \ln 4 = 2 - \ln 4$$

Como a função é contínua, porque é o produto, a diferença e a composição de funções contínuas, e

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (\sqrt{kx} - \ln(kx)) = \sqrt{k \times 0^+} - \ln(k \times 0^+) = \sqrt{0} - \ln(0^+) = 0 - (-\infty) = +\infty$$

então o contradomínio de f é

$$D'_f = [2 - \ln 4, +\infty[$$

Exame – 2022, Ép. especial



13. A abscissa do ponto do gráfico de g em que a tangente é paralela à reta de equação $y = -2x$, ou seja, o ponto em que a tangente tem declive $m = -2$, é a solução da equação $g'(x) = -2$.

Como em $] -\infty, 0[$ temos $g'(x) = 3e^{2x} - 7e^x$, vem que:

$$g'(x) = -2 \Leftrightarrow 3e^{2x} - 7e^x = -2 \Leftrightarrow 3(e^x)^2 - 7e^x + 2 = 0 \Leftrightarrow$$

(considerando $y = e^x$)

$$\Leftrightarrow 3y^2 - 7y + 2 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{7 \pm \sqrt{(-7)^2 - 4(3)(2)}}{2(3)} \Leftrightarrow y = \frac{7+5}{6} \vee y = \frac{7-5}{6} \Leftrightarrow y = 2 \vee y = \frac{1}{3}$$

(como $y = e^x$)

$$\Leftrightarrow e^x = 2 \vee e^x = \frac{1}{3} \Leftrightarrow x = \ln 2 \vee x = \ln \frac{1}{3} \Leftrightarrow x = \ln 2 \vee x = \ln 1 - \ln 3 \Leftrightarrow x = \ln 2 \vee x = -\ln 3$$

Como $\ln 2 \notin] -\infty, 0[$, a abscissa do ponto do gráfico de g em que a tangente é paralela à reta de equação $y = -2x$, é $-\ln 3$.

Exame – 2022, 2.ª Fase

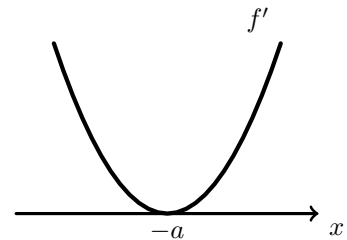
14. Como os extremos da função correspondem aos zeros da função derivada associados à mudança de sinal, começamos por determinar a expressão da derivada da função f :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{1}{3}x^3 + ax^2 + a^2x + \sqrt{2} \right)' = \left(\frac{1}{3}x^3 \right)' + (ax^2)' + (a^2x)' + (\sqrt{2})' = 3 \times \frac{1}{3}x^2 + 2ax + a^2 + 0 = \\ &= x^2 + 2ax + a^2 = (x+a)^2 \end{aligned}$$

Calculando os zeros da derivada da função f , temos:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow (x+a)^2 = 0 \Leftrightarrow (x+a)(x+a) = 0 \Leftrightarrow x = -a \vee x = -a$$

Assim, temos que $-a$ é o único zero da derivada da função f , mas como não está associado a uma mudança de sinal, não corresponde a um extremo da função, e por não existir qualquer outro zero da derivada, a função não tem extremos.



Exame – 2022, 2.ª Fase



15. Começamos por determinar a expressão da derivada da função f , em $] -\infty, -2[$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{e^{2-x}}{x+2} \right)' = \frac{((2-x)'e^{2-x})(x+2) - e^{2-x} \times (x+2)'}{(x+2)^2} = \frac{-1 \times e^{2-x} \times (x+2) - e^{2-x} \times 1}{x^2} = \\ &= \frac{-e^{2-x}(x+2) - e^{2-x}}{(x+2)^2} = \frac{e^{2-x}(-x-3)}{(x+2)^2} = \frac{e^{2-x}(-x-3)}{(x+2)^2} \end{aligned}$$

Calculando os zeros da derivada da função f , em $] -\infty, -2[$:

$$\begin{aligned} f'(x) = 0 &\Leftrightarrow \frac{e^{2-x}(-x-3)}{(x+2)^2} = 0 \Leftrightarrow e^{2-x}(-x-3) = 0 \wedge \underbrace{(x+2)^2 \neq 0}_{\text{P.V, pq } (x+2)^2 > 0} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \underbrace{e^{2-x} = 0}_{\text{Impossível}} \vee -x-3 = 0 \Leftrightarrow -3 = x \end{aligned}$$

Estudando a variação do sinal da derivada e relacionando com a monotonia da função, vem:

x	$-\infty$	-3		-2
e^{2-x}	+	+	+	n.d.
$(-x-3)$	+	0	-	n.d.
$e^{2-x}(-x-3)$	+	0	-	n.d.
$(x+2)^2$	+	+	+	n.d.
f'	+	0	-	n.d.
f		\nearrow	Máx	\searrow
				n.d.

Assim, podemos concluir que a função f :

- é crescente no intervalo $] -\infty, -3[$;
- é decrescente no intervalo $[-3, -2[$;
- tem um máximo relativo que é $f(-3) = \frac{e^{2-(-3)}}{-3+2} = \frac{e^{2+3}}{-1} = -e^5$

Exame – 2022, 1.ª Fase



16. Considerando a e b as abscissas dos pontos A e B , respetivamente, temos que as ordenadas são, respetivamente $\frac{k}{a}$ e $\frac{k}{b}$, pelo que o declive da reta AB é:

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{\frac{k}{b} - \frac{k}{a}}{b - a} = \frac{\frac{ak}{ab} - \frac{bk}{ab}}{b - a} = \frac{ak - bk}{ab(b - a)} = \frac{k(a - b)}{ab \times (-1)(a - b)} \stackrel{a \neq b}{=} \frac{k}{-ab} = -\frac{k}{ab}$$

Considerando c como a abscissa do ponto em que a reta tangente ao gráfico de f é paralela à reta AB , temos que $m = f'(c)$. Assim temos que:

$$f'(x) = \left(\frac{k}{x}\right)' = \frac{k' \times x - x' \times k}{x^2} = \frac{0 \times x - 1 \times k}{x^2} = -\frac{k}{x^2}$$

E assim, $f'(c) = -\frac{k}{c^2}$, temos que:

$$m = f'(c) \Leftrightarrow -\frac{k}{ab} = -\frac{k}{c^2} \Leftrightarrow \frac{k}{ab} = \frac{k}{c^2} \Leftrightarrow c^2 = \frac{k \times ab}{k} \stackrel{k \neq 0}{\Leftrightarrow} c^2 = ab \stackrel{c > 0}{\Leftrightarrow} c = \sqrt{ab}$$

Como $a < b$, então temos que:

- $\sqrt{a} < \sqrt{b} \Leftrightarrow \sqrt{a} \times \sqrt{a} < \sqrt{b} \times \sqrt{a} \Leftrightarrow a < \sqrt{ab}$
- $\sqrt{a} < \sqrt{b} \Leftrightarrow \sqrt{a} \times \sqrt{b} < \sqrt{b} \times \sqrt{b} \Leftrightarrow \sqrt{ab} < b$

Assim, temos que $a < \sqrt{ab} < b$, e ainda que a , \sqrt{ab} e b são termos consecutivos de uma progressão geométrica, porque o quociente dos termos consecutivos é constante (e igual à razão), ou seja:

$$\frac{\sqrt{ab}}{a} = \frac{b}{\sqrt{ab}} \Leftrightarrow (\sqrt{ab})^2 = a \times b \Leftrightarrow ab = ab \text{ (Proposição verdadeira)}$$

Exame – 2022, 1.ª Fase



17. Começamos por determinar a expressão da derivada da função f , em $] - \infty, 1[$:

$$f'(x) = (x - 2 + \ln(3 - 2x))' = (x)' - (2)' + (\ln(3 - 2x))' = 1 - 0 + \frac{(3 - 2x)'}{(3 - 2x)} = 1 + \frac{0 - 2}{3 - 2x} = 1 - \frac{2}{3 - 2x}$$

Calculando os zeros da derivada da função f , em $] - \infty, 1[$, temos:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - \frac{2}{3 - 2x} = 0 \Leftrightarrow 1 = \frac{2}{3 - 2x} \underset{x \neq \frac{3}{2}}{\Leftrightarrow} 3 - 2x = 2 \Leftrightarrow 3 - 2 = 2x \Leftrightarrow \frac{1}{2} = x$$

Estudando a variação do sinal da derivada e relacionando com a monotonia da função, vem:

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$		1
f'		+	0	-
f		\nearrow	Máx.	\searrow
				n.d.
				n.d.

Assim, podemos concluir que a função f :

- é crescente no intervalo $] - \infty, \frac{1}{2}[$;
- é decrescente no intervalo $[\frac{1}{2}, 1[$;
- tem um máximo relativo que é:

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} - 2 + \ln\left(3 - 2 \times \frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{2} + \ln(3 - 1) = -\frac{3}{2} + \ln(2) = \ln 2 - \frac{3}{2}$$

Exame – 2021, Ép. especial



18. Como a reta é tangente, simultaneamente, ao gráfico de f e ao gráfico de g , o seu declive corresponde ao valor das derivadas nos respetivos pontos de tangência.

Designado por a a abcissa do ponto A e por b a abcissa do ponto B , como as ordenadas dos pontos A e B , são, respetivamente $f(a) = 2a^2$ e $g(b) = -(b-1)^2$, então o declive da reta é:

$$m_{AB} = \frac{f(a) - f(b)}{a - b} = \frac{2a^2 - (-(b-1)^2)}{a - b} = \frac{2a^2 + (b-1)^2}{a - b}$$

Por outro lado, temos que:

- $f'(x) = (2x^2)' = 2 \times 2x = 4x$, pelo que $m_{AB} = f'(a) = 4a$
- $g'(x) = (-(x-1)^2)' = -2(x-1) = -2x + 2$, pelo que $m_{AB} = g'(b) = -2b + 2$
- $f'(a) = g'(b) \Leftrightarrow 4a = -2b + 2 \Leftrightarrow 2a = -b + 1 \Leftrightarrow b = -2a + 1$

E assim, substituindo na expressão anterior, temos que:

$$m_{AB} = \frac{2a^2 + (b-1)^2}{a - b} = \frac{2a^2 + (-2a + 1 - 1)^2}{a - (-2a + 1)} = \frac{2a^2 + (-2a)^2}{a + 2a - 1} = \frac{2a^2 + 4a^2}{3a - 1} = \frac{6a^2}{3a - 1}$$

Temos ainda que:

$$\begin{aligned} m_{AB} = f'(a) &\Leftrightarrow \frac{6a^2}{3a - 1} = 4a \underset{a \neq \frac{1}{3}}{\Leftrightarrow} 6a^2 = 4a(3a - 1) \Leftrightarrow 6a^2 = 12a^2 - 4a \Leftrightarrow 6a^2 - 12a^2 + 4a = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow -6a^2 + 4a = 0 \Leftrightarrow -3a^2 + 2a = 0 \Leftrightarrow a(-3a + 2) = 0 \Leftrightarrow a = 0 \vee -3a + 2 = 0 \Leftrightarrow a = 0 \vee 2 = 3a \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow a = 0 \vee \frac{2}{3} = a \wedge a \neq \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Como a reta não é horizontal o declive não pode ser zero, pelo que a abcissa do ponto A é $a = \frac{2}{3}$ e a abcissa do ponto B é $b = -2a + 1 = -2\left(\frac{2}{3}\right) + 1 = -\frac{4}{3} + 1 = -\frac{1}{3}$

Exame – 2021, Ép. especial



19. Para calcular o declive da reta tangente, no ponto de abcissa -2 começamos por determinar a expressão da derivada da função, para $x < 0$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{x - e^{-x}}{x} \right)' = \frac{(x - e^{-x})' \times x - (x - e^{-x})(x)'}{x^2} = \frac{(x - e^{-x})' \times x - (x - e^{-x})(x)'}{x^2} = \\ &= \frac{((x) - (e^{-x})') \times x - (x - e^{-x}) \times 1}{x^2} = \frac{(1 - (-x)'e^{-x}) \times x - x + e^{-x}}{x^2} = \frac{(1 + e^{-x})x - x + e^{-x}}{x^2} \end{aligned}$$

Assim, temos que o declive da reta tangente no ponto de abcissa -2 é:

$$\begin{aligned} m = f'(-2) &= \frac{(1 + e^{-(-2)})(-2) - (-2) + e^{-(-2)}}{(-2)^2} = \frac{(1 + e^2)(-2) + 2 + e^2}{4} = \\ &= \frac{-2 - 2e^2 + 2 + e^2}{4} = \frac{-2e^2 + e^2}{4} = -\frac{e^2}{4} \end{aligned}$$

Logo a equação da reta tangente é da forma $y = -\frac{e^2}{4}x + b$

Como $f(-2) = \frac{-2 - e^{-(-2)}}{-2} = \frac{-2 - e^2}{-2} = 1 + \frac{e^2}{2}$, sabemos que o ponto $P\left(-2, 1 + \frac{e^2}{2}\right)$ pertence ao gráfico da função e também à reta tangente.

Assim, substituindo as coordenadas do ponto de tangência na equação da reta, podemos calcular o valor de b :

$$1 + \frac{e^2}{2} = -\frac{e^2}{4} \times (-2) + b \Leftrightarrow 1 + \frac{e^2}{2} = \frac{e^2}{2} + b \Leftrightarrow 1 + \frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{2} = b \Leftrightarrow 1 = b$$

Pelo que a equação da reta tangente é:

$$y = -\frac{e^2}{4}x + 1$$

Exame – 2021, 2.ª Fase



20. Começamos por determinar a expressão da derivada da função f , em $]0,1[$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= (-x^2(1+2\ln x))' = (-x^2)' \times (1+2\ln x) + (-x^2)(1+2\ln x)' = -2x(1+2\ln x) - x^2 \times ((1)' + 2(\ln x)') = \\ &= -2x - 4x \ln x - x^2 \left(0 + 2 \times \frac{1}{x}\right) = -2x - 4x \ln x - \frac{2x^2}{x} \underset{x \neq 0}{=} -2x - 4x \ln x - 2x = -4x - 4x \ln x \end{aligned}$$

Calculando os zeros da derivada da função f , em $]0,1[$, temos:

$$\begin{aligned} f'(x) = 0 &\Leftrightarrow -4x - 4x \ln x = 0 \Leftrightarrow -4x(1 + \ln x) = 0 \Leftrightarrow -4x = 0 \vee 1 + \ln x = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x = 0 \vee \ln x = -1 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = e^{-1} \end{aligned}$$

Estudando a variação do sinal da derivada e relacionando com a monotonia da função, vem:

x	0		e^{-1}		1
$-4x$	n.d.	-	-	-	n.d.
$1 + \ln x$	n.d.	-	0	+	n.d.
f'	n.d.	+	0	-	n.d.
f	n.d.	\longrightarrow	Máx.	\longleftarrow	n.d.

Assim, podemos concluir que a função f :

- é crescente no intervalo $]0, e^{-1}[$;
- é decrescente no intervalo $[e^{-1}, 1[$;
- tem um máximo relativo que é:

$$f(e^{-1}) = -(e^{-1})^2 (1 + 2\ln(e^{-1})) = -e^{-2} \times (1 + 2 \times (-1)) = -e^{-2} \times (-1) = e^{-2}$$

Exame – 2021, 1.ª Fase

21. Como $1^2 - x^2 = (1-x)(1+x)$, temos que:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{1 - x^2} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{1^2 - x^2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{(1-x)(1+x)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{-(x-1)(1+x)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{-(x-1)(1+x)} = \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{f(x) - f(1)}{x-1} \times \frac{1}{-(1+x)} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} \times \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{-(1+x)} = \\ &= f'(1) \times \frac{1}{-(1+1)} = -\frac{f'(1)}{2} = -\frac{2 + \ln 1}{2} = -\frac{2-0}{2} = -1 \end{aligned}$$

Resposta: **Opção B**

Exame – 2020, 2.ª Fase



22. Começamos por determinar a expressão da derivada da função g , em $]0, +\infty[$:

$$g'(x) = (x^2 \ln x)' = (x^2)' \times \ln x + x^2(\ln x)' = 2x \ln x + x^2 \times \frac{1}{x} = 2x \ln x + \frac{x^2}{x} = 2x \ln x + x$$

Calculando os zeros da derivada da função g , em $]0, +\infty[$, temos:

$$\begin{aligned} g'(x) = 0 &\Leftrightarrow 2x \ln x + x = 0 \Leftrightarrow x(2 \ln x + 1) = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{matrix} x = 0 \\ 0 \notin]0, +\infty[\end{matrix} \vee 2 \ln x + 1 = 0 \Rightarrow 2 \ln x = -1 \Leftrightarrow \ln x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x = e^{-\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Estudando a variação do sinal da derivada e relacionando com a monotonia da função, vem:

x	0		$e^{-\frac{1}{2}}$	$+\infty$
g'	n.d.	-	0	+
g	n.d.	\searrow	min	\nearrow

Assim, podemos concluir que a função g :

- é decrescente no intervalo $]0, e^{-\frac{1}{2}}]$;
- é crescente no intervalo $[e^{-\frac{1}{2}}, +\infty[$;
- tem um mínimo relativo que é:

$$g\left(e^{-\frac{1}{2}}\right) = \left(e^{-\frac{1}{2}}\right)^2 \ln\left(e^{-\frac{1}{2}}\right) = e^{-1} \times \left(-\frac{1}{2}\right) \times \ln e = \frac{1}{e} \times \left(-\frac{1}{2}\right) \times 1 = -\frac{1}{2e}$$

Exame – 2020, 1.ª Fase

23. Como o declive da reta tangente é igual ao valor da derivada, começamos por determinar a derivada da função para $x = -1$:

$$\begin{aligned} (x \ln(1-x))' &= (x)' \ln(1-x) + x(\ln(1-x))' = 1 \times \ln(1-x) + x \times \frac{(1-x)'}{1-x} = \\ &= \ln(1-x) + x \times \frac{0-1}{1-x} = \ln(1-x) - \frac{x}{1-x} \end{aligned}$$

Logo, o declive da reta tangente ao gráfico de g no ponto de abscissa -1 é:

$$g'(-1) = \ln(1 - (-1)) - \frac{-1}{1 - (-1)} = \ln 2 + \frac{1}{2} = 0,5 + \ln 2$$

Resposta: **Opção A**

Exame – 2019, Ép. especial



24. Para calcular o declive da reta tangente, no ponto de abcissa 1 começamos por determinar a expressão da derivada da função, para $x > 0$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{x}{x - \ln x} \right)' = \frac{(x)'(x - \ln x) - x(x - \ln x)'}{(x - \ln x)^2} = \frac{1 \times (x - \ln x) - x \left(1 - \frac{1}{x} \right)}{(x - \ln x)^2} = \\ &= \frac{x - \ln x - x + \frac{x}{x}}{(x - \ln x)^2} \stackrel{x > 0}{=} \frac{1 - \ln x}{(x - \ln x)^2} \end{aligned}$$

Assim, temos que o declive da reta tangente no ponto de abcissa 1 é:

$$m = f'(1) = \frac{1 - \ln 1}{(1 - \ln 1)^2} = \frac{1 - 0}{(1 - 0)^2} = 1$$

Logo a equação da reta tangente é da forma $y = 1 \times x + b \Leftrightarrow y = x + b$

Como $f(1) = f'(1) = \frac{1}{1 - \ln 1} = \frac{1}{1 - 0} = 1$, sabemos que o ponto $P(1,1)$ pertence ao gráfico da função e também à reta tangente.

Assim, substituindo as coordenadas do ponto de tangência na equação da reta, podemos calcular o valor de b :

$$1 = 1 + b \Leftrightarrow 1 - 1 = b \Leftrightarrow 0 = b$$

Pelo que a equação da reta tangente é:

$$y = x - 0 \Leftrightarrow y = x$$

Exame – 2019, 1.ª Fase



25. Começamos por determinar a expressão da derivada da função g , em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$:

$$g'(x) = \left(\frac{e^{-x}}{x}\right)' = \frac{((-x)'e^{-x})x - e^{-x} \times (x)'}{x^2} = \frac{-1 \times e^{-x} \times x - e^{-x} \times 1}{x^2} = \frac{-xe^{-x} - e^{-x}}{x^2}$$

Calculando os zeros da derivada da função g , em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$:

$$\begin{aligned} g'(x) = 0 &\Leftrightarrow \frac{-xe^{-x} - e^{-x}}{x^2} = 0 \Leftrightarrow \frac{e^{-x}(-x-1)}{x^2} = 0 \Leftrightarrow e^{-x}(-x-1) = 0 \wedge \underbrace{x^2 \neq 0}_{\text{P.V., pq } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \underbrace{e^{-x} = 0}_{\text{Impossível}} \vee -x-1 = 0 \Leftrightarrow -1 = x \end{aligned}$$

Estudando a variação do sinal da derivada e relacionando com a monotonia da função, vem:

x	$-\infty$	-1		0	$+\infty$
e^{-x}	+	+	+	n.d.	+
$(-x-1)$	+	0	-	n.d.	-
$e^{-x}(-x-1)$	+	0	-	n.d.	-
x^2	+	+	+	n.d.	+
g'	+	0	-	n.d.	-
g	\longrightarrow	Máx	\longrightarrow	n.d.	\longrightarrow

Assim, podemos concluir que a função g :

- é decrescente no intervalo $] -1, 0[$ e também no intervalo $]0, +\infty[$;
- é crescente no intervalo $] -\infty, -1[$;
- tem um máximo relativo que é $f(-1) = \frac{e^{-(-1)}}{-1} = \frac{e^1}{-1} = -e$

Exame – 2019, 1.ª Fase

26. Recorrendo à definição de derivada num ponto, temos que:

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 + \frac{e^x}{1-x} - \left(3 + \frac{e^0}{1-0}\right)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 + \frac{e^x}{1-x} - 3 - \frac{1}{1}}{x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{e^x}{1-x} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{e^x}{1-x} - \frac{1-x}{1-x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - (1-x)}{x(1-x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 + x}{x(1-x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^x - 1}{x(1-x)} + \frac{x}{x(1-x)} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^x - 1}{x} \times \frac{1}{1-x} + \frac{1}{1-x} \right) = \underbrace{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}}_{\text{Lim. Notável}} \times \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1-x} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1-x} = \\ &= 1 \times \frac{1}{1-0} + \frac{1}{1-0} = 1 \times 1 + 1 = 2 \end{aligned}$$

Exame – 2018, 2.ª Fase



27. Temos que, pela definição de derivada num ponto, $f'(2) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2}$

Assim, vem que:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 2x}{f(x) - f(2)} = 4 &\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{\frac{f(x) - f(2)}{x^2 - 2x}} = 4 \Leftrightarrow \frac{\lim_{x \rightarrow 2} 1}{\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x^2 - 2x}} = 4 \Leftrightarrow \frac{1}{\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x(x - 2)}} = 4 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{1}{x} \times \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} \right)} = 4 \Leftrightarrow \frac{1}{\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x} \times \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2}} = 4 \Leftrightarrow \frac{1}{\frac{1}{2} \times f'(2)} = 4 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 1 = 4 \times \frac{1}{2} \times f'(2) \Leftrightarrow 1 = \frac{4}{2} \times f'(2) \Leftrightarrow 1 = 2f'(2) \Leftrightarrow \frac{1}{2} = f'(2) \end{aligned}$$

Resposta: **Opção C**

Exame – 2017, 2.ª Fase

28. Como os extremos relativos correspondem aos zeros da função derivada, começamos por determinar a expressão da função derivada da função g :

$$\begin{aligned} g'(x) &= \left(\frac{k}{x} + f(x) \right)' = \left(\frac{k}{x} \right)' + \left(\frac{\ln x}{x} \right)' = \frac{k' \times x - x' \times k}{x^2} + \frac{(\ln x)'x - x'(\ln x)}{x^2} = \\ &= \frac{0 - 1 \times k}{x^2} + \frac{\frac{1}{x} \times x - \ln x}{x^2} = \frac{-k + 1 - \ln x}{x^2} \end{aligned}$$

Como a função tem um extremo relativo para $x = 1$, então 1 é zero da função derivada ($g'(1) = 0$), pelo que podemos determinar o valor de k resolvendo a equação seguinte:

$$g'(1) = 0 \Leftrightarrow \frac{-k + 1 - \ln 1}{1^2} = 0 \Leftrightarrow \frac{-k + 1 - 0}{1} = 0 \Leftrightarrow -k + 1 = 0 \Leftrightarrow 1 = k$$

Exame – 2017, 2.ª Fase



29. Começamos por determinar a expressão da derivada da função f :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(9 - 2,5 (e^{1-0,2x} + e^{0,2x-1}) \right)' = (9)' - 2,5 (e^{1-0,2x} + e^{0,2x-1})' = \\ &= 0 - 2,5 \left((e^{1-0,2x})' + (e^{0,2x-1})' \right) = -2,5 \left((1 - 0,2x)' (e^{1-0,2x}) + (0,2x - 1)' (e^{0,2x-1}) \right) = \\ &= -2,5 \left(-0,2 (e^{1-0,2x}) + 0,2 (e^{0,2x-1}) \right) = -2,5 \times 0,2 (-e^{1-0,2x} + e^{0,2x-1}) = \\ &= -0,5 (-e^{1-0,2x} + e^{0,2x-1}) \end{aligned}$$

Calculando os zeros da derivada, no domínio da função $([0,7])$, vem:

$$\begin{aligned} -0,5 (-e^{1-0,2x} + e^{0,2x-1}) = 0 &\Leftrightarrow -e^{1-0,2x} + e^{0,2x-1} = 0 \Leftrightarrow e^{0,2x-1} = e^{1-0,2x} \Leftrightarrow \\ 0,2x - 1 = 1 - 0,2x &\Leftrightarrow 0,2x + 0,2x = 1 + 1 \Leftrightarrow 0,4x = 2 \Leftrightarrow 4x = 20 \Leftrightarrow x = 5 \end{aligned}$$

Estudando a variação do sinal da derivada e relacionando com a monotonia da função, vem:

x	0		5		7
f'	+	+	0	-	-
f	min	\rightarrow	Máx	\rightarrow	min

Assim, podemos concluir que o valor máximo da função f é atingido quando $x = 5$, ou seja, a distância máxima entre a superfície da água e a ponte é:

$$f(5) = 9 - 2,5 (e^{1-0,2 \times 5} + e^{0,2 \times 5 - 1}) = 9 - 2,5 (e^{1-1} + e^{1-1}) = 9 - 2,5 (e^0 + e^0) = 9 - 2,5 \times 2 = 9 - 5 = 4$$

Ou seja, o barco do clube náutico não pode passar por baixo da ponte, porque a distância da superfície da água ao topo do mastro é de 6 metros e a maior distância entre a superfície da água e a ponte é de 4 metros.

Exame – 2017, 1.ª Fase

30. Como $\overline{OP} = \overline{PQ}$, então o triângulo $[OPQ]$ é isósceles e $\overline{OQ} = 2a$

Como as coordenadas do ponto P são $(a, f(a))$ e as do ponto Q são $(2a, 0)$, temos que o declive da reta PQ , é:

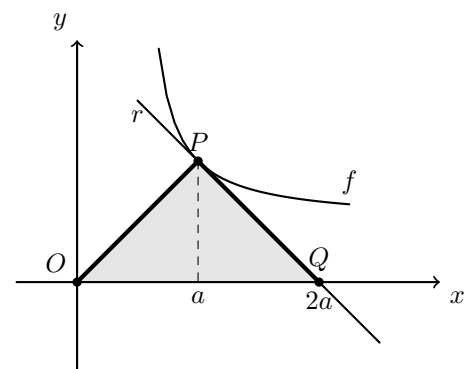
$$m_{PQ} = \frac{0 - f(a)}{2a - a} = -\frac{f(a)}{a}$$

Como a reta r é tangente ao gráfico da função f no ponto de abscissa a , então o declive da reta r , ou seja, da reta PQ , é igual a $f'(a)$, pelo que:

$$f'(a) = -\frac{f(a)}{a}$$

Desta forma, temos que:

$$f'(a) + \frac{f(a)}{a} = -\frac{f(a)}{a} + \frac{f(a)}{a} = 0$$



Exame – 2017, 1.ª Fase



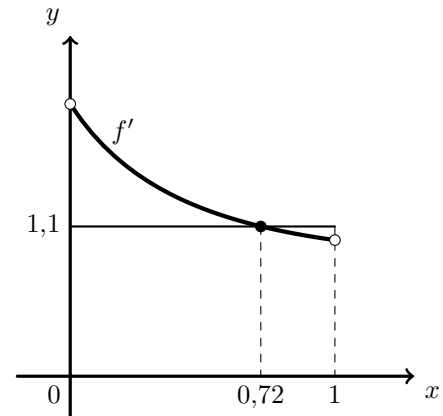
31. Como o declive da reta tangente ao gráfico de uma função num ponto é igual ao valor numérico da derivada no ponto, ou seja, $f'(a) = 1,1$, determinamos a expressão da derivada relativa ao intervalo $]0,1[$:

$$f'(x) = (\ln(e^x + x))' = \frac{(e^x + x)'}{e^x + x} = \frac{(e^x)' + (x)'}{e^x + x} = \frac{e^x + 1}{e^x + x}$$

Assim, como o declive da reta tangente é 1,1, o valor de a é a solução da equação

$$f'(a) = 1,1 \Leftrightarrow \frac{e^a + 1}{e^a + a} = 1,1$$

Visualizando na calculadora gráfica o gráfico da função f' , e a reta horizontal definida por $y = 1,1$ numa janela coerente com a restrição $x \in]0,1[$, e usando a função da calculadora para determinar valores aproximados das coordenadas dos pontos de interseção de dois gráficos, obtemos um valor aproximado (às centésimas) da abcissa do ponto A , $a = x_A \approx 0,72$



Exame – 2016, Ép. especial

32. Temos que:

$$p = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x) - f(-1)}{x - (-1)} = f'(-1)$$

Recorrendo à expressão algébrica função derivada de f , vem que:

$$p = f'(-1) = e^{-1} ((-1)^2 + (-1) + 1) = e^{-1} (1 - 1 + 1) = e^{-1} \times 1 = \frac{1}{e}$$

Logo, vem que:

$$q = -\frac{1}{p} = -\frac{1}{\frac{1}{e}} = -e$$

Como p é o valor da função derivada de f no ponto de abcissa -1 , então p é o declive da reta tangente ao gráfico da função f no ponto de abcissa -1

E assim, o simétrico do inverso de p , ou seja, o valor de q , é o declive de uma reta perpendicular à reta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa -1

Exame – 2016, 1.ª Fase

33. Temos que, pela definição de derivada num ponto $f'(2) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = 6$

Assim, vem que

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x^2 - 2x} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x(x - 2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{1}{x} \times \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} \right) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x} \times \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \frac{1}{2} \times 6 = 3$$

Resposta: **Opção A**

Exame – 2015, Ép. especial



34. Começamos por determinar a expressão da derivada da função f :

$$\begin{aligned} f'(x) &= (x^2 e^{1-x})' = (x^2)' \times e^{1-x} + x^2 \times (e^{1-x})' = 2xe^{1-x} + x^2 \times (1-x)' \times e^{1-x} = \\ &= 2xe^{1-x} + x^2 \times (-1) \times e^{1-x} = 2xe^{1-x} - x^2 e^{1-x} \end{aligned}$$

Calculando os zeros da derivada, no domínio da função (\mathbb{R}_0^+), vem:

$$\begin{aligned} 2xe^{1-x} - x^2 e^{1-x} = 0 &\Leftrightarrow xe^{1-x}(2-x) = 0 \Leftrightarrow xe^{1-x} = 0 \vee 2-x = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x = 0 \vee \underbrace{e^{1-x} = 0}_{\text{Impossível}} \vee 2 = x \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 2 \end{aligned}$$

Estudando a variação do sinal da derivada e relacionando com a monotonia da função, vem:

x	0		2	$+\infty$
f'	0	+	0	-
f	min	\nearrow	Máx	\searrow

Assim, podemos concluir que a função f :

- é crescente no intervalo $[0,2]$;
- é decrescente no intervalo $[2, +\infty[$;
- tem um mínimo para $x = 0$
- tem um máximo para $x = 2$

Exame – 2015, Ép. especial

35. Para calcular o declive da reta tangente, no ponto de abcissa 4 começamos por determinar a expressão da derivada da função, para $x > 3$:

$$f'(x) = (\ln(x-3) - \ln x)' = (\ln(x-3))' - (\ln x)' = \frac{(x-3)'}{x-3} - \frac{1}{x} = \frac{1}{x-3} - \frac{1}{x}$$

Assim, temos que o declive da reta tangente no ponto de abcissa 4 é:

$$m = f'(4) = \frac{1}{4-3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{1} - \frac{1}{4} = \frac{4}{4} - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

Logo a equação da reta tangente é da forma $y = \frac{3}{4}x + b$

Como $f(4) = \ln(4-3) - \ln 4 = \ln 1 - \ln 4 = 0 - \ln 4 = -\ln 4$, sabemos que o ponto $P(4, -\ln 4)$ pertence ao gráfico da função e também à reta tangente.

Assim, substituindo as coordenadas do ponto de tangência na equação da reta, podemos calcular o valor de b :

$$-\ln 4 = \frac{3}{4} \times 4 + b \Leftrightarrow -\ln 4 = 3 + b \Leftrightarrow -\ln 4 - 3 = b$$

Pelo que a equação da reta tangente é:

$$y = \frac{3}{4}x - \ln 4 - 3$$

Exame – 2015, 2.ª Fase



36. Para determinar o instante em que a distância é mínima, começamos por determinar a expressão da derivada da função d :

$$\begin{aligned} d'(t) &= (10 + (5 - t)e^{-0,05t})' = (10)' + (5 - t)' \times e^{-0,05t} + (5 - t) \times (e^{-0,05t})' = \\ &= 0 + (-1)e^{-0,05t} + (5 - t) \times (-0,05t)' e^{-0,05t} = -e^{-0,05t} + (5 - t) \times (-0,05e^{-0,05t}) = \\ &= -e^{-0,05t} - 0,25e^{-0,05t} + 0,05te^{-0,05t} = e^{-0,05t}(-1 - 0,25 + 0,05t) = e^{-0,05t}(-1,25 + 0,05t) \end{aligned}$$

Calculando os zeros da função derivada, com $t \geq 0$ vem:

$$\begin{aligned} d'(t) = 0 &\Leftrightarrow e^{-0,05t}(-1,25 + 0,05t) = 0 \Leftrightarrow \underbrace{e^{-0,05t} = 0}_{\text{Eq. Imp.}} \vee -1,25 + 0,05t = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 0,05t = 1,25 \Leftrightarrow t = \frac{1,25}{0,05} \Leftrightarrow t = 25 \end{aligned}$$

Estudando a variação do sinal da derivada e relacionando com a monotonia da função, vem:

t	0		25	$+\infty$
d'	-	-	0	+
d	15	\searrow	min	\nearrow

Assim, como a função d é decrescente no intervalo $]0, 25]$ e crescente no intervalo $[25, +\infty[$ podemos concluir que a distância do centro da esfera ao ponto P é mínima, quando $t = 25$, ou seja 25 segundos após se iniciar o movimento.

Exame – 2015, 1.ª Fase

37. Começamos por determinar a expressão da derivada da função g :

$$\begin{aligned} g'(x) &= \left(\frac{1 + \ln x}{x^2} \right)' = \frac{(1 + \ln x)'(x^2) - (1 + \ln x)(x^2)'}{(x^2)^2} = \frac{\left(0 + \frac{x'}{x} \right)(x^2) - (1 + \ln x) \times 2x}{x^4} = \\ &= \frac{\frac{1}{x} \times x^2 - 2x(1 + \ln x)}{x^4} = \frac{\frac{x^2}{x} - 2x - 2x \ln x}{x^4} \stackrel{x \neq 0}{=} \frac{x - 2x - 2x \ln x}{x^4} = \\ &= \frac{-x - 2x \ln x}{x^4} = \frac{x(-1 - 2 \ln x)}{x(x^3)} \stackrel{x \neq 0}{=} \frac{-1 - 2 \ln x}{x^3} \end{aligned}$$

Calculando os zeros da derivada, no domínio da função (\mathbb{R}^+), vem:

$$\frac{-1 - 2 \ln x}{x^3} = 0 \Leftrightarrow -1 - 2 \ln x = 0 \wedge \underbrace{x^3 \neq 0}_{\text{PV, } x > 0} \Leftrightarrow -2 \ln x = 1 \Leftrightarrow \ln x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x = e^{-\frac{1}{2}}$$

Estudando a variação do sinal da derivada e relacionando com a monotonia da função, vem:

x	0		$e^{-\frac{1}{2}}$	$+\infty$
g'	n.d.	+	0	-
g	n.d.	\nearrow	Máx	\searrow

Assim, como g é crescente no intervalo $]0, e^{-\frac{1}{2}}]$ e decrescente no intervalo $[e^{-\frac{1}{2}}, +\infty[$ podemos concluir que o único valor de x , para o qual a função g tem um extremo relativo, é $x = e^{-\frac{1}{2}}$ que é um maximizante da função.

Exame – 2014, Ép. especial



38. A afirmação (I) é falsa. Como a reta de equação $x = 0$ é uma assíntota vertical do gráfico de f , a função não é contínua para $x = 0$, logo não é contínua no intervalo $[-3,5]$, pelo que não estão verificadas as condições de aplicação do Teorema de Bolzano.

A afirmação (II) é falsa. Como $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - 2x) = 0$ podemos afirmar que a reta de equação $y = 2x + 0$ é uma assíntota do gráfico da função f , quando $x \rightarrow -\infty$. Assim, quando $x \rightarrow -\infty$ o gráfico de f tem uma assíntota que não é horizontal.

A afirmação (III) é verdadeira. O $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ é a derivada de f . Como a derivada existe e é positiva em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, podemos afirmar que f é crescente em $]-\infty, 0[$ e também em $]0, +\infty[$, o que permite confirmar a veracidade desta afirmação.

Exame – 2014, Ép. especial

39. Começamos por determinar a expressão da derivada da função g , para $x < 0$:

$$\begin{aligned} g'(x) &= (-x + f(x))' = \left(-x + x - 1 + \frac{\ln(-x)}{x}\right)' = \left(-1 + \frac{\ln(-x)}{x}\right)' = -(1)' + \left(\frac{\ln(-x)}{x}\right)' = \\ &= -0 + \frac{(\ln(-x))'x - \ln(-x)(x)'}{x^2} = \frac{(-x)' \times x - \ln(-x)(1)}{x^2} = \frac{-1 \times x - \ln(-x)}{x^2} = \frac{1 - \ln(-x)}{x^2} \end{aligned}$$

Calculando os zeros da derivada da função g , para $x < 0$:

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1 - \ln(-x)}{x^2} = 0 \Leftrightarrow 1 - \ln(-x) = 0 \wedge \underbrace{x^2 \neq 0}_{\text{P.V., pq } x < 0} \Leftrightarrow 1 = \ln(-x) \Leftrightarrow -x = e^1 \Leftrightarrow x = -e$$

Estudando a variação do sinal da derivada e relacionando com a monotonia da função, vem:

x	$-\infty$	$-e$		0	
$1 - \ln(-x)$		$-$	0	$+$	n.d.
x^2		$+$	$+$	$+$	n.d.
g'		$-$	0	$+$	n.d.
g		\searrow	min	\nearrow	n.d.

Assim, podemos concluir que a função g :

- é decrescente no intervalo $]-\infty, -e[$;
- é crescente no intervalo $]-e, 0[$;
- tem um mínimo para $x = -e$

Exame – 2014, 2.ª Fase

40. Começando por determinar a expressão da derivada, temos:

$$f'(x) = \left(a + \ln\left(\frac{a}{x}\right)\right)' = (a + \ln a - \ln x)' = (a)' + (\ln a)' - (\ln x)' = 0 + 0 - \frac{1}{x} = -\frac{1}{x}$$

Assim, em \mathbb{R}^+ , a derivada é estritamente negativa, pelo que o gráfico da opção (B) é o único compatível com esta conclusão.

Resposta: **Opção B**

Exame – 2014, 1.ª fase



41. Para calcular o declive da reta tangente, começamos por determinar a expressão da derivada da função, para $x > 0$:

$$f'(x) = \left(\frac{3x + \ln x}{x}\right)' = \left(\frac{3x}{x}\right)' + \left(\frac{\ln x}{x}\right)' = (3)' + \frac{(\ln x)'x - \ln x(x)'}{x^2} = 0 + \frac{\frac{1}{x} \times x - \ln x \times 1}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

Assim, temos que o declive da reta tangente no ponto de abcissa 1 é: $m = f'(1) = \frac{1 - \ln 1}{1^2} = \frac{1 - 0}{1} = 1$
Logo a equação da reta tangente é da forma $y = mx + b$

Como $f(1) = \frac{3(1) + \ln 1}{1} = 3 + 0 = 3$, sabemos que o ponto $P(1,3)$ pertence ao gráfico da função e também à reta tangente.

Assim, substituindo as coordenadas do ponto de tangência na equação da reta, podemos calcular o valor de b : $3 = 1 + b \Leftrightarrow 2 = b$; pelo que a equação da reta tangente é:

$$y = x + 2$$

Teste Intermédio 12.º ano – 30.04.2014

42. Começamos por determinar a expressão da derivada da função:

$$\begin{aligned} f'(t) &= ((4t + 2)e^{3,75-t})' = (4t + 2)'e^{3,75-t}(4t + 2) + (e^{3,75-t})' = 4e^{3,75-t} + (4t + 2)(3,75 - t)'e^{3,75-t} = \\ &= 4e^{3,75-t} + (4t + 2)(-1)e^{3,75-t} = 4e^{3,75-t} - (4t + 2)e^{3,75-t} = (4 - (4t + 2))e^{3,75-t} = \\ &= (4 - 4t - 2)e^{3,75-t} = (2 - 4t)e^{3,75-t} \end{aligned}$$

Determinando os zeros da derivada, vem:

$$f'(t) = 0 \Leftrightarrow (2 - 4t)e^{3,75-t} = 0 \Leftrightarrow 2 - 4t = 0 \vee \underbrace{e^{3,75-t} = 0}_{\text{Eq. Imp., } e^{3,75-t} > 0} \Leftrightarrow 2 = 4t \Leftrightarrow t = \frac{1}{2}$$

Estudando a variação do sinal da derivada e relacionando com a monotonia da função, vem:

t	0		$\frac{1}{2}$		6
f'	+	+	0	-	-
f	min	\longrightarrow	Máx	\longrightarrow	min

Assim, podemos concluir que a função f :

- é crescente no intervalo $[0, \frac{1}{2}]$;
- é decrescente no intervalo $[\frac{1}{2}, 6]$;
- tem um maximizante $(\frac{1}{2})$

Como o número máximo de alunos com gripe irá ocorrer no instante $t = 0,5$, o que corresponde a meio dia após as zero horas de segunda-feira, ou seja, segunda-feira às 12 horas.

Teste Intermédio 12.º ano – 30.04.2014



43. Começamos por determinar a expressão da derivada da função, no intervalo $]0, +\infty[$:

$$\begin{aligned} \left(\frac{x}{2} - \ln\left(\frac{6x}{x+1}\right)\right)' &= \left(\frac{1}{2}x\right)' - \left(\ln\left(\frac{6x}{x+1}\right)\right)' = \frac{1}{2} - \frac{\left(\frac{6x}{x+1}\right)'}{\frac{6x}{x+1}} = \frac{1}{2} - \frac{(6x)'(x+1) - 6x(x+1)'}{(x+1)^2 \frac{6x}{x+1}} = \\ &= \frac{1}{2} - \frac{6(x+1) - 6x(1)}{(x+1)^2 \frac{6x}{x+1}} = \frac{1}{2} - \frac{6x+6-6x}{(x+1)^2 \frac{6x}{x+1}} = \frac{1}{2} - \frac{6}{\frac{6x}{x+1}} = \frac{1}{2} - \frac{6(x+1)}{6x(x+1)^2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{x(x+1)} = \\ &= \frac{x(x+1)}{2x(x+1)} - \frac{2}{2x(x+1)} = \frac{x(x+1) - 2}{2x(x+1)} = \frac{x^2 + x - 2}{2x^2 + 2x} \end{aligned}$$

Calculando os zeros da derivada, no intervalo $]0, +\infty[$, vem:

$$\begin{aligned} \frac{x^2 + x - 2}{2x^2 + 2x} = 0 &\Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0 \wedge \underbrace{2x^2 + 2x \neq 0}_{\text{PV}, x>0} \Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4(1)(-2)}}{2(1)} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{2} \Leftrightarrow \underbrace{x = -2}_{\text{Imp.}, x>0} \vee x = 1 \end{aligned}$$

Estudando a variação do sinal da derivada e relacionando com a monotonia da função, vem:

x	0		1	$+\infty$
f'	n.d.	-	0	+
f	n.d.	\searrow	min	\nearrow

Assim, como f é decrescente no intervalo $]0,1]$ e crescente no intervalo $[1, +\infty[$ podemos concluir que 1 é um minimizante da função, pelo que $f(1)$ é o valor mínimo em $]0, +\infty[$.

Calculando o valor do mínimo, temos:

$$f(1) = \frac{1}{2} - \ln\left(\frac{6(1)}{1+1}\right) = \frac{1}{2} - \ln\left(\frac{6}{2}\right) = \frac{1}{2} - \ln 3 = \ln\left(e^{\frac{1}{2}}\right) - \ln 3 = \ln\left(\frac{e^{\frac{1}{2}}}{3}\right) = \ln\left(\frac{\sqrt{e}}{3}\right)$$

Exame – 2013, Ép. especial



44. Podemos descrever a monotonia da função g pela análise do gráfico, e relacionar com a variação do sinal da derivada:

x	$-\infty$	a		b	$+\infty$
g	↗		Máx	↘	
g'	+		0	-	

Pela observação do gráfico de g podemos ainda afirmar que $-2 < a < 0$ e $0 < b < 2$.

Como $f(x) = g(x - 3)$, o gráfico de f resulta de uma translação horizontal do gráfico de g , de 3 unidades para a direita.

Assim, temos que os extremos da função f têm abscissas $a + 3$ e $b + 3$, e a variação do sinal é dado por:

x	$-\infty$	$a + 3$		$b + 3$	$+\infty$
f	↗		Máx	↘	
f'	+		0	-	

Como $-2 < a < 0$, temos que $1 < a + 3 < 3$; e como $0 < b < 2$, sabemos que $3 < b + 3 < 5$, pelo que o gráfico da opção (A) é o único compatível com as condições.

Resposta: **Opção A**

Exame – 2013, 2.ª fase

- 45.
- Como $f(0) = a^0 = 1$ e $g(0) = a^{-0} = a^0 = 1$, o ponto $P(0,1)$ pertence aos gráficos das duas funções, pelo que **a afirmação (I) é falsa**.
 - Como $a > 1$ a função $g(x) = a^{-x}$ é estritamente decrescente, pelo que também **a afirmação (II) é falsa**.
 - Como $f'(x) = (a^x)' = a^x \ln a$, logo, $f'(-1) = a^{-1} \ln a = \frac{1}{a} \ln a = \frac{\ln a}{a}$
e como $g'(x) = (a^{-x})' = -a^{-x} \ln a$, logo $g'(1) = -a^{-1} \ln a = -\frac{1}{a} \ln a = -\frac{\ln a}{a}$
E assim,

$$f'(-1) - g'(1) = \frac{\ln a}{a} - \left(-\frac{\ln a}{a}\right) = \frac{\ln a}{a} + \frac{\ln a}{a} = \frac{2 \ln a}{a}$$

pelo que **a afirmação (III) é verdadeira**.

Resposta: **Opção B**

Exame – 2013, 1.ª fase

- 46.
- Como -1 é um zero de f , temos que $g'(-1) = f(-1) \times e^{-1} = 0 \times e^{-1} = 0$, sabemos que o declive da reta tangente ao gráfico no ponto de abscissa -1 é uma reta de declive zero, ou seja, uma reta horizontal, o que não é compatível com o gráfico da opção (I), pelo que este gráfico não representa a função g .
 - Como $e^{-x} > 0, \forall x \in \mathbb{R}$, a função derivada (g') e a função f têm o mesmo sinal. Ou seja, a derivada é positiva apenas no intervalo $]2, +\infty[$, logo a função g é crescente apenas neste intervalo, ao contrário do que acontece com o gráfico da opção (II), pelo que este gráfico também não é o que representa a função g .
 - Como $\lim_{x \rightarrow +\infty} [g(x) - 2] = 0$, a reta de equação $y = 2$ é uma assíntota do gráfico de g . Da observação do gráfico da opção (III), verifica-se que assíntota deste gráfico é a reta $y = -2$ e não a reta $y = 2$, pelo que também não é este o gráfico da função g .

Desta forma, o gráfico da opção (IV) é o único que pode representar a função g , uma vez que é compatível com as condições enunciadas.

Exame – 2013, 1.ª Fase



47. Começamos por determinar a expressão da derivada, para $x > 0$:

$$\begin{aligned} g'(x) &= (f(x) - x + \ln^2 x)' = (f(x))' - (x)' + (\ln^2 x)' = (x)' \ln x + x(\ln x)' - 1 + (\ln(x) \times \ln x)' = \\ &= 1 \times \ln x + x \times \frac{1}{x} - 1 + (\ln x)' \times \ln x + \ln x \times (\ln x)' = \ln x + 1 - 1 + 2 \left(\ln x \times \frac{1}{x} \right) = \\ &= \ln x + \frac{2 \ln x}{x} = \ln x \left(1 + \frac{2}{x} \right) \end{aligned}$$

Calculando os zeros da derivada, no intervalo $]0, e]$, temos:

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \ln x \left(1 + \frac{2}{x} \right) = 0 \Leftrightarrow \ln x = 0 \vee 1 + \frac{2}{x} = 0 \Leftrightarrow e^0 = x \vee 1 = -\frac{2}{x} \Leftrightarrow x = 1 \vee \underbrace{x = -2}_{-2 \notin]0, e]}$$

Como g' só tem um zero no intervalo $]0, e]$ ($x = 1$), a variação do sinal da derivada e a relação com a monotonia de g é:

x	0		1		e
g'	n.d	-	0	+	+
g	n.d	\searrow	min	\nearrow	Max

Assim, podemos concluir que a função g :

- é decrescente no intervalo $]0, 1]$;
- é crescente no intervalo $[1, e]$;
- tem um mínimo (cujo minimizante é 1) e um máximo (cujo maximizante é e).

Exame – 2013, 1.ª Fase

48. O declive da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa a é $f'(a)$.

Assim, determinando a expressão da derivada, vem:

$$f'(x) = (x^a + a^2 \ln x)' = (x^a)' + (a^2 \ln x)' = ax^{a-1} + a^2(\ln x)' = ax^{a-1} + a^2 \left(\frac{1}{x} \right) = ax^{a-1} + \frac{a^2}{x}$$

Logo, temos que:

$$f'(a) = a \times a^{a-1} + \frac{a^2}{a} = a^{1+a-1} + a = a^a + a$$

Resposta: **Opção D**

Teste Intermédio 12.º ano – 24.05.2013



49. Começamos por determinar a expressão da derivada:

$$\begin{aligned} C'(t) &= (0,5t^2 \times e^{-0,1t})' = 0,5((t^2)' \times e^{-0,1t} + t^2 \times (e^{-0,1t})') = 0,5(2te^{-0,1t} + t^2(-0,1e^{-0,1t})) = \\ &= 0,5 \times 2te^{-0,1t} - 0,5 \times 0,1t^2e^{-0,1t} = te^{-0,1t} - 0,05t^2e^{-0,1t} = te^{-0,1t}(1 - 0,05t) \end{aligned}$$

Calculando os zeros da derivada, vem:

$$\begin{aligned} C'(t) = 0 &\Leftrightarrow t \times e^{-0,1t} \times (1 - 0,05t) = 0 \Leftrightarrow \underbrace{t = 0}_{\text{Eq.Imp., } t > 0} \vee \underbrace{e^{-0,1t} = 0}_{\text{Eq.Imp., } e^{-0,1t} > 0} \vee 1 - 0,05t = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow -0,05t = -1 \Leftrightarrow t = \frac{1}{0,05} \Leftrightarrow t = 20 \end{aligned}$$

Estudando a variação do sinal da derivada e relacionando com a monotonia da função, vem:

t	0		20	$+\infty$
C'	+	+	0	-
C	min	\nearrow	Máx	\searrow

Assim, como C é crescente no intervalo $]0,20]$ e decrescente no intervalo $[20, +\infty[$ podemos concluir que quando $t = 20$, a concentração do produto químico na água é máxima.

Exame – 2012, Ép. especial

50. Sabemos que o declive da reta tangente (m) por ser calculado por:

- a tangente da inclinação: $m = \text{tg } \frac{\pi}{4} = 1$
- o valor da derivada no ponto de abscissa a
Determinando a expressão da derivada, vem:

$$f'(x) = \left(\ln \left(\frac{x}{3} + 2 \right) \right)' = \frac{\left(\frac{x}{3} + 2 \right)'}{\frac{x}{3} + 2} = \frac{\left(\frac{x}{3} \right)' + (2)'}{\frac{x}{3} + \frac{6}{3}} = \frac{\frac{1}{3} + 0}{\frac{x+6}{3}} = \frac{1}{x+6}$$

$$\text{Logo, } m = f'(a) = \frac{1}{a+6}$$

Desta forma temos que:

$$\frac{1}{a+6} = 1 \Leftrightarrow 1 = a+6 \wedge a \neq -6 \Leftrightarrow a = -5$$

Resposta: **Opção D**

Exame – 2012, 2.ª Fase



51. Como o declive (m), da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa -1 é $f'(-1)$, começamos por determinar a expressão da derivada, para $x < 0$:

$$f'(x) = (xe^{1-x})' = (x)'e^{1-x} + x(e^{1-x})' = 1 \times e^{1-x} + x(1-x)'e^{1-x} = e^{1-x} + x(-1)e^{1-x} = e^{1-x} - xe^{1-x}$$

Calculando o declive da reta tangente temos:

$$m = f'(-1) = e^{1-(-1)} - (-1)e^{1-(-1)} = e^2 + e^2 = 2e^2$$

Calculando as coordenadas do ponto de tangência, temos: $f(-1) = (-1)e^{1-(-1)} = -e^2$, ou seja, o ponto $P(-1, -e^2)$ é um ponto do gráfico de f que também pertence à reta tangente.

Substituindo o valor do declive na equação da reta, vem $y = 2e^2 \times x + b$

Substituindo as coordenadas do ponto na equação da reta, calculamos o valor da ordenada na origem:

$$-e^2 = 2e^2 \times (-1) + b \Leftrightarrow -e^2 = -2e^2 + b \Leftrightarrow -e^2 + 2e^2 = b \Leftrightarrow e^2 = b$$

Logo, a equação reduzida da reta tangente ao gráfico da função f no ponto de abcissa $x = -1$ é:

$$y = 2e^2 \times x + e^2$$

Exame – 2012, 1.ª Fase

52. Como as retas r e s são paralelas, os respetivos declives são iguais.

Como o declive da reta r é $f'(2)$ e o da reta s é $f'(b)$, temos que $f'(2) = f'(b)$, ou seja b é uma solução da equação $f'(x) = f'(2)$

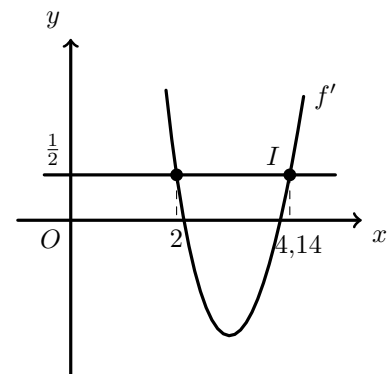
Como é conhecida a expressão analítica de $f'(x)$, podemos calcular

$$f'(2) = 2^2 - 4(2) + \frac{9}{2} - 4 \ln(2-1) = 4 - 8 + \frac{9}{2} - 4 \ln(1) = -4 + \frac{9}{2} - 4 \times 0 = -\frac{8}{2} + \frac{9}{2} = \frac{1}{2}$$

Logo, podemos traçar na calculadora o gráfico da função derivada e a reta de equação $y = \frac{1}{2}$, numa janela compatível com o domínio da função, que se reproduz na figura ao lado.

Recorrendo à função da calculadora que permite determinar valores aproximados das coordenadas de pontos de interseção de dois gráficos, podemos determinar as soluções da equação $f'(x) = \frac{1}{2}$, que são as abcissas dos pontos de interseção.

Determinando o valor, arredondado às centésimas, do ponto I de interseção dos dois gráficos, temos $I(4,14; 0,50)$ - o outro ponto tem abcissa 2, que é a abcissa do ponto A .



Como b é uma das soluções da equação (diferente de 2), temos que $b \approx 4,14$

Teste Intermédio 12.º ano – 24.05.2012



53. Podemos descrever a variação do sinal de h' , pela análise do gráfico, e relacionar com a monotonia da função h :

x		0	
h'	+	0	-
h	\nearrow	Máx	\searrow

Ou seja, a função h é crescente se $x \leq 0$ e decrescente se $x \geq 0$, e apenas o gráfico da opção (D), é compatível com esta conclusão.

Resposta: **Opção D**

Exame – 2011, Prova especial

54. Como o declive (m), da reta tangente ao gráfico de g no ponto de abscissa 1 é $g'(1)$, começamos por determinar a expressão da derivada:

$$g'(x) = ((2x - 1) \times f(x))' = (2x - 1)'f(x) + (2x - 1)(f(x))' = 2f(x) + (2x - 1)f'(x)$$

Calculando o declive da reta tangente temos:

$$m = g'(1) = 2f(1) + (2x - 1)f'(1) = 2 \times 1 + (2(1) - 1) \times 1 = 2 + 1 \times 1 = 3$$

Calculando as coordenadas do ponto de tangência, temos: $g(1) = (2(1) - 1) \times f(1) = (2 - 1) \times 1 = 1$, ou seja, o ponto $P(1,1)$ é um ponto do gráfico de g que também pertence à reta tangente.

Substituindo o valor do declive na equação da reta, vem $y = 3x + b$

Substituindo as coordenadas do ponto na equação da reta, calculamos o valor da ordenada na origem:

$$1 = 3 \times 1 + b \Leftrightarrow 1 - 3 = b \Leftrightarrow -2 = b$$

Logo, a equação reduzida da reta tangente ao gráfico da função g no ponto de abscissa $x = 1$ é:

$$y = 3x - 2$$

Resposta: **Opção A**

Exame – 2011, Prova especial



55. Começamos por determinar a expressão da derivada para $x \neq -1$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{x+1}{1-e^{x+1}} + 1 \right)' = \left(\frac{x+1}{1-e^{x+1}} \right)' + (1)' = \frac{(x+1)'(1-e^{x+1}) - (x+1)(1-e^{x+1})'}{(1-e^{x+1})^2} + 0 = \\ &= \frac{1 \times (1-e^{x+1}) - (x+1)((1)' - (x+1)'e^{x+1})}{(1-e^{x+1})^2} = \frac{1-e^{x+1} - (x+1)(0-1 \times e^{x+1})}{(1-e^{x+1})^2} = \\ &= \frac{1-e^{x+1} - (x+1)(-e^{x+1})}{(1-e^{x+1})^2} = \frac{1-e^{x+1} - (-xe^{x+1} - e^{x+1})}{(1-e^{x+1})^2} = \\ &= \frac{1-e^{x+1} + xe^{x+1} + e^{x+1}}{(1-e^{x+1})^2} = \frac{1+xe^{x+1}}{(1-e^{x+1})^2} \end{aligned}$$

Como a função f' resulta de operações sucessivas de funções contínuas em \mathbb{R} , é uma função contínua em $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$, e, por isso, também é contínua em $]0,1[$.

Como $\frac{1}{4} = 0,25$, temos que $0,21 < \frac{1}{4} < 0,34$, ou seja, $f'(1) < \frac{1}{4} < f'(0)$, então, podemos concluir, pelo Teorema de Bolzano, que existe $c \in]0,1[$ tal que $f'(c) = \frac{1}{4}$, ou seja, que a equação $f'(x) = \frac{1}{4}$ tem, pelo menos, uma solução em $]0,1[$.

C.A.

$$\begin{aligned} f'(0) &= \frac{1+0 \times e^{0+1}}{(1-e^{0+1})^2} = \frac{1+0}{(1-e^1)^2} = \\ &= \frac{1}{(1-e)^2} \approx 0,34 \\ f'(1) &= \frac{1+1 \times e^{1+1}}{(1-e^{1+1})^2} = \frac{1+e^2}{(1-e^2)^2} = \\ &= \frac{1}{(1-e)^2} \approx 0,21 \end{aligned}$$

Exame – 2011, Ép. especial

56. Começamos por determinar a expressão da derivada, em $]2, +\infty[$:

$$\begin{aligned} \left(\frac{x+1}{\ln(x+1)} \right)' &= \frac{(x+1)' \ln(x+1) - (x+1)(\ln(x+1))'}{(\ln(x+1))^2} = \frac{(1+0) \ln(x+1) - (x+1) \times \frac{(x+1)'}{(x+1)}}{(\ln(x+1))^2} = \\ &= \frac{\ln(x+1) - (x+1)'}{(\ln(x+1))^2} = \frac{\ln(x+1) - 1}{(\ln(x+1))^2} \end{aligned}$$

Determinando os zeros da derivada, em $]2, +\infty[$, temos:

$$\begin{aligned} \frac{\ln(x+1) - 1}{(\ln(x+1))^2} = 0 &\Leftrightarrow \ln(x+1) - 1 = 0 \wedge \underbrace{(\ln(x+1))^2 \neq 0}_{PV, x > 2 \Rightarrow \ln(x+1) > \ln 3} \Leftrightarrow \ln(x+1) = 1 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (x+1) = e^1 \Leftrightarrow x = e - 1 \end{aligned}$$

Logo, como $e - 1 < 2$, a função derivada não tem zeros em $]2, +\infty[$.

Como, para $x > 2$,

- $\ln(x+1) - 1 > \ln(3) - 1$, temos que $\ln(x+1) - 1 > 0, \forall x \in]2, +\infty[$
- $\ln(x+1) \neq 0$, temos que $(\ln(x+1))^2 > 0, \forall x \in]2, +\infty[$

temos que f' é sempre positiva no intervalo $]2, +\infty[$, o que significa que a função f é sempre crescente neste intervalo.

Exame – 2011, 2.ª Fase



57. Pela observação do gráfico podemos afirmar que:

- Em $x = -3$ a função é crescente, ou seja, $f'(-3) > 0$
- Em $x = 0$ a função é decrescente, ou seja, $f'(0) < 0$
- Em $x = 6$ a função é crescente, ou seja, $f'(6) > 0$

Assim, temos que:

- $f'(0) \times f'(6) < 0$
- $f'(-3) \times f'(6) > 0$
- $f'(-3) \times f'(0) < 0$
- $f'(0) \times f'(6) < 0$

Resposta: **Opção D**

Exame – 2011, 1.ª fase

58. Começamos por determinar a expressão da derivada:

$$\begin{aligned} T'(t) &= (15 + 0,1t^2e^{-0,15t})' = (15)' + (0,1t^2e^{-0,15t})' = 0 + 0,1((t^2)'e^{-0,15t} + t^2(e^{-0,15t})') = \\ &= 0,1(2t \times e^{-0,15t} + t^2(-0,15)e^{-0,15t}) = 0,1(2te^{-0,15t} - 0,15t^2e^{-0,15t}) = \\ &= 0,2te^{-0,15t} - 0,015t^2e^{-0,15t} = te^{-0,15t}(0,2 - 0,015t) \end{aligned}$$

Calculando os zeros da derivada, temos:

$$\begin{aligned} T'(t) = 0 &\Leftrightarrow te^{-0,15t}(0,2 - 0,015t) = 0 \Leftrightarrow t = 0 \vee \underbrace{e^{-0,15t} = 0}_{\text{Eq. Imp., } e^{-0,15t} > 0} \vee 0,2 - 0,015t = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow t = 0 \vee 0,2 = 0,015t \Leftrightarrow t = 0 \vee \frac{0,2}{0,015} = t \Leftrightarrow t = 0 \vee t = \frac{40}{3} \end{aligned}$$

Estudando a variação do sinal da derivada e relacionando com a monotonia da função, vem:

t	0		$\frac{40}{3}$		20
T'	0	+	0	-	-
T	min	\longrightarrow	Máx	\longrightarrow	

Assim, como C é crescente no intervalo $[0, \frac{40}{3}]$ e decrescente no intervalo $[\frac{40}{3}, 20]$ podemos concluir que $\frac{40}{3}$ é único o maximizante da função.

Como $\frac{40}{3} \approx 13,333$ corresponde a 13 horas e $0,333 \times 60$ minutos (ou seja 20 minutos), temos que às 13 horas e 20 minutos do dia 1 de Abril de 2010, se registou, no museu, a temperatura ambiente máxima.

Exame – 2011, 1.ª fase



59. Averiguando a existência de assíntotas horizontais, temos:

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3}{x-1} = \frac{3}{-\infty-1} = \frac{3}{-\infty} = 0 \\ \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 + \ln x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{x} + \frac{\ln x}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x} + \underbrace{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x}}_{\text{Lim notável}} = \frac{2}{+\infty} + 0 = 0 + 0 = 0 \end{aligned}$$

Pelo que podemos afirmar que a reta de equação $y = 0$ é a assíntota horizontal do gráfico de f .

Determinando a expressão da derivada, para $x > 1$, temos:

$$\left(\frac{2 + \ln x}{x} \right)' = \frac{(2 + \ln x)'(x) - (2 + \ln x)(x)'}{x^2} = \frac{\left(0 + \frac{1}{x}\right)(x) - (2 + \ln x)(1)}{x^2} = \frac{1 - 2 - \ln x}{x^2} = \frac{-1 - \ln x}{x^2}$$

Como $e > 1$, o declive da reta tangente no ponto de abscissa e , é dado por:

$$m = f'(e) = \frac{-1 - \ln e}{e^2} = \frac{-1 - 1}{e^2} = \frac{-2}{e^2}$$

Determinando a ordenada do ponto do gráfico de abscissa e , temos:

$$f(e) = \frac{2 + \ln e}{e} = \frac{2 + 1}{e} = \frac{3}{e}$$

Como o ponto de abscissa e , também pertence à reta tangente, substituímos as coordenadas deste ponto e o declive da reta, em $y = mx + b$, para calcular o valor de b :

$$\frac{3}{e} = \frac{-2}{e^2} \times e + b \Leftrightarrow \frac{3}{e} = -\frac{2}{e} + b \Leftrightarrow \frac{3}{e} + \frac{2}{e} = b \Leftrightarrow \frac{5}{e} = b$$

Desta forma, a equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abscissa e , é:

$$y = -\frac{2}{e^2} \times x + \frac{5}{e}$$

E a abscissa do ponto de intersecção com a reta de equação $y = 0$ (a assíntota horizontal), pode ser calculada como:

$$y = -\frac{2}{e^2} \times x + \frac{5}{e} \wedge y = 0 \Leftrightarrow 0 = -\frac{2}{e^2} \times x + \frac{5}{e} \Leftrightarrow \frac{2}{e^2} \times x = \frac{5}{e} \Leftrightarrow x = \frac{5e^2}{2e} \Leftrightarrow x = \frac{5e}{2}$$

Ou seja, as coordenadas do ponto de intersecção da assíntota horizontal com a reta tangente ao gráfico de f no ponto de abscissa e , são

$$P \left(\frac{5e}{2}, 0 \right)$$

Exame – 2011, 1.ª fase

60. Através da análise do gráfico, podemos descrever a variação do sinal da derivada para relacionar com a monotonia da função f :

x		a		b	
f'	+	0	-	0	+
f	\nearrow	Máx	\searrow	min	\nearrow

Logo, o único gráfico apresentado compatível com a monotonia estudada é o gráfico da opção (A).

Resposta: **Opção A**

Exame – 2010, Ép. especial



61. Começamos por determinar a expressão da derivada para $x > 2$:

$$\left(\frac{1}{5}x - \ln x\right)' = \left(\frac{1}{5}x\right)' - (\ln x)' = \frac{1}{5} - \frac{1}{x}$$

Calculando os zeros da derivada, em $]2, +\infty[$, temos:

$$\frac{1}{5} - \frac{1}{x} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{5} = \frac{1}{x} \Leftrightarrow x = 5 \wedge \underbrace{x \neq 0}_{\text{PV, } x > 2}$$

Estudando a variação do sinal da derivada e relacionando com a monotonia da função, vem:

x	2		5	$+\infty$
f'	n.d.	-	0	+
f	n.d.	\searrow	min	\nearrow

Assim, como f é decrescente no intervalo $]0, 5]$ e crescente no intervalo $[5, +\infty[$ podemos concluir que 5 é único o minimizante da função no intervalo $]2, +\infty[$, pelo que $f(5)$ é um mínimo da função neste intervalo.

Exame – 2010, 2.^a Fase

62. Começamos por determinar a expressão da derivada:

$$f'(x) = (-x + e^{2x^3-1})' = -(x)' + (e^{2x^3-1})' = -1 + (2x^3 - 1)'e^{2x^3-1} = -1 + 6x^2e^{2x^3-1}$$

Como o declive (m) da reta tangente ao gráfico de f em $x = 0$ é $f'(0)$, temos que:

$$m = f'(0) = -1 + 6(0)^2e^{2(0)^3-1} = -1 + 0 = -1$$

Determinando a ordenada do ponto do gráfico da função que tem abcissa zero, temos:

$$f(0) = -0 + e^{2(0)^3-1} = 0 + e^{0-1} = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

Como o ponto de abcissa 0, também pertence à reta tangente, substituímos as coordenadas deste ponto e o declive da reta, em $y = mx + b$, para calcular o valor de b :

$$\frac{1}{e} = -1 \times 0 + b \Leftrightarrow \frac{1}{e} = 0 + b \Leftrightarrow b = \frac{1}{e}$$

Desta forma, a equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa 0, é:

$$y = -x + \frac{1}{e}$$

Exame – 2010, 2.^a Fase

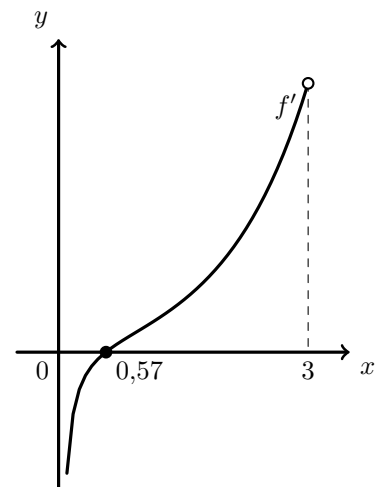


63. Para estudar a monotonia da função f , devemos analisar o sinal da função f' , pelo que podemos traçar o gráfico de f' na calculadora gráfica, numa janela compatível com o domínio da função, para obter o gráfico reproduzido na figura seguinte.

Depois, recorrendo à função da calculadora que permite determinar valores aproximados para um zero de uma função, num intervalo, podemos encontrar a solução da equação $f'(x) = 0$, com aproximação às centésimas: $x \approx 0,57$.

Pela análise do gráfico podemos ainda determinar a variação do sinal da função f' , para depois relacionar com a monotonia da função f :

x	0		0,57		3
f'	n.d.	-	0	+	n.d.
f	n.d.	\searrow	min	\nearrow	n.d.



Assim temos que a função f :

- é decrescente no intervalo $]0; 0,57[$
- é crescente no intervalo $]0,57; 3[$
- tem um mínimo absoluto para $x \approx 0,57$

Exame – 2010, 1.ª Fase

64. Começamos por determinar a expressão da derivada:

$$\begin{aligned} f'(x) &= (3 + 4x^2e^{-x})' = (3)' + (4x^2)'e^{-x} + 4x^2(e^{-x})' = 0 + 8xe^{-x} + 4x^2(-x)'e^{-x} = 8xe^{-x} + 4x^2(-1)e^{-x} = \\ &= 8xe^{-x} - 4x^2e^{-x} = e^{-x}(8x - 4x^2) \end{aligned}$$

Calculando os zeros da derivada, temos:

$$\begin{aligned} f'(x) = 0 &\Leftrightarrow e^{-x}(8x - 4x^2) = 0 \Leftrightarrow \underbrace{e^{-x} = 0}_{\text{Eq Imp, } e^{-x} > 0} \vee 8x - 4x^2 = 0 \Leftrightarrow x(8 - 4x) = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x = 0 \vee 8 - 4x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee 8 = 4x \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 2 \end{aligned}$$

Estudando a variação do sinal da derivada e relacionando com a monotonia da função, vem:

x	$-\infty$	0		2	$+\infty$	
f'		-	0	+	0	-
f		\searrow	min	\nearrow	Máx	\searrow

Assim, como f é decrescente no intervalo $] - \infty, 0[$ e em $[2, + \infty[$; e crescente no intervalo $[0, 2]$ podemos concluir que 0 é único o minimizante da função, pelo que $f(0)$ é o único mínimo da função.

Calculando o valor do mínimo, temos:

$$f(0) = 3 + 4(0)^2e^{-(0)} = 3 + 0 = 3$$

Teste Intermédio 12.º ano – 19.05.2010

65. Como a derivada de g é:

$$g'(x) = (f(x) + x)' = (f(x))' + (x)' = f'(x) + 1$$

Assim, o gráfico de g' é a translação do gráfico de f' pelo vetor $\vec{u} = (1, 0)$, ou seja com um deslocamento vertical de uma unidade no sentido positivo.

Desta forma o gráfico da opção (D) é o único compatível com esta informação.

Resposta: **Opção D**

Exame – 2009, 2.ª fase



66. Começamos por determinar a expressão da derivada:

$$A'(t) = (2 - t + 5 \ln(t+1))' = (2)' - (t)' + (5 \ln(t+1))' = 0 - 1 + 5 \left(\frac{(t+1)'}{t+1} \right) = -1 + 5 \left(\frac{1}{t+1} \right) = -1 + \frac{5}{t+1}$$

Calculando os zeros da derivada, temos:

$$A'(t) = 0 \Leftrightarrow -1 + \frac{5}{t+1} = 0 \Leftrightarrow \frac{5}{t+1} = 1 \Leftrightarrow 5 = t+1 \wedge t+1 \neq 0 \Leftrightarrow 4 = t \wedge \underbrace{t \neq -1}_{\text{PV, } t \in [0,16[}$$

Estudando a variação do sinal da derivada e relacionando com a monotonia da função, vem:

t	0		4		16
A'	+	+	0	-	n.d.
A	min	\rightarrow	Máx	\rightarrow	n.d.

Assim, como A é crescente no intervalo $[0,4]$ e decrescente no intervalo $[4,16[$ podemos concluir que 4 é único o maximizante da função, pelo que $A(4)$ é o único mínimo da função.

Calculando o valor do máximo da função e arredondando o resultado às centésimas, temos:

$$A(4) = 2 - 4 + 5 \ln(4+1) = -2 + 5 \ln 5 \approx 6,05$$

Logo, a área máxima afetada pela doença foi aproximadamente de 6,05 ha.

Exame – 2009, 2.ª Fase

67. Começamos por determinar a expressão da derivada:

$$\begin{aligned} C'(t) &= (2te^{-0,3t})' = (2t)'(e^{-0,3t}) + 2t(e^{-0,3t})' = 2 \times e^{-0,3t} + 2t(-0,3t)'e^{-0,3t} = \\ &= 2e^{-0,3t} + 2t(-0,3)e^{-0,3t} = 2e^{-0,3t} - 0,6te^{-0,3t} = e^{-0,3t}(2 - 0,6t) \end{aligned}$$

Calculando os zeros da derivada, temos:

$$\begin{aligned} C'(t) = 0 &\Leftrightarrow e^{-0,3t}(2 - 0,6t) = 0 \Leftrightarrow \underbrace{e^{-0,3t} = 0}_{\text{Eq Imp, } e^{-0,3t} > 0} \vee 2 - 0,6t = 0 \Leftrightarrow 2 = 0,6t \Leftrightarrow \frac{2}{0,6} = t \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{2}{\frac{6}{10}} = t \Leftrightarrow \frac{20}{6} = t \Leftrightarrow \frac{10}{3} = t \end{aligned}$$

Estudando a variação do sinal da derivada e relacionando com a monotonia da função, vem:

t	0		$\frac{10}{3}$		$+\infty$
C'	+	+	0	-	
C	min	\rightarrow	Máx	\rightarrow	

Assim, como C é crescente no intervalo $\left[0, \frac{10}{3}\right]$ e decrescente no intervalo $\left[\frac{10}{3}, +\infty\right[$ podemos concluir que $\frac{10}{3}$ é único o maximizante da função.

Como $\frac{10}{3} = 3 + \frac{1}{3}$ e $\frac{1}{3} \times 60 = 20$ ($\frac{1}{3}$ de hora são 20 minutos) temos que a concentração máxima do medicamento no sangue ocorreu 3 hora e 20 minutos após a toma, ou seja, às 12 horas e 20 minutos.

Exame – 2009, 1.ª Fase



68. Como gráfico de g é uma reta de declive negativo, temos que, sendo $y = ax + k$ a equação dessa reta, $g'(x) = a$, e $a < 0$.

Assim, a expressão da derivada de h , é:

$$h'(x) = (f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x) = (x^2 + 1)' + k = 2x + a$$

Ou seja, o gráfico de h' é uma reta de declive 2 e ordenada na origem igual a $g'(x)$.

- Como $m = 2$, temos que $m > 0$,
- e como $b = a$ e $a < 0$, então $b < 0$.

Resposta: **Opção B**

Teste Intermédio 12.º ano – 27.05.2009

69. Como o ponto A (o ponto de tangência) pertence ao eixo ordenadas tem abcissa zero, logo as suas coordenadas são $A(0,1)$.

Como o declive da reta tangente (m) é dado pela função derivada para a abcissa do ponto de tangência, temos que:

$$m = f'(0) = (2(0) + 4)e^0 = (0 + 4) \times 1 = 4$$

Substituindo o valor do declive e as coordenadas do ponto de tangência em $y = mx + b$, calculamos o valor da ordenada na origem:

$$1 = 4 \times 0 + b \Leftrightarrow 1 = b$$

Logo a equação da reta tangente ao gráfico de f , no ponto A é:

$$y = 4x + 1$$

Teste Intermédio 12.º ano – 27.05.2009

70. Começamos por determinar a expressão da derivada:

$$f'(x) = \left(\frac{e^x}{x}\right)' = \frac{(e^x)'x - e^x(x)'}{x^2} = \frac{e^x \times x - e^x \times 1}{x^2} = \frac{xe^x - e^x}{x^2}$$

Como o declive (m) da reta tangente ao gráfico de f em $x = 2$ é $f'(2)$, temos que:

$$m = f'(2) = \frac{2e^2 - e^2}{2^2} = \frac{e^2}{4}$$

Determinando a ordenada do ponto do gráfico da função que tem abcissa zero, temos:

$$f(2) = \frac{e^2}{2}$$

Como o ponto de abcissa 2, também pertence à reta tangente, substituímos as coordenadas deste ponto e o declive da reta, em $y = mx + b$, para calcular o valor de b :

$$\frac{e^2}{2} = \frac{e^2}{4} \times 2 + b \Leftrightarrow \frac{e^2}{2} = \frac{e^2}{2} + b \Leftrightarrow \frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{2} = b \Leftrightarrow 0 = b$$

Desta forma, a equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa 0, é:

$$y = \frac{e^2}{4} \times x$$

Exame – 2008, Ép. especial



71. Começamos por determinar a expressão da derivada:

$$f'(x) = (\ln(x^2 + 1))' = \frac{(x^2 + 1)'}{x^2 + 1} = \frac{2x + 0}{x^2 + 1} = \frac{2x}{x^2 + 1}$$

Calculando os zeros da derivada, temos:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2x}{x^2 + 1} = 0 \Leftrightarrow 2x = 0 \wedge \underbrace{x^2 + 1 \neq 0}_{\text{PV, } x^2 + 1 \geq 1} \Leftrightarrow x = 0$$

Analisando a variação do sinal da derivada e relacionando com a monotonia de f , temos:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f'		0	$+$
f		min	

Assim, podemos concluir que a função f :

- é decrescente no intervalo $] - \infty, 0]$;
- é crescente no intervalo $[0, + \infty[$;
- tem um único extremo - um mínimo (cujo minimizante é 0).

Calculando o valor do mínimo, vem:

$$f(0) = \ln(0^2 + 1) = \ln(0 + 1) = \ln 1 = 0$$

Exame – 2008, Ép. especial

72. Pela observação do gráfico sabemos que f' é constante, e positiva, para $x < 0$, porque a função varia num ritmo constante e é crescente, pelo que apenas as os gráficos das opções (A), (B) e (C) são coerentes com esta informação.

Como a semitangente ao gráfico de f à esquerda de 0 tem declive positivo, e a semitangente ao gráfico de f à direita de 0 tem declive negativo, ou seja,

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \neq \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$$

Podemos concluir que não existe $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$, pelo que f' não está definida em $x = 0$; e os únicos gráficos que são compatíveis com esta informação são os das opções (C) e (D).

Resposta: **Opção C**

Exame – 2008, 1ª fase



73. Começamos por determinar a expressão da derivada:

$$h'(x) = (4 - x + \ln(x + 1))' = (4)' - (x)' + (\ln(x + 1))' = 0 - 1 + \frac{(x + 1)'}{x + 1} = -1 + \frac{1}{x + 1}$$

Calculando os zeros da derivada, temos:

$$h'(x) = 0 \Leftrightarrow -1 + \frac{1}{x + 1} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x + 1} = 1 \Leftrightarrow 1 = x + 1 \wedge \underbrace{x + 1 \neq 0}_{\text{PV, } x > -1} \Leftrightarrow 0 = x$$

Estudando a variação do sinal da derivada e relacionando com a monotonia de h , temos:

x	-1		0	$+\infty$
h'	n.d.	$+$	0	$-$
h	n.d.	\nearrow	Máx	\searrow

Assim, podemos concluir que a função h :

- é crescente no intervalo $] - 1, 0]$;
- é decrescente no intervalo $[0, +\infty[$;
- tem um único extremo - um máximo (cujo maximizante é 0).

Calculando o valor do máximo, temos:

$$h(0) = 4 - 0 + \ln(0 + 1) = 4 + \ln 1 = 4 + 0 = 4$$

Exame – 2008, 1.ª fase

74.

74.1. Como o ponto A é o ponto de ordenada máxima, a abscissa deste ponto é o zero da derivada. Assim, determinando a expressão da derivada em $[0, 3]$, vem:

$$(2 - x + \ln(1 + 3x))' = (2)' - (x)' + (\ln(1 + 3x))' = 0 - 1 + \frac{(1 + 3x)'}{1 + 3x} = -1 + \frac{3}{1 + 3x}$$

Calculando os zeros da derivada em $[0, 3]$, temos:

$$-1 + \frac{3}{1 + 3x} = 0 \Leftrightarrow \frac{3}{1 + 3x} = 1 \Leftrightarrow 3 = 1 + 3x \wedge \underbrace{1 + 3x \neq 0}_{\text{PV, } x \geq 0} \Leftrightarrow 3 - 1 = 3x \Leftrightarrow \frac{2}{3} = x$$

Como a ordenada do ponto A é o único máximo de f em $[0, 3]$, e a derivada da função f só tem um zero neste intervalo, podemos garantir que a abscissa do ponto A é o zero da derivada, ou seja, $x_A = \frac{2}{3}$



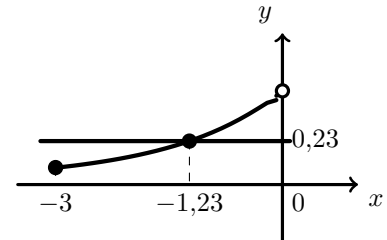
74.2. Como o declive da reta tangente num ponto, é dado pela derivada da função nesse ponto, e o declive da reta r é 0,23, sabemos que a abcissa do ponto B é a solução da equação $f'(x) = 0,23$

Como a abcissa do ponto B é negativa, vamos determinar a expressão de f' , para $x \in [-3,0[$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{e^x - 1 + x}{x} \right)' = \frac{(e^x - 1 + x)' \cdot x - (e^x - 1 + x) \cdot (x)'}{x^2} = \frac{(e^x - 0 + 1) \cdot x - (e^x - 1 + x) \cdot 1}{x^2} = \\ &= \frac{(e^x + 1) \cdot x - (e^x - 1 + x)}{x^2} = \frac{x \cdot e^x + x - e^x + 1 - x}{x^2} = \frac{x \cdot e^x - e^x + 1}{x^2} \end{aligned}$$

Assim a abcissa do ponto B é a solução da equação $\frac{x \cdot e^x - e^x + 1}{x^2} = 0,23$

Traçando na calculadora o gráfico de $f'(x) = \frac{x \cdot e^x - e^x + 1}{x^2}$ e da reta $y = 0,23$, numa janela compatível com o domínio $[-3,0[$, obtemos o gráfico que se reproduz na figura ao lado.



Depois, recorrendo à função da calculadora para determinar valores aproximados das coordenadas de pontos de interseção de dois gráficos, obtemos a abcissa do ponto de interseção dos gráficos representados, com aproximação às centésimas, que coincide com a abcissa do ponto B :

$$x_B \approx -1,23$$

Teste Intermédio 12.º ano – 29.04.2008

75. Começamos por determinar a expressão da derivada:

$$f'(x) = (1 - \ln(x^2))' = (1)' - (\ln(x^2))' = 0 - \frac{(x^2)'}{x^2} = -\frac{2x}{x^2} = -\frac{2}{x}$$

Calculando os zeros da derivada, temos:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{2}{x} = 0 \Leftrightarrow \underbrace{\frac{2}{x}} = 0$$

Eq. Impossível

Estudando a variação do sinal da derivada e relacionando com a monotonia de h , temos:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f'	+	n.d.	-
f	↗	n.d.	↘

Assim podemos concluir que a função f :

- é crescente no intervalo $]-\infty,0[$;
- é decrescente no intervalo $[0,+\infty[$;
- não tem qualquer extremo.

Exame – 2007, 2.ª Fase



76. Para estudar a monotonia da função começamos por determinar a expressão da função derivada:

$$I'(x) = (10e^{-0,05x})' = 10(e^{-0,05x})' = 10(-0,05x)'e^{-0,05x} = 10 \times (-0,05)e^{-0,05x} = -0,5e^{-0,05x}$$

Como $e^{-0,05} > 0$, para qualquer valor de x , então $-0,05 \times e^{-0,05} < 0$, ou seja $I'(x) < 0$, pelo que podemos concluir que a função é estritamente decrescente no seu domínio.

Relativamente à existência de assintotas do gráfico de I , como a função está definida para $x \geq 0$ e é contínua (porque resulta de operações entre funções contínuas no domínio da função), só podem existir assintotas quando $x \rightarrow +\infty$

Averiguando a existência de uma assintota horizontal temos que:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} I(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (10e^{-0,05x}) = 10e^{-0,05 \times (+\infty)} = 10e^{-\infty} = 10 \times 0^+ = 0$$

E assim podemos concluir que a reta de equação $y = 0$ é uma assintota horizontal do gráfico de I e não existem outras assintotas.

Assim, a função ser estritamente decrescente, no contexto da situação descrita, significa que a um aumento do número de metros abaixo da superfície corresponde sempre uma diminuição da intensidade da luz solar, ou seja, a intensidade da luz diminui com um aumento da profundidade.

A reta de equação $y = 0$ ser assintota do gráfico de I , significa no contexto da situação descrita, que a intensidade da luz solar tende para zero com um aumento arbitrariamente grande da profundidade.

Exame – 2007, 1.ª Fase

77.

77.1. Começamos por determinar a expressão da derivada, para $x \in]0,1[$:

$$\left(\frac{x}{\ln x}\right)' = \frac{(x)' \ln x - x(\ln x)'}{\ln^2 x} = \frac{1 \times \ln x - x \left(\frac{1}{x}\right)}{\ln^2 x} = \frac{\ln x - 1}{\ln^2 x}$$

Calculando os zeros da derivada, no intervalo $]0,1[$, temos:

$$\frac{\ln x - 1}{\ln^2 x} = 0 \Leftrightarrow \ln x - 1 = 0 \wedge \ln^2 x \neq 0 \Leftrightarrow \ln x = 1 \wedge \ln x \neq 0 \Leftrightarrow x = e \wedge x \neq 1$$

Como $x \in]0,1[$ e $e > 1$, concluímos que $f'(x)$ não tem qualquer zero neste intervalo.

Assim, como no intervalo $]0,1[$, $\ln(x) < 0$ temos que $\ln x - 1 < 0$, e como $\ln^2(x) > 0$ (no mesmo intervalo), temos que:

$$f'(x) < 0, \forall x \in]0,1[$$

pelo que a função f é estritamente decrescente neste intervalo.



77.2. Determinado a expressão da derivada, para $x > 1$, temos:

$$(xe^{2-x})' = (x)'e^{2-x} + x(e^{2-x})' = e^{2-x} + x(2-x)'e^{2-x} = e^{2-x} + x(-1)e^{2-x} = e^{2-x} - xe^{2-x} = e^{2-x}(1-x)$$

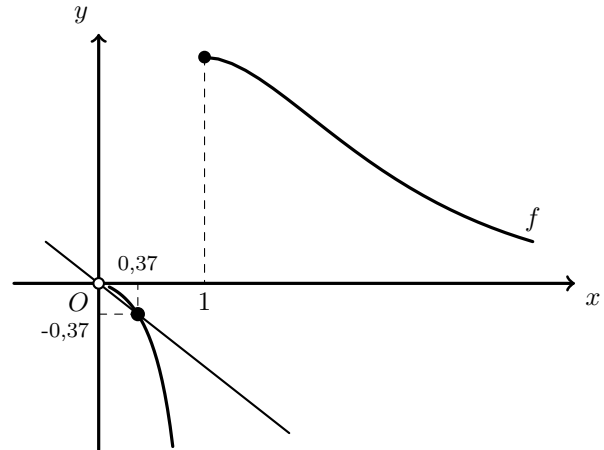
O declive da reta r pode ser calculado como:

$$m_r = f'(2) = e^{2-2}(1-2) = e^0(-1) = -1$$

Como a reta s é paralela à reta r , e tem a ordenada na origem igual a zero, a equação da reta s é: $y = -x$

Traçando a reta s e o gráfico da função f numa janela compatível com o domínio da função e que permita visualizar o ponto de interseção obtemos o gráfico reproduzido na figura ao lado.

Depois, recorrendo à função da calculadora que permite determinar valores aproximados para as coordenadas de um ponto de interseção dos gráficos de duas funções, encontramos as coordenadas do ponto, arredondadas às centésimas $(0,37, -0,37)$



Exame – 2006, Ép. especial

78. Como o ponto Q pertence ao gráfico de f e tem abcissa 2, podemos calcular a respetiva ordenada:

$$f(2) = 2 + 2\ln(2-1) = 2 + 2\ln 1 = 2 + 2 \times 0 = 2$$

A reta r é tangente ao gráfico de f no ponto $Q(2,2)$, contém este ponto e tem declive $m = f'(2)$. Assim determinando a expressão da derivada, temos:

$$\begin{aligned} f'(x) &= (x + x \ln(x-1))' = (x)' + (x)' \ln(x-1) + x(\ln(x-1))' = \\ &= 1 + 1 \times \ln(x-1) + x \times \frac{(x-1)'}{x-1} = 1 + \ln(x-1) + x \times \frac{1}{x-1} = 1 + \ln(x-1) + \frac{x}{x-1} \end{aligned}$$

Assim, calculando o valor do declive, vem:

$$m = f'(2) = 1 + \ln(2-1) + \frac{2}{2-1} = 1 + \ln 1 + \frac{2}{1} = 1 + 0 + 2 = 3$$

Substituindo as coordenadas do ponto de tangência e o declive em $y = mx + b$, podemos calcular o valor de b :

$$2 = 3(2) + b \Leftrightarrow 2 = 6 + b \Leftrightarrow 2 - 4 = b \Leftrightarrow -4 = b$$

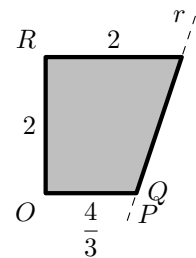
Pelo que a equação da reta r é: $y = 3x - 4$

Assim, a abcissa do ponto P pode ser calculada através da equação da reta r :

$$y = 3x - 4 \wedge y = 0 \Leftrightarrow 0 = 3x - 4 \Leftrightarrow 4 = 3x \Leftrightarrow \frac{4}{3} = x$$

Logo a área do trapezoido é:

$$A_{[OPQR]} = \frac{\overline{RQ} + \overline{OP}}{2} \times \overline{OR} = \frac{x_Q + x_P}{2} \times y_R = \frac{2 + \frac{4}{3}}{2} \times 2 = 2 + \frac{4}{3} = \frac{6}{3} + \frac{4}{3} = \frac{10}{3}$$



Exame – 2006, 2.ª fase



79. Começamos por determinar a expressão da derivada:

$$A'(x) = (xe^{-x})' = (x)'e^{-x} + x(e^{-x})' = 1 \times e^{-x} + x(-x)'e^{-x} = e^{-x} + x(-1)e^{-x} = e^{-x} - xe^{-x} = e^{-x}(1-x)$$

Calculando os zeros da derivada, temos:

$$A'(x) = 0 \Leftrightarrow e^{-x}(1-x) = 0 \Leftrightarrow \underbrace{e^{-x} = 0}_{\text{Eq Imp, } e^{-x} > 0} \vee 1-x = 0 \Leftrightarrow 1 = x$$

Estudando a variação do sinal da derivada e relacionando com a monotonia de h , temos:

x	0		1	$+\infty$
A'	n.d.	+	0	-
A	n.d.	\nearrow	Máx.	\searrow

Assim, podemos concluir que a função A :

- é crescente no intervalo $]0,1[$;
- é decrescente no intervalo $[1, +\infty[$;

Como a função A é crescente no intervalo $]0,1[$ e decrescente no intervalo $[1, +\infty[$, podemos concluir que a função só tem um extremo, e 1 é o maximizante.

Calculando o valor máximo que a área do triângulo pode assumir, temos:

$$A(1) = 1 \times e^{-1} = 1 \times \frac{1}{e} = \frac{1}{e}$$

Exame – 2006, 1.ª fase

80. Começamos por determinar a ordenada do ponto em que a função intersesta o eixo Oy :

$$f(0) = e^{a \times 0} + 1 = e^0 + 1 = 1 + 1 = 2$$

Como a reta r contém os pontos $A(-6,0)$ e $B(0,2)$, podemos calcular o seu declive:

$$m_r = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{2 - 0}{0 - (-6)} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

Ou seja, o declive da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa 0 é $\frac{1}{3}$, pelo que $f'(0) = \frac{1}{3}$.
Determinando a expressão da derivada temos:

$$f'(x) = (e^{ax} + 1)' = (ax)'e^{ax} + (1)' = ae^{ax} + 0 = ae^{ax}$$

$$\text{Logo } f'(0) = ae^{a \times 0} = a \times e^0 = a \times 1 = a$$

Igualando o valor da derivada ao declive da reta tangente, vem: $a = \frac{1}{3}$

Resposta: **Opção B**

Exame – 2005, Ép. especial (cód. 435)



81. Relacionando a monotonia de f com o sinal de f' , temos:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f		Máx.	
f'	$+$	0	$-$

Determinando a expressão da derivada de g :

$$g'(x) = ((f(x))^2)' = (f(x) \times f(x))' = f'(x) \times f(x) + f(x) \times f'(x) = 2f(x)f'(x)$$

Logo, como o máximo de f é -1 , sabemos que $f(x) < 0, \forall x \in \mathbb{R}$, pelo que podemos estudar a variação do sinal de g' , para relacionar com a monotonia de g :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f'	$+$	0	$-$
f	$-$	$-$	$-$
2	$+$	$+$	$+$
g'	$-$	0	$+$
g		min.	

Assim, como g é decrescente em $]-\infty, 0]$ e é crescente em $[0, +\infty[$, podemos afirmar que 0 é um minimizante de g .

Assim, calculando o valor do mínimo de g , temos:

$$g(0) = (f(0))^2 = (-1)^2 = 1$$

Exame – 2005, Ép. especial (cód. 435)



82. Começamos por determinar a expressão da derivada:

$$\begin{aligned} h'(x) &= (2x + 10 \ln(1 - 0,1x))' = (2x)' + (10 \ln(1 - 0,1x))' = 2 + 10 \times \frac{(1 - 0,1x)'}{1 - 0,1x} = 2 + \frac{10 \times (0 - 0,1)}{1 - 0,1x} = \\ &= 2 + \frac{-1}{1 - 0,1x} = \frac{2(1 - 0,1x)}{1 - 0,1x} + \frac{-1}{1 - 0,1x} = \frac{2 - 0,2x - 1}{1 - 0,1x} = \frac{1 - 0,2x}{1 - 0,1x} \end{aligned}$$

Calculando os zeros da derivada, temos:

$$\begin{aligned} h'(x) = 0 &\Leftrightarrow \frac{1 - 0,2x}{1 - 0,1x} = 0 \Leftrightarrow 1 - 0,2x = 0 \wedge 1 - 0,1x \neq 0 \Leftrightarrow 1 = 0,2x \wedge 1 \neq 0,1x \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{0,2} = x \wedge \frac{1}{0,1} \neq x \Leftrightarrow x = 5 \wedge x \neq 10 \Leftrightarrow x = 5 \end{aligned}$$

Estudando a variação do sinal da derivada e relacionando com a monotonia de h , temos:

x	0		5		a
h'	+	+	0	-	-
h	min	\rightarrow	Máx.	\rightarrow	min

Assim, podemos concluir que a função h :

- é crescente no intervalo $[0,5]$;
- é decrescente no intervalo $[5,a]$;

Como a função h é crescente no intervalo $[0,5]$ e decrescente no intervalo $[5,a]$, podemos concluir que a função só tem um máximo e 5 é o maximizante.

Calculando o valor máximo da função, e arredondando o resultado às décimas, temos:

$$h(5) = 2(5) + 10 \ln(1 - 0,1(5)) = 10 + 10 \ln(1 - 0,5) = 10 + 10 \ln(0,5) \approx 3,07$$

A maior altura que a bola atingiu, relativamente ao solo, depois de pontapeada foi de 3,07 metros.

Exame – 2005, 2.ª Fase (cód. 435)

83. A reta r é tangente ao gráfico de f no ponto $Q(1,3)$, contém este ponto e tem declive

$$m = f'(1) = 2 + (1) \ln(1) = 2 + 1 \times 0 = 2$$

Substituindo as coordenadas do ponto de tangência e o declive em $y = mx + b$, podemos calcular o valor de b :

$$3 = 2(1) + b \Leftrightarrow 3 = 2 + b \Leftrightarrow 3 - 2 = b \Leftrightarrow 1 =$$

Pelo que a equação da reta r é: $y = 2x + 1$

Substituindo $y = 0$ na equação da reta r , calculamos a abscissa do ponto em que a reta intersecta o eixo Ox , ou seja, a abscissa do ponto P :

$$0 = 2x + 1 \Leftrightarrow -1 = 2x \Leftrightarrow -\frac{1}{2} = x$$

Exame – 2005, 1.ª Fase (cód. 435)



84. Pela observação do gráfico podemos afirmar que:

- Como a função h é contínua em \mathbb{R} , $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} h(x)$, pelo que como $f(0) \in \mathbb{R}$, $\lim_{x \rightarrow 0} h(x) \neq +\infty$; logo a afirmação da opção (A) não é verdadeira.
- $\exists x \in \mathbb{R} : f(x) \neq -f(-x)$, ou seja a função h **não** é ímpar; pelo que a afirmação da opção (B) não é verdadeira.
- Como a h é decrescente em $[0,3]$, $\forall x \in]0,3[$, $h'(x) < 0$, ou seja, a afirmação da opção (D) não é verdadeira.

Nem o gráfico, nem a informação complementar do enunciado permitem decidir sobre o valor de $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x)$, pelo que a afirmação da opção (C) **pode** ser verdadeira.

Resposta: **Opção C**

Exame – 2004, Ép. especial (cód. 435)

85. Começamos por determinar a expressão da derivada, para $x > 0$:

$$\begin{aligned} \left(\frac{3x+2}{2x+2} \right)' &= \frac{(3x+2)'(2x+2) - (3x+2)(2x+2)'}{(2x+2)^2} = \frac{(3+0)(2x+2) - (3x+2)(2+0)}{(2x+2)^2} = \\ &= \frac{6x+6 - (6x+4)}{(2x+2)^2} = \frac{6x+6-6x-4}{(2x+2)^2} = \frac{2}{(2x+2)^2} \end{aligned}$$

Assim, $\forall x \in \mathbb{R}^+$, $f'(x) > 0$ (visto ser o quociente de funções estritamente positivas). Logo, f é estritamente crescente em \mathbb{R}^+

Exame – 2004, Ép. especial (cód. 435)

86. Pela observação do gráfico de f' , podemos verificar que $f'(x) < 0, \forall x \in [0,3]$, pelo que podemos afirmar que, f é decrescente em $[0,3]$.

Como $f(0) = 2$, e a função decresce em $[0,3]$, logo $f(3) < 2$.

Assim, temos que o valor da opção (A) é o único compatível com esta condição.

Resposta: **Opção A**

Exame – 2004, 2.ª Fase (cód. 435)

87. Começamos por determinar a expressão da derivada:

$$f'(x) = \left(\frac{e^x - 1}{x} \right)' = \frac{(e^x - 1)'x - (e^x - 1)(x)'}{x^2} = \frac{(e^x - 0) \times x - (e^x - 1) \times 1}{x^2} = \frac{xe^x - e^x + 1}{x^2}$$

Como o declive (m) da reta tangente ao gráfico de f em $x = 1$ é $f'(1)$, temos que:

$$m = f'(1) = \frac{1 \times e^1 - e^1 + 1}{1^2} = \frac{0 + 1}{1} = 1$$

Determinando a ordenada do ponto do gráfico da função que tem abcissa 1, temos:

$$f(1) = \frac{e^1 - 1}{1} = e - 1$$

Como o ponto de abcissa 1, também pertence à reta tangente, substituímos as coordenadas deste ponto e o declive da reta, em $y = mx + b$, para calcular o valor de b :

$$e - 1 = 1 \times 1 + b \Leftrightarrow e - 1 - 1 = b \Leftrightarrow e - 2 = b$$

Desta forma, a equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa 1, é:

$$y = 1 \times x + e - 2 \Leftrightarrow y = x + e - 2$$

Exame – 2004, 2.ª Fase (cód. 435)



88. Começamos por determinar a expressão da derivada:

$$\begin{aligned} f'(x) &= (1 + 3x^2e^{-x})' = 0 + (3x^2)'e^{-x} + 3x^2(e^{-x})' = 6xe^{-x} + 3x^2((-x)'e^{-x}) = \\ &= 6xe^{-x} + 3x^2(-e^{-x}) = 6xe^{-x} - 3x^2e^{-x} = e^{-x}(6x - 3x^2) \end{aligned}$$

Calculando os zeros da derivada, temos:

$$\begin{aligned} f'(x) = 0 &\Leftrightarrow e^{-x}(6x - 3x^2) = 0 \Leftrightarrow \underbrace{e^{-x} = 0}_{\text{Eq Imp, } e^{-x} > 0} \vee 6x - 3x^2 = 0 \Leftrightarrow 3x(2 - x) = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 3x = 0 \vee 2 - x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee 2 = x \end{aligned}$$

Estudando a variação do sinal da derivada e relacionando com a monotonia de f , temos:

x	$-\infty$	0		2	$+\infty$
f'		0	+	0	-
f		min		Máx.	

Assim, podemos concluir que $x = 0$ é o único minimizante de f , pelo que o mínimo da função é:

$$f(0) = 1 + 3(0)^2e^{-0} = 1 + 0 \times 1 = 1$$

Exame – 2004, 1.ª Fase (cód. 435)

89. Começamos por determinar a expressão da derivada:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\ln \left(x + \frac{1}{x} \right) \right)' = \frac{\left(x + \frac{1}{x} \right)'}{x + \frac{1}{x}} = \frac{(x)' + \left(\frac{1}{x} \right)'}{x + \frac{1}{x}} = \frac{1 + \frac{(1)' \times x - 1 \times (x)'}{x^2}}{x + \frac{1}{x}} = \\ &= \frac{\frac{x^2}{x^2} + \frac{0 \times x - 1 \times 1}{x^2}}{\frac{x^2 + 1}{x}} = \frac{\frac{x^2 + 0 - 1}{x^2}}{\frac{x^2 + 1}{x}} = \frac{(x^2 - 1)x}{(x^2 + 1)x^2} = \frac{x^2 - 1}{(x^2 + 1)x} = \frac{x^2 - 1}{x^3 + x} \end{aligned}$$

Calculando os zeros da derivada, temos:

$$\begin{aligned} f'(x) = 0 &\Leftrightarrow \frac{x^2 - 1}{x^3 + x} = 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 0 \wedge \underbrace{x^3 + x \neq 0}_{\text{PV, porque } x > 0} \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x = \pm\sqrt{1} \Leftrightarrow x = 1 \vee x = -1 \end{aligned}$$

Como $D_f = \mathbb{R}^+$, $x = 1$ é o único zero da derivada, e assim, estudando a variação do sinal da derivada e relacionando com a monotonia de f , temos:

x	0		1	$+\infty$
f'	n.d.	-	0	+
f	n.d.		min	

Assim podemos concluir que a função f :

- é decrescente no intervalo $]0,1[$;
- é crescente no intervalo $[1, +\infty[$;
- tem um único extremo, mais concretamente um mínimo cujo minimizante é 1

Exame – 2003, Prova para militares (cód. 435)



90. Como x_0 é uma raiz dupla do polinómio que define a função g , então $g(x) = (x - x_0)^2(ax^2 + bx + c)$, determinando a expressão da derivada, vem:

$$\begin{aligned} g'(x) &= ((x - x_0)^2(ax^2 + bx + c))' = ((x^2 - 2x_0x + x_0^2)(ax^2 + bx + c))' = \\ &= (x^2 - 2x_0x + x_0^2)'(ax^2 + bx + c) + (x^2 - 2x_0x + x_0^2)(ax^2 + bx + c)' = \\ &= (2x - 2x_0)(ax^2 + bx + c) + (x^2 - 2x_0x + x_0^2)(2ax + b) \end{aligned}$$

Como o declive (m) da reta tangente ao gráfico de g em $x = x_0$ é $g'(x_0)$, temos que:

$$\begin{aligned} m &= g'(x_0) = (2x_0 - 2x_0)(ax_0^2 + bx_0 + c) + (x_0^2 - 2x_0x_0 + x_0^2)(2ax_0 + b) = \\ &= 0(ax_0^2 + bx_0 + c) + (x_0^2 - 2x_0x_0)(2ax_0 + b) = 0 + 0(2ax_0 + b) = 0 \end{aligned}$$

Determinando a ordenada do ponto do gráfico da função que tem abcissa x_0 , temos:

$$g(x_0) = (x_0 - x_0)^2(ax_0^2 + bx_0 + c) = 0(ax_0^2 + bx_0 + c) = 0$$

Como o ponto de abcissa x_0 , também pertence à reta tangente, substituímos as coordenadas deste ponto e o declive da reta, em $y = mx + b$, para calcular o valor de b : $0 = 0 \times 0 + b \Leftrightarrow b = 0$

Desta forma, a equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa x_0 , é: $y = 0 \times x + 0 \Leftrightarrow y = 0$

Como $y = 0$ define o eixo Ox , temos o eixo Ox é tangente ao gráfico de g no ponto de abcissa x_0 .

Exame – 2003, Prova para militares (cód. 435)

91. Começamos por determinar a expressão da derivada:

$$\begin{aligned} h'(x) &= (15 - 4 \ln(-x^2 + 10x + 11))' = (15)' - 4(\ln(-x^2 + 10x + 11))' = 0 - 4 \left(\frac{(-x^2 + 10x + 11)'}{-x^2 + 10x + 11} \right) = \\ &= -4 \left(\frac{-2x + 10}{-x^2 + 10x + 11} \right) = \frac{8x - 40}{-x^2 + 10x + 11} \end{aligned}$$

Calculando os zeros da derivada, temos:

$$\begin{aligned} h'(x) = 0 &\Leftrightarrow \frac{8x - 40}{-x^2 + 10x + 11} = 0 \Leftrightarrow 8x - 40 = 0 \wedge -x^2 + 10x + 11 \neq 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x = \frac{40}{8} \wedge (x \neq -1 \vee x \neq 11) \Leftrightarrow x = 5 \end{aligned}$$

C.A.:

$$\begin{aligned} -x^2 + 10x + 11 &= 0 \\ x &= \frac{-10 \pm \sqrt{10^2 - 4(-1)(11)}}{2(-1)} \\ x &= -1 \vee x = 11 \end{aligned}$$

Assim, estudando a variação do sinal da derivada e relacionando com a monotonia de h , para $x \in [0,10]$, temos:

x	0		5		10
$8x - 40$	-	-	0	+	+
$-x^2 + 10x + 11$	+	+	+	+	+
h'	-	-	0	+	+
h	Máx	\searrow	min	\nearrow	Máx

Logo, como h é decrescente no intervalo $[0,5]$ e crescente no intervalo $[5,10]$; podemos concluir 5 é o minimizante da função h .

Como o ponto da rampa em que a altura é mínima se situa a 5 metros da parede A , e as duas paredes distam 10 metros, o ponto de altura mínima também se situa a 5 metros da parede B ($10 - 5 = 5$), ou seja é equidistante das duas paredes.

Exame – 2003, 1.ª fase - 2.ª chamada (cód. 435)



92. Como o nível de poluição do ar diminuiu enquanto o purificador esteve ligado e começou a aumentar quando o purificador foi desligado, sabemos que o purificador esteve ligado entre as zero horas e $t = t_0$, sendo t_0 o minimizante da função.

Assim, para determinar t_0 , começamos por determinar a expressão da derivada:

$$\begin{aligned} P'(t) &= \left(1 - \frac{\ln(t+1)}{t+1}\right)' = (1)' - \left(\frac{\ln(t+1)}{t+1}\right)' = 0 - \frac{(\ln(t+1))'(t+1) - (\ln(t+1))(t+1)'}{(t+1)^2} = \\ &= -\frac{\frac{(t+1)'}{t+1}(t+1) - (\ln(t+1))(t'+1)'}{(t+1)^2} = -\frac{(t+1)' - (\ln(t+1))(1+0)}{(t+1)^2} = \\ &= -\frac{1 - \ln(t+1)}{(t+1)^2} = \frac{-1 + \ln(t+1)}{(t+1)^2} = \frac{\ln(t+1) - 1}{(t+1)^2} \end{aligned}$$

Calculando os zeros da derivada, temos:

$$\begin{aligned} P'(t) = 0 &\Leftrightarrow \frac{\ln(t+1) - 1}{(t+1)^2} = 0 \Leftrightarrow \ln(t+1) - 1 = 0 \wedge \underbrace{(t+1)^2 \neq 0}_{\text{PV, porque } t \in [0,12]} \Leftrightarrow \ln(t+1) = 1 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \ln(t+1) = 1 \Leftrightarrow t+1 = e^1 \Leftrightarrow t = e - 1 \end{aligned}$$

Assim, estudando a variação do sinal da derivada e relacionando com a monotonia da função A , para $t \in [0,24]$, temos:

t	0		$e - 1$		24
P'	-	-	0	+	+
P	Máx	\searrow	min	\nearrow	Máx

Logo, como P é decrescente no intervalo $[0, e - 1]$ e crescente no intervalo $[e - 1, 24]$; podemos concluir $e - 1$ é o minimizante da função P .

Como $e - 1 \approx 1,718$, e 0,718 horas são $0,718 \approx 43,080$ minutos, podemos concluir que o purificador esteve ligado desde as zero horas até às 1,718 horas, ou seja esteve ligado durante 1 hora e 43 minutos.

Exame - 2003, 1.ª fase - 1.ª chamada (cód. 435)

93. Como qualquer função quadrática, f , é definida pela expressão $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $b \in \mathbb{R}$ e $c \in \mathbb{R}$, determinando a expressão da derivada, vem:

$$f'(x) = (ax^2 + bx + c)' = (ax^2)' + (bx)' + (c)' = 2ax + b + 0 = 2ax + b$$

Assim, o declive (m) da reta tangente ao gráfico de uma função quadrática num ponto $x = x_0$ é $f'(x_0)$, pelo que:

$$m = f'(x_0) = 2ax_0 + b$$

E para que a reta tangente seja paralela à bissetriz dos quadrantes ímpares, $m = 1$ (porque a bissetriz dos quadrantes ímpares é uma reta de declive 1, e os declives de retas paralelas são iguais), logo:

$$m = 1 \Leftrightarrow 2ax_0 + b = 1 \Leftrightarrow 2ax_0 = 1 - b \Leftrightarrow x_0 = \frac{1 - b}{2a}$$

Ou seja, sendo $f(x) = ax^2 + bx + c$ uma função quadrática, com $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $b \in \mathbb{R}$ e $c \in \mathbb{R}$, a reta tangente ao gráfico da função só tem declive 1 no ponto de abcissa $x = \frac{1 - b}{2a}$; ou seja, só existe um ponto do gráfico cuja reta tangente é paralela à bissetriz dos quadrantes ímpares.

Exame - 2003, 1.ª fase - 1.ª chamada (cód. 435)



94. Começamos por determinar a expressão da derivada:

$$(f - g)'(x) = (\ln x - (x^2 - 3))' = (\ln x)' - ((x^2 - 3))' = \frac{1}{x} - (2x - 0) = \frac{1}{x} - \frac{2x^2}{x} = \frac{1 - 2x^2}{x}$$

Como $D_f = \mathbb{R}^+$ e $D_g = \mathbb{R}$, temos que $D_{f-g} = D_f \cap D_g = \mathbb{R}^+ \cap \mathbb{R} = \mathbb{R}^+$, e assim, calculando os zeros da derivada, vem:

$$\begin{aligned} (f - g)'(x) = 0 &\Leftrightarrow \frac{1 - 2x^2}{x} = 0 \Leftrightarrow 1 - 2x^2 = 0 \wedge \underbrace{x \neq 0}_{\text{PV, porque } x > 0} \Leftrightarrow 1 = 2x^2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{2} = x^2 \Leftrightarrow \pm \sqrt{\frac{1}{2}} = x \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{2}}{2} \vee x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

Como $D_{f-g} = \mathbb{R}^+$, $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ é o único zero da derivada, e assim, estudando a variação do sinal da derivada e relacionando com a monotonia de $f - g$, temos:

x	0		$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$+\infty$
$(f - g)'$	n.d.	+	0	-
$(f - g)$	n.d.	\nearrow	Máx	\searrow

Assim podemos concluir que a função $f - g$:

- é crescente no intervalo $]0, \frac{\sqrt{2}}{2}[$;
- é decrescente no intervalo $[\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty[$.

Exame – 2002, Prova para militares (cód. 435)

95. Para determinar o minimizante, e o mínimo, da função, começamos por determinar a expressão da derivada:

$$\begin{aligned} A'(x) &= \left(\frac{2x^3 + 8}{x} \right)' = \frac{(2x^3 + 8)'x - (2x^3 + 8)(x)'}{x^2} = \frac{((2x^3)' + (8)')x - (2x^3 + 8) \times 1}{x^2} = \\ &= \frac{(6x^2 + 0)x - (2x^3 + 8)}{x^2} = \frac{6x^3 - 2x^3 - 8}{x^2} = \frac{4x^3 - 8}{x^2} \end{aligned}$$

Calculando os zeros da derivada, temos:

$$\begin{aligned} A'(x) = 0 &\Leftrightarrow \frac{4x^3 - 8}{x^2} = 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 8 = 0 \wedge x^2 \neq 0 \Leftrightarrow 4x^3 = 8 \wedge x \neq 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x^3 = \frac{8}{4} \wedge x \neq 0 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{2} \wedge x \neq 0 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{2} \end{aligned}$$

Assim, estudando a variação do sinal da derivada e relacionando com a monotonia da função A , para $x > 0$, temos:

x	0		$\sqrt[3]{2}$	$+\infty$
A'		-	0	+
A		\searrow	min	\nearrow

Logo, como a função A é decrescente no intervalo $]0, \sqrt[3]{2}[$ e crescente no intervalo $[\sqrt[3]{2}, +\infty[$; podemos concluir $\sqrt[3]{2}$ é o minimizante da função A , ou seja o valor de x , para o qual a área total da embalagem é mínima.

Exame – 2002, 2.^a fase (cód. 435)



96. Como o declive de uma reta tangente ao gráfico de uma função, é dado pelo valor da derivada para a abscissa do ponto de tangência, os declives das retas r e s são $f'(a)$ e $f'(b)$, respetivamente ($m_r = f'(a)$ e $m_s = f'(b)$).

Como a função f é crescente, a função derivada, f' , é sempre não negativa ($f'(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$).

Como retas perpendiculares têm declives com sinais contrários, as retas r e s não podem ser perpendiculares porque têm ambas declives positivos $\left((f'(a) \geq 0 \wedge f'(b) \geq 0) \Rightarrow f'(a) \neq -\frac{1}{f'(b)} \right)$.

Exame – 2002, 2.ª fase (cód. 435)

97. Como o declive de uma reta tangente ao gráfico de f , é dado pelo valor da derivada para a abscissa 1, temos que $m_r = f'(1)$.

Assim, determinando a expressão da derivada, vem:

$$f'(x) = (1 + 2 \ln x)' = (1)' + 2(\ln x)' = 0 + 2 \left(\frac{1}{x} \right) = \frac{2}{x}$$

Pelo que: $m_r = f'(1) = \frac{2}{1} = 2$

Resposta: **Opção B**

Exame – 2002, 1.ª fase - 1.ª chamada (cód. 435)

98. Calculando os zeros da derivada, temos:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$$

Estudando a variação do sinal da derivada e relacionando com a monotonia de f , vem:

x	$-\infty$	2	$+\infty$
f'		0	
f		min	

Logo, como f é decrescente no intervalo $] - \infty, 2]$ e crescente no intervalo $[2, + \infty[$; podemos concluir que f em um máximo para $x = 2$.

Resposta: **Opção C**

Exame – 2001, Ép. especial (cód. 435)



99. Como se pretende determinar a equação de uma reta tangente ao gráfico de f , que seja paralela à reta de equação $y = x - 2$, ou seja, uma reta com declive 1, pretende-se que o declive da reta tangente seja 1 (porque retas paralelas têm declives iguais).

Como o declive de uma reta tangente no ponto de abcissa a , é dado pelo valor da derivada para a , temos que $f'(a) = 1$.

Como a derivada de f é

$$f'(x) = (e^x)' = e^x$$

Logo, calculando o valor da abcissa, a , do ponto onde a reta tangente tem declive, vem:

$$f'(a) = 1 \Leftrightarrow e^a = 1 \Leftrightarrow a = \ln 1 \Leftrightarrow a = 0$$

Pelo que a ordenada do ponto de tangência é $f(0) = e^0 = 1$

Assim, substituindo o valor do declive e as coordenadas do ponto de tangência em $y = mx + b$, podemos determinar o valor de b :

$$1 = 0 \times 1 + b \Leftrightarrow 1 = b$$

Pelo que uma equação da reta paralela à reta r e tangente à curva C é:

$$y = 1 \times x + 1 \Leftrightarrow y = x + 1$$

Exame – 2001, Ép. especial

100. Como $f'(3) = 4$, logo, pela definição de derivada num ponto, $f'(3) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = 4$

Como $x^2 - 9 = x^2 - 3^2 = (x + 3)(x - 3)$, temos que:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - f(3)}{x^2 - 9} &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - f(3)}{(x + 3)(x - 3)} = \lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{1}{x + 3} \times \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{x + 3} \times \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = \frac{1}{6} \times 4 = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

Resposta: **Opção A**

Exame – 2001, 2.ª fase (cód. 435)

101. Para que a reta de equação $y = x$ seja tangente ao gráfico de uma certa função f , no ponto de abcissa 0, têm que se verificar as condições:

- $f(0) = 0$, ou seja, o ponto de coordenadas $(0,0)$ é o ponto de tangência pelo que deve pertencer ao gráfico de f (pelo que podemos excluir expressões das opções (C) e (D)).
- $f'(0) = 1$, ou seja o declive da reta tangente no ponto de abcissa 0, deve ser 1, porque é o declive da reta $y = x$ (pelo que podemos excluir a expressão da opção (B) porque $(x^2 + 2x)' = 2x + 2$ e substituindo x por 0, obtemos o valor 2 para o declive).

A expressão da opção (A) é a única que verifica cumulativamente as duas condições anteriores (substituindo x por 0, obtemos 0 para a ordenada do ponto de tangência e o valor da derivada $(x^2 + x)' = 2x + 1$ para $x = 0$ é 1).

Resposta: **Opção A**

Exame – 2001, 1.ª fase - 1.ª chamada (cód. 435)



102. Começamos por determinar a expressão da derivada de f :

$$f'(x) = (3x - 2 \ln x)' = (3x)' - 2(\ln x)' = 3 - 2 \left(\frac{1}{x} \right) = 3 - \frac{2}{x} = \frac{3x}{x} - \frac{2}{x} = \frac{3x - 2}{x}$$

Calculando os zeros da derivada, temos:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{3x - 2}{x} = 0 \Leftrightarrow 3x - 2 = 0 \wedge \underbrace{x \neq 0}_{\text{PV, porque } x > 0} \Leftrightarrow 3x = 2 \Leftrightarrow x = \frac{2}{3}$$

Assim, estudando a variação do sinal da derivada e relacionando com a monotonia da função f , temos:

x	0		$\frac{2}{3}$	$+\infty$
f'	n.d.	-	0	+
f	n.d.	\searrow	min	\nearrow

Logo, como f é decrescente no intervalo $]0, \frac{2}{3}]$ e crescente no intervalo $[\frac{2}{3}, +\infty[$; podemos concluir que a função tem um único mínimo, que é $f\left(\frac{2}{3}\right)$.

Exame – 2001, 1.ª fase - 1.ª chamada (cód. 435)

103.

103.1. Para estudar a monotonia da função f , começamos por determinar a expressão da derivada:

$$\begin{aligned} f'(t) &= \left(\frac{5}{1 + 124e^{-0,3t}} \right)' = \frac{(5)'(1 + 124e^{-0,3t}) - 5(1 + 124e^{-0,3t})'}{(1 + 124e^{-0,3t})^2} = \frac{0 - 5((1)' + 124(e^{-0,3t})')}{(1 + 124e^{-0,3t})^2} = \\ &= \frac{-5(0 + 124((-0,3t)'e^{-0,3t}))}{(1 + 124e^{-0,3t})^2} = \frac{-5(124(-0,3 \times e^{-0,3t}))}{(1 + 124e^{-0,3t})^2} = \frac{186e^{-0,3t}}{(1 + 124e^{-0,3t})^2} = \end{aligned}$$

Como $e^{-0,3t}$, $\forall t \geq 0$, então também $186e^{-0,3t} > 0$ e $(1 + 124e^{-0,3t})^2 > 0$, ou seja a derivada da função f é positiva para todos os valores de t ,

$$f'(t) > 0, \forall t > 0$$

o que significa que a função é crescente no seu domínio.

No contexto da situação descrita, isto significa que o número de pessoas que sabiam do acidente em Malmequeres de Baixo, foi sempre aumentando com o passar do tempo.

103.2. Como o segundo acidente foi testemunhado pelas mesmas pessoas, sabemos que $f(0) = g(0)$.

Assim, como

$$f(0) = \frac{5}{1 + 124e^{-0,3 \times 0}} = \frac{5}{1 + 124e^0} = \frac{5}{1 + 124} = \frac{5}{125}$$

Logo

$$g(0) = \frac{5}{125} \Leftrightarrow \frac{5}{1 + ae^{-b \times 0}} = \frac{5}{125} \Leftrightarrow \frac{5}{1 + a} = \frac{5}{125} \Leftrightarrow 1 + a = 125 \Leftrightarrow a = 125 - 1 \Leftrightarrow a = 124$$

Desta forma temos que:

$$g(t) = \frac{5}{1 + 124e^{-bt}}, t \geq 0$$

E uma vez que a notícia se propagou mais depressa, para cada valor de t , temos que:

$$\begin{aligned} g(t) > f(t) &\Leftrightarrow \frac{5}{1 + 124e^{-bt}} > \frac{5}{1 + 124e^{-0,3t}} \Leftrightarrow 1 + 124e^{-bt} > 1 + 124e^{-0,3t} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 124e^{-bt} > 124e^{-0,3t} \Leftrightarrow e^{-bt} > e^{-0,3t} \Leftrightarrow -bt < -0,3t \Leftrightarrow -b < -0,3 \Leftrightarrow b > 0,3 \end{aligned}$$

Assim podemos concluir que pelo facto de que, no instante $t = 0$, o mesmo número de pessoas sabiam dos dois acidentes, ou seja $f(0) = g(0)$, então o parâmetro a , da função g , tem o mesmo valor que o seu correspondente na função f , ou seja 124.

Como, no segundo acidente, mais pessoas sabiam da notícia, no mesmo instante, $g(t) > f(t)$, ($t > 0$), o que se verifica se o parâmetro b , da função g , for maior que o seu correspondente na função f .

Exame – 2001, Prova modelo (cód. 435)



104. Começamos por determinar a expressão da derivada:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{e^x}{x-1} \right)' = \frac{(e^x)'(x-1) - (e^x)(x-1)'}{(x-1)^2} = \frac{(e^x)(x-1) - (e^x)(1-0)}{(x-1)^2} = \\ &= \frac{(e^x)(x-1) - e^x}{(x-1)^2} = \frac{e^x((x-1)-1)}{(x-1)^2} = \frac{e^x(x-2)}{(x-1)^2} \end{aligned}$$

Calculando os zeros da derivada, temos:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{e^x(x-2)}{(x-1)^2} = 0 \Leftrightarrow e^x(x-2) = 0 \wedge \underbrace{(x-1)^2 \neq 0}_{\text{PV, } x \neq 1} \Leftrightarrow \underbrace{e^x = 0}_{\text{Imp., } e^x > 0} \vee x-2 = 0 \Leftrightarrow x = 2 = 0$$

Analisando a variação do sinal da derivada e relacionando com a monotonia de f , temos:

x	$-\infty$	1		2	$+\infty$
f'		n.d.	-	0	+
f		n.d.	\searrow	min	\nearrow

Assim, podemos concluir que a função f :

- é decrescente no intervalo $]-\infty, 1[$ e também no intervalo $]1, 2]$;
- é crescente no intervalo $[2, +\infty[$;
- tem um único extremo - um mínimo relativo (cujo minimizante é 2).

Exame - 2000, 1.ª fase - 2.ª chamada (cód. 435)

105. Da análise do gráfico de g , podemos inferir a monotonia da função, e depois relacionar esta informação com a variação do sinal da derivada:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f		n.d.	\nearrow
f'		-	+

Assim, a única representação gráfica coerente com esta informação é a representação da opção (A).

Resposta: **Opção A**

Exame - 2000, 1.ª fase - 1.ª chamada (cód. 435)

106. Começamos por determinar a expressão da derivada:

$$\begin{aligned} f'(x) &= (e^x(x^2+x))' = (e^x)'(x^2+x) + e^x(x^2+x)' = e^x(x^2+x) + e^x(2x+1) = \\ &= e^x((x^2+x) + (2x+1)) = e^x(x^2+3x+1) \end{aligned}$$

Como o declive (m) da reta tangente ao gráfico de f em $x = 0$ é $f'(0)$, temos que:

$$m = f'(0) = e^0(0^2 + 3(0) + 1) = 1 \times (0 + 0 + 1) = 1$$

Determinando a ordenada do ponto do gráfico da função que tem abcissa 0, temos:

$$f(0) = e^0(0^2 + 0) = 1 \times 0 = 0$$

Como o ponto de abcissa 0, também pertence à reta tangente, substituímos as coordenadas deste ponto e o declive da reta, em $y = mx + b$, para calcular o valor de b :

$$0 = 1 \times 0 + b \Leftrightarrow 0 = b$$

Desta forma, a equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa 0, é:

$$y = 1 \times x + 0 \Leftrightarrow y = x$$

Exame - 2000, 1.ª fase - 1.ª chamada (cód. 435)



107. Começamos por determinar a expressão da derivada:

$$\begin{aligned} c'(t) &= (t^2 e^{-0,6t})' = (t^2)' e^{-0,6t} + t^2 (e^{-0,6t})' = 2t e^{-0,6t} + t^2 (-0,6t)' e^{-0,6t} = \\ &= 2t e^{-0,6t} - 0,6t^2 e^{-0,6t} = e^{-0,6t} (2t - 0,6t^2) \end{aligned}$$

Calculando os zeros da derivada, temos:

$$\begin{aligned} c'(x) = 0 &\Leftrightarrow e^{-0,6t} (2t - 0,6t^2) = 0 \Leftrightarrow \underbrace{e^{-0,6t} = 0}_{\text{Imp.}, e^{-0,6t} > 0} \vee 2t - 0,6t^2 = 0 \Leftrightarrow t(2 - 0,6t) = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow t = 0 \vee 2 - 0,6t = 0 \Leftrightarrow t = 0 \vee 2 = 0,6t \Leftrightarrow t = 0 \vee \frac{2}{0,6} = t \Leftrightarrow t = 0 \vee \frac{10}{3} = t \end{aligned}$$

Analisando a variação do sinal da derivada e relacionando com a monotonia de c , temos:

t	0		$\frac{10}{3}$	$+\infty$
c'	0	+	0	-
c	min	\longrightarrow	Máx	\longrightarrow

Assim, como a função c é crescente no intervalo $[0, \frac{10}{3}]$ e decrescente no intervalo $[\frac{10}{3}, +\infty[$, podemos concluir que a concentração registou um máximo, quando $t = \frac{10}{3}$.

Assim, determinado o valor da concentração máxima de *AntiDor* no sangue de uma pessoa que o tenha tomado, e arredondando o resultado às décimas, temos:

$$c\left(\frac{10}{3}\right) = \left(\frac{10}{3}\right)^2 e^{-0,6 \times \frac{10}{3}} \approx 1,5$$

Exame – 2000, Prova modelo (cód. 435)

108. Como a função tem uma assíntota horizontal, quando $x \rightarrow +\infty$, o declive da reta tangente ao gráfico de h , num ponto de abcissa arbitrariamente grande aproxima-se de 0, porque é o declive da assíntota, ou seja, a variação da função tende para zero, porque o gráfico da função aproxima-se de uma reta (que tem variação nula).

Resposta: **Opção A**

Exame – 1999, Prova para militares (cód. 135)

109. Como o declive da reta tangente ao gráfico de uma função é dado pelo valor da derivada para a abcissa do ponto de tangência, temos que o declive da reta r , pode ser obtido calculado como $f'(a)$, e também pode ser calculado como $g'(b)$.

Assim, temos que

- $f'(x) = (e^x)' = e^x$, pelo que , $m_r = f'(a) = e^a$
- $g'(x) = (\ln x)' = \frac{1}{x}$, pelo que , $m_r = g'(b) = \frac{1}{b}$

$$\text{Logo: } f'(a) = g'(b) \Leftrightarrow e^a = \frac{1}{b}$$

Resposta: **Opção A**

Exame – 1999, 2.^a fase (cód. 135)



110. Determinando a expressão da derivada, vem:

$$\begin{aligned} v'(t) &= (-3 \ln(1 - 0,005t) - 0,01t)' = -3(\ln(1 - 0,005t))' - (0,01t)' = -3 \times \frac{(1 - 0,005t)'}{1 - 0,005t} - 0,01 = \\ &= -3 \times \frac{0 - 0,005}{1 - 0,005t} - 0,01 = \frac{0,015}{1 - 0,005t} - 0,01 = \frac{0,015}{1 - 0,005t} - \frac{0,01(1 - 0,005t)}{1 - 0,005t} = \\ &= \frac{0,015 - 0,01 + 0,00005t}{1 - 0,005t} = \frac{0,005 + 0,00005t}{1 - 0,005t} \end{aligned}$$

Assim, como

- $0,005 + 0,00005t > 0, \forall t \in [0,160]$
- $1 - 0,005t > 0 \Leftrightarrow 1 > 0,005t \Leftrightarrow \frac{1}{0,005} > t \Leftrightarrow 200 > t \Leftrightarrow t < 200$
logo também $1 - 0,005t > 0, \forall t \in [0,160]$

Pelo que $\frac{0,005 + 0,00005t}{1 - 0,005t} > 0, \forall t \in [0,160]$, isto é, $v'(t) > 0, \forall t \in [0,160]$

Assim, como a derivada é positiva, podemos afirmar que a função é crescente no intervalo $[0,160]$, ou seja, a velocidade máxima é atingida no extremo superior do intervalo de tempo; pelo que $v(160)$ é o máximo da função.

Calculando a velocidade máxima que o foguetão atinge, neste intervalo de tempo, e arredondado o resultado às décimas, temos:

$$v(160) = -3 \ln(1 - 0,005 \times 160) - 0,01 \times 160 \approx 3,2$$

Exame – 1999, 1.ª fase - 2.ª chamada (cód. 135)

111. Como o declive da reta tangente é igual ao valor da derivada para a abcissa do ponto de tangência, e a derivada de g é:

$$g'(x) = (\sqrt{3}x^2 - 1)' = \sqrt{3}(x^2)' - (1)' = \sqrt{3}(2x) - 0 = 2\sqrt{3}x$$

Logo o declive da reta r é: $m_r = g'(a) = 2\sqrt{3} \times a$

Como o declive de uma reta é igual à tangente da respetiva inclinação, temos que $m_r = \operatorname{tg} 60^\circ = \sqrt{3}$

Assim, igualando os dois valores do declive, temos que:

$$2\sqrt{3} \times a = \sqrt{3} \Leftrightarrow a = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} \Leftrightarrow a = \frac{1}{2}$$

Resposta: **Opção D**

Exame – 1999, 1.ª fase - 1.ª chamada (cód. 135)



112. Começamos por determinar a expressão da derivada:

$$\begin{aligned} C'(t) &= (2te^{-0,3t})' = (2t)'e^{-0,3t} + 2t(e^{-0,3t})' = 2e^{-0,3t} + 2t((-0,3t)'e^{-0,3t}) = \\ &= 2e^{-0,3t} + 2t(-0,3e^{-0,3t}) = 2e^{-0,3t} - 0,6te^{-0,3t} = e^{-0,3t}(2 - 0,6t) \end{aligned}$$

Calculando os zeros da derivada, temos:

$$C'(t) = 0 \Leftrightarrow e^{-0,3t}(2 - 0,6t) = 0 \Leftrightarrow \underbrace{e^{-0,3t} = 0}_{\text{Imp.}, e^{-0,3t} > 0} \vee 2 - 0,6t = 0 \Leftrightarrow 2 = 0,6t \Leftrightarrow \frac{2}{0,6} = t \Leftrightarrow \frac{10}{3} = t$$

Analisando a variação do sinal da derivada e relacionando com a monotonia de c , temos:

t	0		$\frac{10}{3}$	$+\infty$
C'	0	+	0	-
C	min	\nearrow	Máx	\searrow

Assim, como a função c é crescente no intervalo $[0, \frac{10}{3}]$ e decrescente no intervalo $[\frac{10}{3}, +\infty[$, podemos concluir que o instante em que a concentração de medicamento no sangue do doente foi máxima foi $t = \frac{10}{3}$.

Como $t = \frac{10}{3} = 3 + \frac{1}{3}$ e $\frac{1}{3}$ de hora são $\frac{1}{3} \times 60 = \frac{60}{3} = 20$ minutos, o instante em que a concentração de medicamento no sangue do doente foi máxima foi às 3 horas e 20 minutos após as 9 horas da manhã daquele dia, ou seja, às 12 horas e 20 minutos.

Exame – 1999, Prova modelo (cód. 135)

113. Como o declive da reta tangente é igual ao valor da derivada para a abscissa do ponto de tangência, e a derivada de g é:

$$g'(x) = (\ln x)' = \frac{1}{x}$$

E assim, o declive da reta tangente no ponto de abscissa a , é $m = g'(a) = \frac{1}{a}$.

Como retas paralelas têm declives iguais, e o declive da bissetriz dos quadrantes ímpares é 1, pretende-se que o declive da reta tangente seja 1, ou seja, $m = 1$

Assim, igualando os dois valores do declive, temos que:

$$\frac{1}{a} = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{1} = a \Leftrightarrow 1 = a$$

Resposta: **Opção B**

Exame – 1998, Prova para militares (cód. 135)

114. Como o declive (m) da reta tangente ao gráfico de f em $x = 1$ é $f'(1)$, temos que:

$$m = f'(1) = \frac{1 + \ln 1}{1} = 1 + 0 = 1$$

Como o ponto de abscissa 1 (e ordenada 0), também pertence à reta tangente, substituímos as coordenadas deste ponto e o declive da reta, em $y = mx + b$, para calcular o valor de b :

$$0 = 1 \times 1 + b \Leftrightarrow 0 = 1 + b \Leftrightarrow -1 = b$$

Desta forma, a equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abscissa 0, é:

$$y = 1 \times x + (-1) \Leftrightarrow y = x - 1$$

Exame – 1998, 1.ª fase - 2.ª chamada (cód. 135)



115. Da análise do gráfico de g , podemos inferir a monotonia da função, e depois relacionar esta informação com a variação do sinal da derivada:

x		-2		2	
h	→	n.d.	↘	n.d.	↗
h'	0	n.d.	-	n.d.	+

Assim, a única representação gráfica coerente com esta informação é a representação da opção (C).

Resposta: **Opção C**

Exame – 1998, Prova modelo (cód. 135)

116. A distância ao primeiro poste do ponto do fio mais próximo do solo, corresponde ao valor do minimizante da função f .

Assim, determinando a expressão da derivada de f , vem:

$$\begin{aligned} f'(x) &= (5(e^{1-0,1x} + e^{0,1x-1}))' = 5(e^{1-0,1x} + e^{0,1x-1})' = 5((e^{1-0,1x})' + (e^{0,1x-1})') = \\ &= 5((1-0,1x)'e^{1-0,1x} + (0,1x-1)'e^{0,1x-1}) = 5(-0,1e^{1-0,1x} + 0,1e^{0,1x-1}) \end{aligned}$$

Calculando os zeros da derivada, temos:

$$\begin{aligned} f'(x) = 0 &\Leftrightarrow 5(-0,1e^{1-0,1x} + 0,1e^{0,1x-1}) = 0 \Leftrightarrow -0,1e^{1-0,1x} + 0,1e^{0,1x-1} = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 0,1e^{0,1x-1} = 0,1e^{1-0,1x} \Leftrightarrow e^{0,1x-1} = e^{1-0,1x} \Leftrightarrow 0,1x-1 = 1-0,1x \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 0,1x + 0,1x = 1+1 \Leftrightarrow 0,2x = 2 \Leftrightarrow x = \frac{2}{0,2} \Leftrightarrow x = 10 \end{aligned}$$

Analisando a variação do sinal da derivada e relacionando com a monotonia de f , temos:

x	0		10		30
f'	-	-	0	+	+
f	Máx	↘	min	↗	Máx

Assim, como f é decrescente no intervalo $[0,10]$ e crescente no intervalo $[10,30]$, podemos concluir que a distância ao primeiro poste do ponto do fio mais próximo do solo é de 10 metros.

Exame – 1998, Prova modelo (cód. 135)

117. Como a reta t contém os pontos de coordenadas $(0,0)$ e $(6,3)$, podemos calcular o seu declive:

$$m_t = \frac{3-0}{6-0} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

Assim, como o declive (m) da reta tangente ao gráfico de h em $x = a$ é $h'(a)$, temos que

$$h'(a) = m_t = \frac{1}{2}$$

Resposta: **Opção D**

Exame – 1997, 1.ª fase - 1.ª chamada (cód. 135)

