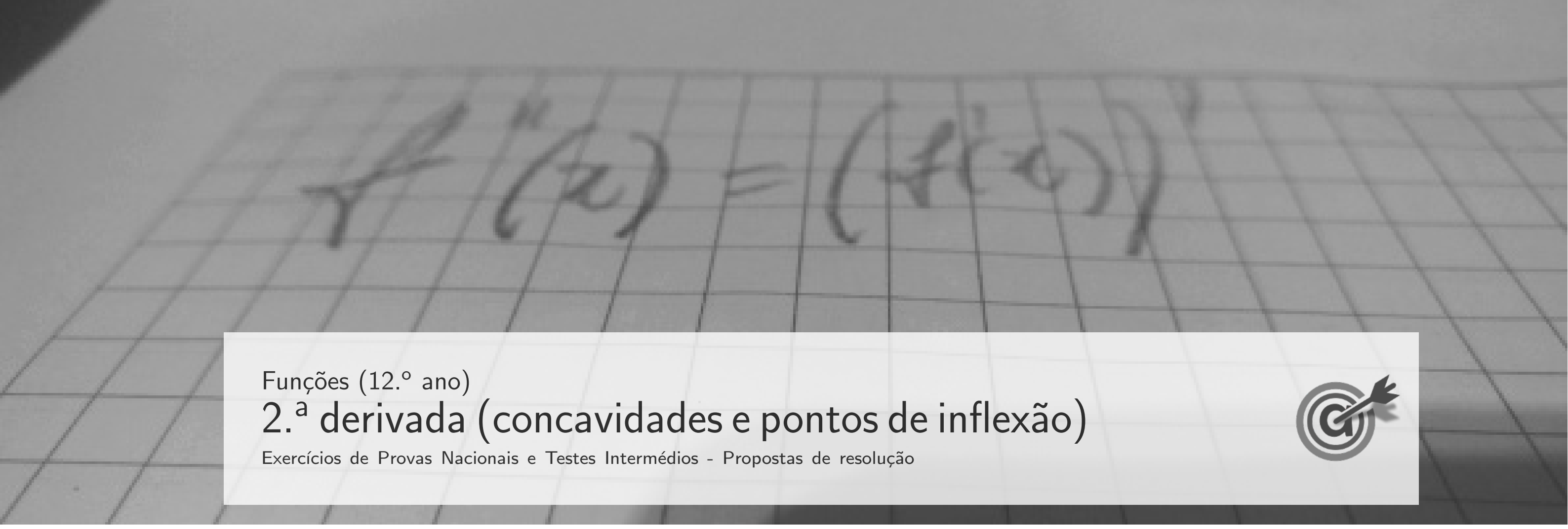


Funções (12.º ano)

2.ª derivada (concavidades e pontos de inflexão)

Exercícios de Provas Nacionais e Testes Intermédios - Propostas de resolução

1. Temos que, como f' é estritamente crescente no intervalo $]0, +\infty[$, então a respetiva função derivada, $(f')'$, ou seja, f'', é positiva no mesmo intervalo. Assim temos que $f''(x) > 0, x > 0$, ou seja em $\mathbb{R}^+$ o gráfico da função f tem a concavidade voltada para cima, pelo que a afirmação é falsa.

Exame – 2024, 2.ª Fase (adaptado)

2. Para estudar o sentido o sentido das concavidades e a existência de pontos de inflexão, começamos por determinar a expressão da segunda derivada:

$$f''(x) = \left(f'(x)\right)' = (-2x)'\,e^{1-x^2} + (-2x)\left(e^{1-x^2}\right)' = -2e^{1-x^2} - 2x\left(1-x^2\right)' e^{1-x^2} =$$

$$= -2e^{1-x^2} - 2x\,(0-2x)\,e^{1-x^2} = -2e^{1-x^2} + 4x^2e^{1-x^2} = e^{1-x^2}\left(-2+4x^2\right)$$

Determinando os zeros da segunda derivada, vem:

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow e^{1-x^2}\left(-2+4x^2\right) = 0 \Leftrightarrow \underbrace{e^{1-x^2} = 0}_{\text{Cond. impossível}} \vee -2+4x^2 = 0 \Leftrightarrow 4x^2 = 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 = \frac{2}{4} \Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow x = -\frac{1}{\sqrt{2}} \vee x = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \vee x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Assim, estudando a variação de sinal de f'' e relacionando com o sentido das concavidades do gráfico de f, vem:

x	$-\infty$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$		$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$+\infty$
e^{1-x^2}	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$-2+4x^2$	$+$	0	$-$	0	$+$
f''	$+$	0	$-$	0	$+$
f	$\smile$	Pt. I.	$\frown$	Pt. I.	$\smile$

Logo, podemos concluir que o gráfico de f:

- tem a concavidade voltada para baixo no intervalo $\left[-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$
- tem a concavidade voltada para cima no intervalo $\left]-\infty, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$ e no intervalo $\left[\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty\right[$
- tem dois ponto de inflexão, cujas abcissas são $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ e $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Exame – 2023, 1.ª Fase

3. Temos que:
   - como $\lim\limits_{x \to +\infty} \big(f(x) - 2x + 1\big) = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} \big(f(x) - (2x-1)\big) = 0$, a reta de equação $y = 2x - 1$ é uma assíntota do gráfico de f, quando x tende para $+\infty$, pelo que não existe uma assíntota horizontal do gráfico de f, quando x tende para $+\infty$, ou seja, a afirmação I. é falsa;
   - como a reta de equação $y = 2x - 1$ é tangente ao gráfico de g no ponto de abcissa 1, então o ponto da reta de coordenadas $(1{,}2(1)-1) = (1{,}1)$ também é um ponto do gráfico de g, ou seja, $g(1) = 1$; e como a função g é diferenciável, também é contínua, em particular no ponto de abcissa 1, pelo que $\lim\limits_{x \to 1} g(x) = g(1) = 1$, logo, a afirmação II. é falsa;
   - como o gráfico de f tem a concavidade voltada para cima, $f''(x) > 0$ e como o gráfico de g tem a concavidade voltada para baixo, $g''(x) < 0$, pelo que $f''(x) > g''(x)$ para $x > 0$, pelo que a afirmação III. também é falsa.

Exame – 2023, 1.ª Fase

4. Para estudar o sentido o sentido das concavidades e a existência de pontos de inflexão, começamos por determinar a expressão da segunda derivada:

$$g''(x) = \big(g'(x)\big)' = \left(\frac{x - e^{3x}}{x}\right)' = \frac{(x - e^{3x})'(x) - (x - e^{3x})(x)'}{x^2} = \frac{\big((x)' - (3x)'e^{3x}\big)(x) - (x - e^{3x}) \times 1}{x^2} =$$

$$= \frac{\big(1 - 3e^{3x}\big)(x) - (x - e^{3x})}{x^2} = \frac{x - 3xe^{3x} - x + e^{3x}}{x^2} = \frac{-3xe^{3x} + e^{3x}}{x^2} = \frac{e^{3x}(-3x+1)}{x^2}$$

Determinando os zeros da segunda derivada, vem:

$$g''(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{e^{3x}(-3x+1)}{x^2} = 0 \Leftrightarrow e^{3x}(-3x+1) = 0 \wedge \underbrace{x^2 \neq 0}_{\text{PV, } x>0} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{e^{3x} = 0}_{\text{Cond. impossível}} \vee -3x + 1 = 0 \Leftrightarrow 1 = 3x \Leftrightarrow \frac{1}{3} = x$$

Assim, estudando a variação de sinal de g'' e relacionando com o sentido das concavidades do gráfico de g, vem:

x	0		$\frac{1}{3}$	$+\infty$
e^{3x}	n.d.	+	+	+
$-3x+1$	n.d.	+	0	−
x^2	n.d.	+	+	+
g''	n.d.	+	0	−
g	n.d.	$\smile$	Pt. I.	$\frown$

Logo, podemos concluir que o gráfico de g:
- tem a concavidade voltada para baixo no intervalo $\left[\frac{1}{3}, +\infty\right[$
- tem a concavidade voltada para cima no intervalo $\left]0, \frac{1}{3}\right]$
- tem um único ponto de inflexão, cuja abcissa é $x = \frac{1}{3}$.

Exame – 2022, Ép. especial

5. Para estudar o sentido o sentido das concavidades e a existência de pontos de inflexão, começamos por determinar a expressão da segunda derivada no intervalo $]1,+\infty[$:

$$g'(x) = \left(x^2 - 10 + 8\ln x\right)' = \left(x^2\right)' - (10)' + (8\ln x)' = 2x - 0 + 8\,(\ln x)' = 2x + 8 \times \frac{1}{x} = 2x + \frac{8}{x}$$

$$g''(x) = (f'(x))' = \left(2x + \frac{8}{x}\right)' = (2x)' + \left(\frac{8}{x}\right)' = 2 + \frac{(8)' \times x - 8(x)'}{x^2} = 2 + \frac{0-8}{x^2} = 2 - \frac{8}{x^2}$$

Determinando os zeros da segunda derivada, vem:

$$g''(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; 2 - \frac{8}{x^2} = 0 \;\Leftrightarrow\; 2 = \frac{8}{x^2} \underset{x>1}{\Leftrightarrow} 2x^2 = 8 \;\Leftrightarrow\; x^2 = 4 \;\Leftrightarrow\; x = \pm\sqrt{4} \underset{x>1}{\Rightarrow} x = 2$$

Assim, estudando a variação de sinal de g'' e relacionando com o sentido das concavidades do gráfico de g, vem:

x	1		2	$+\infty$
f''	n.d.	$-$	0	$+$
f	n.d.	$\frown$	Pt. I.	$\smile$

Logo, podemos concluir que o gráfico de g:

- tem a concavidade voltada para baixo no intervalo $]1,2]$
- tem a concavidade voltada para cima no intervalo $[2,+\infty[$
- tem um único ponto de inflexão no intervalo definido, cuja abcissa é $x = 2$.

Exame – 2020, Ép. especial

6. Para estudar o sentido o sentido das concavidades e a existência de pontos de inflexão, começamos por determinar a expressão da segunda derivada:

$$f''(x) = \left(f'(x)\right)' = \left(\frac{2+\ln x}{x}\right)' = \frac{(2+\ln x)'(x) - (2+\ln x)(x)'}{x^2} =$$

$$= \frac{\left((2)' + \dfrac{(x)'}{x}\right) \times x - (2+\ln x) \times 1}{x^2} = \frac{\left(0 + \dfrac{1}{x}\right) \times x - 2 - \ln x}{x^2} = \frac{1-2-\ln x}{x^2} = \frac{-1-\ln x}{x^2}$$

Determinando os zeros da segunda derivada, vem:

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{-1-\ln x}{x^2} = 0 \Leftrightarrow -1-\ln x = 0 \wedge \underbrace{x^2 \neq 0}_{\text{PV, } x>0} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -1 = \ln x \Leftrightarrow x = e^{-1} \Leftrightarrow x = \frac{1}{e}$$

Assim, estudando a variação de sinal de f'' e relacionando com o sentido das concavidades do gráfico de f, vem:

x	0		$\frac{1}{e}$		$+\infty$
$-1-\ln x$	n.d.	$+$	0	$-$	
x^2	n.d.	$+$	$+$	$+$	
f''	n.d.	$+$	0	$-$	
f	n.d.	$\smile$	Pt. I.	$\frown$	

Logo, podemos concluir que o gráfico de f:

- tem a concavidade voltada para baixo no intervalo $\left[\frac{1}{e}, +\infty\right[$
- tem a concavidade voltada para cima no intervalo $\left]0, \frac{1}{e}\right]$
- tem um único ponto de inflexão, cuja abcissa é $x = \frac{1}{e}$

Exame – 2020, 2.ª fase

7. Para estudar o sentido das concavidades do gráfico e a existência de pontos de inflexão, começamos por determinar a expressão da primeira e depois da segunda derivadas:

   - $f'(x) = \left(x^3 + 6\ln x\right)' = \left(x^3\right)' + \left(6\ln x\right)' = 3x^2 + 6\left(\ln x\right)' = 3x^2 + 6 \times \dfrac{1}{x} = 3x^2 + \dfrac{6}{x}$
   - $f''(x) = \left(f'(x)\right)' = \left(3x^2 + \dfrac{6}{x}\right)' = \left(3x^2\right)' + \left(\dfrac{6}{x}\right)' = 2 \times 3x + \dfrac{(6)' \times x - 6 \times (x)'}{x^2} =$

$$= 6x + \frac{0 \times x - 6 \times 1}{x^2} = 6x - \frac{6}{x^2}$$

Como os pontos de inflexão são zeros da segunda derivada, vamos determiná-los, no domínio da função, ou seja, para $x \in \mathbb{R}^+$:

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 6x - \frac{6}{x^2} = 0 \Leftrightarrow \frac{6x}{1}_{\,(x^2)} - \frac{6}{x^2} = 0 \Leftrightarrow \frac{6x^3}{x^2} - \frac{6}{x^2} = 0 \Leftrightarrow \frac{6x^3 - 6}{x^2} = 0 \underset{x>0}{\Leftrightarrow} 6x^3 - 6 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 6x^3 = 6 \Leftrightarrow x^3 = \frac{6}{6} \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{1} \Leftrightarrow x = 1$$

Assim, estudando o sinal da segunda derivada para relacionar com o sentido das concavidades, vem:

x	0		1	$+\infty$
$6x^3 - 6$	n.d.	$-$	0	$+$
x^2	n.d.	$+$	$+$	$+$
f''	n.d.	$-$	0	$+$
f	n.d.	$\frown$	Pt. I.	$\smile$

Calculando a ordenada do ponto de inflexão, temos que:

$$f(1) = 1^3 + 6\ln(1) = 1 + 6 \times 0 = 1$$

Logo, podemos concluir que o gráfico de f:

- tem a concavidade voltada para baixo no intervalo $]0,1]$
- tem a concavidade voltada para cima no intervalo $[1, +\infty[$
- tem um único ponto de inflexão cujas coordenadas são $(1,1)$

Exame – 2018, Ép. especial

8. Pela observação do gráfico e considerando os elementos do enunciado, podemos identificar os intervalos em que a função é decrescente e o intervalo em que é crescente e relacionar com o sinal da primeira derivada função.
Da mesma forma, podemos identificar os intervalos em que a função tem concavidades diferentes e relacionar com o sinal da segunda derivada.
Organizando as informações anteriores e estudando o sinal do produto $f'(x) \times f''(x)$, na mesma tabela, vem:

x	$-\infty$	-2		0		2	$+\infty$
f	$\nearrow$	Máx.		$\searrow$		Min.	$\nearrow$
f'	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
f		$\frown$		Pt. I.		$\smile$	
f''	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$f' \times f''$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

E assim, temos que o conjunto solução da condição $f'(x) \times f''(x) \geq 0$, é $[-2,0] \cup [2, +\infty[$

Resposta: **Opção A**

Exame – 2017, Ép. especial

9. Como a abcissa do ponto de inflexão é o zero da segunda derivada da função, começamos por determinar a expressão da segunda derivada, para $x > 1$:

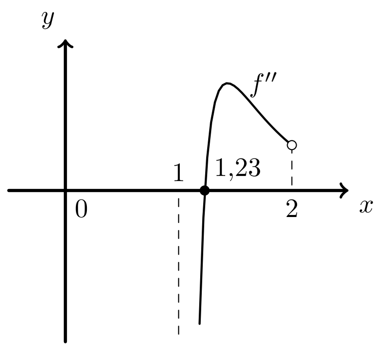
$$f'(x) = \left(e^{-2x+4} + \ln(x-1)\right)' = \left(e^{-2x+4}\right)' + (\ln(x-1))' =$$

$$= (-2x+4)'e^{-2x+4} + \frac{(x-1)'}{x-1} = -2e^{-2x+4} + \frac{1}{x-1}$$

$$f''(x) = (f'(x))' = \left(-2e^{-2x+4} + \frac{1}{x-1}\right)' = \left(-2e^{-2x+4}\right)' + \left(\frac{1}{x-1}\right)' =$$

$$= -2\left(e^{-2x+4}\right)' + \frac{(1)'(x-1) - 1 \times (x-1)'}{(x-1)^2} = -2 \times (-2x+4)'e^{-2x+4} + \frac{0 \times (x-1) - 1 \times 1}{(x-1)^2} =$$

$$= -2 \times (-2)e^{-2x+4} + \frac{-1}{(x-1)^2} = 4e^{-2x+4} - \frac{1}{(x-1)^2}$$



Representando na calculadora gráfica o gráfico da função f'', para valores de $x \in]1,2[$, (reproduzido na figura ao lado) e usando a função da calculadora para determinar valores aproximados dos zeros de uma função determinamos o valor (aproximado às centésimas) do zero da função f'' (x_0), ou seja, a abcissa do ponto de inflexão do gráfico da função f: $x_0 \approx 1{,}23$

Exame – 2017, Ép. especial

10. Relacionando o sinal da segunda derivada de f com o sentido das concavidades do gráfico, temos:

x	$-\infty$	-10		0		10	$+\infty$
f''	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
f	$\frown$	Pt. I.	$\smile$	Pt. I.	$\frown$	Pt. I.	$\smile$

Como o gráfico de $f(x-5)$ é uma translação horizontal do gráfico de f associada ao vetor de coordenadas $(5,0)$, e o gráfico de $-f(x-5)$ é simétrico relativamente ao eixo das abcissas do gráfico de $f(x-5)$, podemos relacionar o sinal de $f''(x-5)$ com o sinal da segunda derivada de $-f''(x-5)$:

x	$-\infty$	-5		5		15	$+\infty$
$f''(x-5)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$-f''(x-5)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
g	$\smile$	Pt. I.	$\frown$	Pt. I.	$\smile$	Pt. I.	$\frown$

Logo, podemos concluir que o gráfico de g tem a concavidade voltada para baixo no intervalo $[-5,5]$ e também no intervalo $[15,+\infty[$

Resposta: **Opção C**

Exame – 2017, 2.ª fase

11. Por observação do gráfico de f, podemos observar o sentido das concavidades e relacionar com o sinal da segunda derivada, f'' (porque o único ponto de inflexão do gráfico de f tem abcissa zero).

x		0	
f	$\frown$	Pt. I.	$\smile$
f''	$-$	0	$+$

Assim, temos que:

- Como $f''(1) > 0$ e $f''(2) > 0$, então $f''(-2) + f''(-1) > 0$
- Como $f''(-2) < 0$ e $f''(-1) < 0$, então $f''(-2) + f''(-1) < 0$
- Como $f''(-2) < 0$ e $f''(-1) < 0$, então $f''(-2) \times f''(-1) > 0$
- Como $f''(1) > 0$ e $f''(2) > 0$, então $f''(1) \times f''(2) > 0$

Resposta: **Opção D**

Exame – 2017, 1.ª fase

12. Para estudar o sentido das concavidades do gráfico e a existência de pontos de inflexão, começamos por determinar a expressão da segunda derivada:

$$f''(x) = \left(f'(x)\right)' = \left(e^x \left(x^2+x+1\right)\right)' = \left(e^x\right)' \left(x^2+x+1\right) + e^x \left(x^2+x+1\right)' =$$

$$= e^x \left(x^2+x+1\right) + e^x \left(2x+1\right) = e^x \left(x^2+x+1+2x+1\right) = e^x \left(x^2+3x+2\right)$$

Como os pontos de inflexão são zeros da segunda derivada, vamos determiná-los:

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow e^x \left(x^2+3x+2\right) = 0 \Leftrightarrow \underbrace{e^x = 0}_{\text{Eq. Imp.}} \vee x^2+3x+2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4(1)(2)}}{2} \Leftrightarrow x = -2 \vee x = -1$$

Assim, estudando o sinal da segunda derivada para relacionar com o sentido das concavidades, vem:

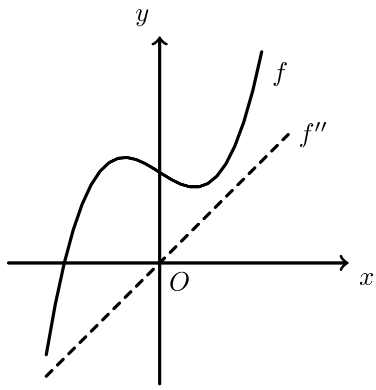
x	$-\infty$	-2		-1	$+\infty$
e^x	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
x^2+3x+2	$+$	0	$-$	0	$+$
f''	$+$	0	$-$	0	$+$
f	$\smile$	Pt. I.	$\frown$	Pt. I.	$\smile$

Logo, podemos concluir que o gráfico de f:

- tem a concavidade voltada para baixo no intervalo $[-2,1]$
- tem a concavidade voltada para cima no intervalo $]-\infty,-2]$ e no intervalo $[-1,+\infty[$
- tem dois pontos de inflexão cujas abcissas são, respetivamente, -2 e -1

Exame – 2016, 1.ª fase

13. Por observação do gráfico de f, podemos observar o sentido das concavidades e relacionar com o sinal da segunda derivada, f'' (admitindo que o ponto de inflexão tem abcissa zero).



x		0	
f	$\frown$	Pt. I.	$\smile$
f''	$-$	0	$+$

O único gráfico compatível com o sentido das concavidades do gráfico identificadas é o gráfico da opção (C).

Resposta: **Opção C**

Exame – 2015, Ép. especial

14. O gráfico **A**, não é o gráfico da função f, porque tem um ponto em que a função não é contínua, logo, nesse ponto, a função não tem derivada e sabemos que f tem derivada finita em todos os pontos do seu domínio.

O gráfico **B**, não é o gráfico da função f, porque tem a concavidade voltada para cima para alguns valores de $x \in]-\infty,0[$, ou seja, a segunda derivada é positiva para alguns valores de $x \in]-\infty,0[$, e sabemos que $f''(x) < 0$, para qualquer $x \in]-\infty,0[$

O gráfico **C**, não é o gráfico da função f, porque a reta tangente no ponto de abcissa zero tem declive negativo (a função é decrescente numa vizinhança de zero), ou seja a primeira derivada é negativa em $x = 0$, e sabemos que $f'(0) > 0$

Exame – 2015, 2.ª fase

15. Para determinar f'' em $\left]\frac{1}{2},+\infty\right[$, começamos por determinar f' em $\left]\frac{1}{2},+\infty\right[$:

$$f'(x) = \big((x+1)\ln x\big)' = (x+1)'\ln x + (x+1)(\ln x)' = (1+0)(\ln x) + (x+1)\left(\frac{1}{x}\right) = \ln x + \frac{x+1}{x}$$

Assim, vem que

$$f''(x) = (f'(x))' = \left(\ln x + \frac{x+1}{x}\right)' = \left(\ln x + \frac{x}{x} + \frac{1}{x}\right)' = \left(\ln x + 1 + \frac{1}{x}\right)' = (\ln x)' + (1)' + \left(\frac{1}{x}\right)' =$$

$$= \frac{1}{x} + 0 + \frac{(1)'(x) - 1\times(x)'}{x^2} = \frac{1}{x} + \frac{0 - 1\times 1}{x^2} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} = \frac{x}{x^2} - \frac{1}{x^2} = \frac{x-1}{x^2}$$

Para determinar o sentido das concavidades em $\left]\frac{1}{2},+\infty\right[$, vamos estudar o sinal de f'' em $\left]\frac{1}{2},+\infty\right[$:

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x-1}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x - 1 = 0 \land \underbrace{x^2 \neq 0}_{\text{P.V, pq.}x>\frac{1}{2}} \Leftrightarrow x = 1$$

Assim, estudando a variação de sinal de f'' e relacionando com o sentido das concavidades do gráfico de f, vem:

x	$\frac{1}{2}$		1	$+\infty$
$x-1$		$-$	0	$+$
x^2		$+$	$+$	$+$
f''	n.d.	$-$	0	$+$
f	n.d.	$\frown$	Pt. I.	$\smile$

Calculando a ordenada do ponto de inflexão, temos:

$$f(1) = (1+1)\ln 1 = 2\times 0 = 0$$

Logo, podemos concluir que o gráfico de f:

- tem a concavidade voltada para baixo no intervalo $\left]\frac{1}{2},1\right]$
- tem a concavidade voltada para cima no intervalo $[1,+\infty[$
- tem um único ponto de inflexão de coordenadas $(1,0)$

Exame – 2015, 1.ª fase

16. Para que o gráfico de uma função tenha exatamente dois pontos de inflexão, a segunda derivada deve ter exatamente dois zeros, associados a uma mudança de sinal.
Nas opções (B) e (C) existem 4 e 3 zeros associados a uma mudança de sinal, respetivamente, ou seja, se cada um destes for o gráfico da segunda derivada, o gráfico da função associada terá, respetivamente quatro e três pontos de inflexão.
Na opção (D) existem 2 zeros, mas só um deles está associado a uma mudança de sinal, ou seja, se este for o gráfico da segunda derivada, o gráfico da função associada terá um único ponto de inflexão.
Na opção (A) existem 2 zeros, ambos associados a uma mudança de sinal, pelo que podemos concluir que este é o gráfico da segunda derivada, em que o gráfico da função associada terá exatamente dois pontos de inflexão.

Resposta: **Opção A**

Exame – 2014, Ép. especial

17. Relativamente à afirmação **(I)**, podemos estudar a variação do sinal da função h', derivada de h (recorrendo à observação do gráfico de f), e relacionar com a monotonia de h:

x	$-\infty$	-2		3	$+\infty$
f	$+$	0	$+$	0	$-$
e^{2x}	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
h'	$+$	0	$+$	0	$-$
h	$\nearrow$	0	$\nearrow$	Máx.	$\searrow$

Assim, podemos concluir que a função h é crescente no intervalo $]-\infty,3]$ e decrescente no intervalo $[3,+\infty[$, pelo que tem um único extremo (para $x = 3$), ou seja a afirmação **(I)** é **falsa**.

Relativamente à afirmação **(II)**, temos que

$$h''(x) = \left(\frac{f(x)}{e^{2x}}\right)' = \frac{f'(x)e^{2x} - f(x)\left(e^{2x}\right)'}{\left(e^{2x}\right)^2} = \frac{f'(x)e^{2x} - f(x)(2x)'e^{2x}}{\left(e^{2x}\right)\left(e^{2x}\right)} = \frac{e^{2x}\left(f'(x) - f(x) \times 2\right)}{\left(e^{2x}\right)\left(e^{2x}\right)} = \frac{f'(x) - 2f(x)}{e^{2x}}$$

Como -2 é um zero de f, temos que $f(-2) = 0$, e como f tem um extremo relativo em $x = -2$, então $f'(-2) = 0$, e assim, vem que:

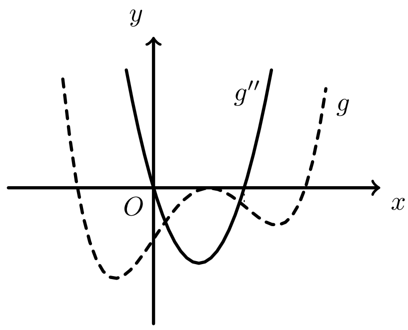
$$h''(-2) = \frac{f'(-2) - 2f(-2)}{e^{2\times(-2)}} = \frac{0 - 2 \times 0}{e^{-4}} = \frac{0}{e^{-4}} = 0$$

Logo, podemos concluir que a afirmação **(II)** é **verdadeira**.

Relativamente à afirmação **(III)**, como $\lim_{x\to+\infty} h(x) = 3$, podemos concluir que quando x tende para $+\infty$, a reta de equação $y = 3$ é uma assintota do gráfico de h.
Assim, quando x tende para $+\infty$, a reta de equação $y + 3 = 0 \Leftrightarrow y = -3$ não pode ser assintota do gráfico de h, pelo que podemos afirmar que a afirmação **(III)** é **falsa**.

Exame – 2014, 2.ª fase

18. Por observação do gráfico de g'',podemos estudar o sinal da segunda derivada e relacionar com o sentido das concavidades do gráfico de g (designa-se por a, o zero de g'' maior que zero).



x		0		a	
g''	+	0	−	0	+
g	$\smile$	Pt. I.	$\frown$	Pt. I.	$\smile$

O único gráfico compatível com o sentido das concavidades do gráfico identificadas é o gráfico da opção (A).

Resposta: **Opção A**

Exame – 2014, 2.ª fase

19. Para estudar a existência de pontos de inflexão, começamos por determinar a expressão da segunda derivada:

$$f''(x) = \big(f'(x)\big)' = \left(\frac{1}{2}x^2 - \ln x\right)' = \left(\frac{1}{2}x^2\right)' - (\ln x)' = \frac{1}{2} \times 2x - \frac{1}{x} = x - \frac{1}{x} = \frac{x^2}{x} - \frac{1}{x} = \frac{x^2-1}{x}$$

Como os pontos de inflexão são zeros da segunda derivada, vamos determiná-los:

$$f''(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; \frac{x^2-1}{x} = 0 \;\Leftrightarrow\; x^2 - 1 = 0 \,\wedge\, \underbrace{x \neq 0}_{\text{PV, } x>0} \;\Leftrightarrow\; x = -1 \,\vee\, x = 1$$

Como o domínio de f é $\mathbb{R}^+$, o único zero da segunda derivada é $x = 1$.
Assim, estudando o sinal da segunda derivada para relacionar com o sentido das concavidades, vem:

x	0		1	$+\infty$
f''	n.d.	−	0	+
f	n.d.	$\frown$	Pt. I.	$\smile$

Logo o gráfico de f tem um único ponto de inflexão.

Resposta: **Opção B**

Teste Intermédio 12.º ano – 30.04.2014

20. Determinando a expressão da segunda derivada vem:

$$f''(x) = \big(f'(x)\big)' = \big((4+x)^2\big)' = (4^2 + 2 \times 4x + x^2)' = (16)' + (8x)' + (x^2)' = 0 + 8 + 2x = 2x + 8$$

Calculando o zero da segunda derivada temos:

$$f''(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; 2x + 8 = 0 \;\Leftrightarrow\; 2x = -8 \;\Leftrightarrow\; x = -4$$

Estudando o sinal da segunda derivada para relacionar com o sentido das concavidades, vem:

x	$-\infty$	-4	$+\infty$
f''	$-$	0	$+$
f	$\frown$	Pt. I.	$\smile$

Logo, podemos concluir que gráfico da função f tem um ponto de inflexão de coordenadas $\big(-4, f(-4)\big)$

Resposta: **Opção D**

A afirmação da opção (A) é falsa porque existem objetos cuja imagem pela segunda derivada é negativa ($x \in]-\infty, -4[$).
A afirmação da opção (B) é falsa, porque apesar da primeira derivada ter um zero ($x = -4$), este não está associado a uma mudança de sinal.
A afirmação da opção (C) é falsa porque o gráfico de f tem um ponto de inflexão.

Exame – 2013, Ép. especial

21. Sabemos que a é um zero da primeira derivada (porque $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} = 0 \;\Leftrightarrow\; f'(a) = 0$) e que tem uma mudança de sinal associada, (porque $f''(x) < 0$, ou seja, f' é decrescente):

x		a	
f''		$-$	
f'		$\searrow$	
f'	$+$	0	$-$
f	$\nearrow$	Máx	$\searrow$

Logo podemos concluir que a é um maximizante, e por isso $f(a)$ é um máximo relativo da função f.

Resposta: **Opção B**

Não existem dados suficientes para rejeitar ou validar a afirmação da opção (A).
A afirmação (C) é falsa, porque se a fosse um minimizante, então $f''(a) > 0$.
A afirmação (D) é falsa, porque se P fosse um ponto de inflexão, então $f''(a) = 0$

Exame – 2013, 2.ª fase

22. Começando por determinar g'' temos:

$$g''(x) = (g'(x))' = \frac{(e^x + 6e^{-x} + 4x)'}{e^x + 6e^{-x} + 4x} = \frac{(e^x)' + (6e^{-x})' + (4x)'}{e^x + 6e^{-x} + 4x} = \frac{e^x + 6(-x)'e^{-x} + 4}{e^x + 6e^{-x} + 4x} = \frac{e^x - 6e^{-x} + 4}{e^x + 6e^{-x} + 4x}$$

Para determinar o sentido das concavidades, vamos estudar o sinal de g'' :

$$g''(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{e^x - 6e^{-x} + 4}{e^x + 6e^{-x} + 4x} = 0 \Leftrightarrow e^x - 6e^{-x} + 4 = 0 \land e^x + 6e^{-x} + 4x \neq 0 \Leftrightarrow$$

(como $e^x + 6e^{-x} + 4x > 0$ em $\mathbb{R}^+$)

$$\Leftrightarrow e^x - 6e^{-x} + 4 = 0 \Leftrightarrow e^x - 6\frac{1}{e^x} + 4 = 0 \Leftrightarrow e^x - \frac{6}{e^x} + 4 = 0 \Leftrightarrow (e^x)^2 - 6 + 4e^x = 0 \Leftrightarrow$$

(fazendo a substituição de variável $y = e^x$)

$$\Leftrightarrow y^2 - 6 + 4y = 0 \Leftrightarrow y^2 + 4y - 6 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4(1)(-6)}}{2(1)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{-4 \pm \sqrt{40}}{2} \Leftrightarrow y = \frac{-4 \pm \sqrt{4 \times 10}}{2} \Leftrightarrow y = \frac{-4 \pm 2\sqrt{10}}{2} \Leftrightarrow y = -2 \pm \sqrt{10} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{-4 \pm \sqrt{40}}{2} \Leftrightarrow y = -2 + \sqrt{10} \lor y = -2 + \sqrt{10} \quad (-2 - \sqrt{10} \notin \mathbb{R}^+) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y = -2 + \sqrt{10} \Leftrightarrow e^x = -2 + \sqrt{10} \Leftrightarrow x = \ln(-2 + \sqrt{10})$$

Assim, estudando a variação de sinal de g'' e relacionando com o sentido das concavidades do gráfico de g, vem:

x	0		$\ln(-2+\sqrt{10})$	$+\infty$
g''	n.d.	$-$	0	$+$
g	n.d.	$\frown$	Pt. I.	$\smile$

Logo, podemos concluir que o gráfico de g:

- tem um único ponto de inflexão (de abcissa $x = \ln(-2 + \sqrt{10})$)
- tem a concavidade voltada para baixo no intervalo $]0, \ln(-2 + \sqrt{10})]$
- tem a concavidade voltada para cima no intervalo $[\ln(-2 + \sqrt{10}), +\infty[$

Exame – 2013, 2.ª fase

23. Calculando os zeros da segunda derivada, temos:

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow e^{-x}x^2(x-1) = 0 \Leftrightarrow \underbrace{e^{-x} = 0}_{\text{Eq Imp, } e^{-x} > 0} \lor x^2 = 0 \lor x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \lor x = 1$$

Assim, estudando a variação de sinal de f'' e relacionando com o sentido das concavidades do gráfico de f, vem:

x	$-\infty$	0		1	$+\infty$
f''	$-$	0	$-$	0	$+$
f	$\frown$		$\frown$	Pt. I.	$\smile$

Logo o gráfico de f tem um único ponto de inflexão.

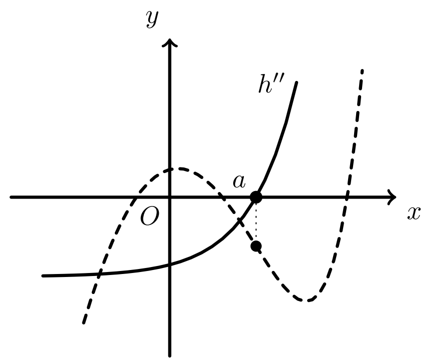
Resposta: **Opção D**

Teste Intermédio 12.º ano – 24.05.2013

24. Seja a, o único zero da segunda derivada ($h''(a) = 0$). Como o zero está associado a uma mudança de sinal da segunda derivada, é um ponto de inflexão do gráfico de h.

Os gráficos das opções (B) e (C) têm a concavidade voltada para cima para todos os valores do domínio.
O gráfico da opção (D) tem um ponto de inflexão de abcissa negativa, por isso, incompatível com a segunda derivada apresentada.
O único gráfico compatível com a abcissa do ponto de inflexão detetado é o gráfico da opção (A).

Resposta: **Opção A**



Exame – 2012, Ép. especial

25. Das funções representadas graficamente, a única que satisfaz cumulativamente todas as condições definidas é a **opção (I)**.
Podemos rejeitar:

- a **opção (II)**, porque sabemos que $\lim\limits_{x\to-\infty}(h(x) - 1) = 0$, ou seja $\lim\limits_{x\to-\infty} h(x) = 1$, e na função representada nesta opção temos que $\lim\limits_{x\to-\infty} h(x) = -1$
- a **opção (III)**, porque sabemos que h tem um mínimo relativo em $]a,c[$, porque a função representada nesta opção é crescente neste intervalo, pelo que não se verifica a existência de um mínimo.
- a **opção (IV)**, porque sabemos que $h''(x) > 0$ para $x > b$, ou seja, no intervalo $]b, +\infty[$, o gráfico tem a concavidade voltada para cima, e no gráfico da função representada nesta opção, verifica-se o oposto - no intervalo $]b, +\infty[$, o gráfico tem a concavidade voltada para baixo.

Exame – 2012, Ép. especial

26. Para estudar o sentido o sentido das concavidades e a existência de pontos de inflexão, começamos por determinar a expressão da segunda derivada:

$$\text{Como } x \in \mathbb{R}^+ \ , \ \ g'(x) = f(x) - \frac{1}{x} = \frac{1-e^{4x}}{x} - \frac{1}{x} = \frac{1-e^{4x}-1}{x} = -\frac{e^{4x}}{x}$$

$$g''(x) = \big(g'(x)\big)' = \left(-\frac{e^{4x}}{x}\right)' = -\left(\frac{e^{4x}}{x}\right)' = -\frac{(e^{4x})' \times x - e^{4x} \times (x)'}{x^2} = -\frac{(4x)'e^{4x} \times x - e^{4x}}{x^2} =$$

$$= -\frac{4e^{4x} \times x - e^{4x}}{x^2} = -\frac{e^{4x}(4x-1)}{x^2}$$

Determinando os zeros da segunda derivada, vem:

$$g''(x) = 0 \ \Leftrightarrow \ -\frac{e^{4x}(4x-1)}{x^2} = 0 \ \Leftrightarrow \ -e^{4x}(4x-1) = 0 \ \wedge \ \underbrace{x^2 \neq 0}_{\text{PV, } x>0} \ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ \underbrace{-e^{4x} = 0}_{\text{Eq Imp}} \vee 4x - 1 = 0 \ \Leftrightarrow \ x = \frac{1}{4}$$

Assim, estudando a variação de sinal de g'' e relacionando com o sentido das concavidades do gráfico de g, vem:

x	0		$\frac{1}{4}$	$+\infty$
g''	n.d.	$+$	0	$-$
g	n.d.	$\smile$	Pt. I.	$\frown$

Logo, podemos concluir que o gráfico de g:

- tem um único ponto de inflexão (de abcissa $x = \frac{1}{4}$)
- tem a concavidade voltada para cima no intervalo $\left]0,\frac{1}{4}\right]$
- tem a concavidade voltada para baixo no intervalo $\left[\frac{1}{4},+\infty\right[$

Exame – 2012, 2.ª Fase

27. As retas tangentes ao gráfico nos pontos de abcissas $x = -3$ e $x = 1$ têm declive negativo, ou seja, em $x = -3$ e $x = 1$ a função é decrescente, pelo que $f'(-3) < 0$ e também $f'(1) < 0$.
Relativamente ao sentido das concavidades, em $x = 1$, o gráfico de f tem a concavidade voltada para baixo, pelo que $f''(1) < 0$.
Em $x = -3$, o gráfico de f tem a concavidade voltada para cima, pelo que $f''(-3) > 0$

Resposta: **Opção C**

Exame – 2012, 1.ª Fase

28. Para determinar a abcissa do ponto de inflexão, começamos por determinar a expressão da segunda derivada:

$$f''(x) = \left(f'(x)\right)' = \left(x^2 - 4x + \frac{9}{2} - 4\ln(x-1)\right)' = (x^2)' - (4x)' + \left(\frac{9}{2}\right)' - \left(4\ln(x-1)\right)' =$$

$$= 2x - 4 + 0 - 4 \times \frac{(x-1)'}{x-1} = 2x - 4 - \frac{4 \times 1}{x-1} = \frac{(2x-4)(x-1)}{x-1} - \frac{4}{x-1} = \frac{2x^2 - 2x - 4x + 4 - 4}{x-1} = \frac{2x^2 - 6x}{x-1}$$

De seguida, determinamos os zeros da segunda derivada:

$$f''(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; \frac{2x^2 - 6x}{x-1} = 0 \;\Leftrightarrow\; 2x^2 - 6x = 0 \wedge \underbrace{x - 1 \neq 0}_{\text{PV, } x>1} \;\Leftrightarrow\; x(2x-6) = 0 \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{x = 0}_{\text{Impossível, } x>1} \vee\; 2x - 6 = 0 \;\Leftrightarrow\; x = \frac{6}{2} \;\Leftrightarrow\; x = 3$$

Como é certa a existência de um ponto de inflexão, o único zero da segunda derivada ($x = 3$) é a abcissa desse ponto.

Teste Intermédio 12.º ano – 24.05.2012

29. Determinando a expressão da primeira, e depois da segunda derivada, temos:

$$f'(x) = (ax^2 - 1)' = 2ax + 0 = 2ax$$

$$f''(x) = \left(f'(x)\right)' = (2ax)' = 2a$$

Como o gráfico de f'' é a reta de equação $y = 2a$, e pela observação do gráfico, podemos constatar que $2a < 0$, logo $a < 0$.
Assim, das opções apresentadas, apenas o valor -3 é compatível com a condição $a < 0$.

Resposta: **Opção D**

Exame – 2011, Ép. especial

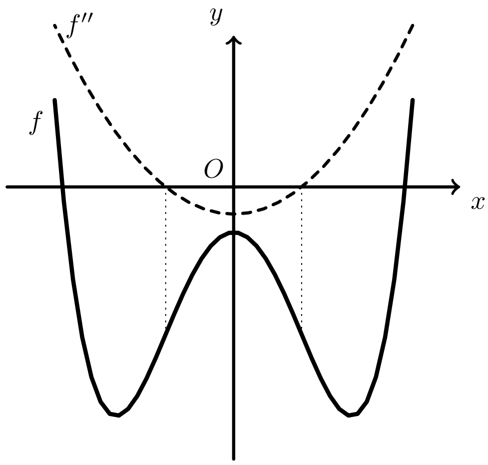
30. Para estudar o sentido das concavidades e a existência de pontos de inflexão, começamos por determinar a expressão da segunda derivada:

$$g''(x) = \left(g'(x)\right)' = \left(\log_2\left(-\frac{\pi}{6} - x\right)\right)' = \frac{\left(-\frac{\pi}{6} - x\right)'}{\left(-\frac{\pi}{6} - x\right)\ln 2} = \frac{-\left(\frac{\pi}{6}\right)' - (x)'}{\left(-\frac{\pi}{6} - x\right)\ln 2} = \frac{-1}{\left(-\frac{\pi}{6} - x\right)\ln 2}$$

Assim temos que a equação $g''(x) = 0$ é impossível, pelo que o gráfico da função g **não tem qualquer ponto de inflexão**.
Relativamente ao sentido das concavidades do gráficos, temos que, no intervalo em qua a função está definida, $-\frac{\pi}{6} - x > 0$, pelo que também $\left(-\frac{\pi}{6} - x\right)\ln 2 > 0$
Assim, o quociente $\frac{-1}{\left(-\frac{\pi}{6} - x\right)\ln 2}$ toma sempre valores negativos no domínio da função, isto é, $g''(x) < 0\,,\ \forall x \in \left]-\frac{2\pi}{3}, -\frac{\pi}{3}\right[$, ou seja, o gráfico de g **tem a concavidade voltada para baixo** em todo o domínio.

Exame – 2011, Ép. especial

31. Os gráficos das funções apresentadas nas opções (A) e (B) são parábolas cujo vértice está sobre o eixo das abcissas, ou seja, ambas têm um zero, mas que não está associado a uma mudança de sinal, pelo que, cada uma destas funções é a segunda derivada de uma função sem pontos de inflexão, e pela observação do gráfico, podemos constatar que a função f tem dois pontos de inflexão, pelo que nenhuma destas opções é correta.



O gráfico da função da opção (C), é uma parábola com dois zeros simétricos, e por isso coerente com os pontos de inflexão observados no gráfico de f, mas esta função é negativa quando o gráfico de f tem a concavidade voltada para cima, e é positiva quando o gráfico de f tem a concavidade voltada para baixo, pelo que, esta também não é a opção correta.

Resposta: **Opção D**

Exame – 2011, 2.ª fase

32. Para estudar o sentido das concavidades do gráfico de f, determinamos os zeros da segunda derivada:

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow g(x) \times (x^2 - 5x + 4) = 0 \Leftrightarrow \underbrace{g(x) = 0}_{\text{Eq. imp., } g(x)>0} \vee x^2 - 5x + 4 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \times 1 \times 4}}{2(1)} \Leftrightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{25-16}}{2} \Leftrightarrow x = 1 \vee x = 4$$

Como $g(x) > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, podemos estudar o sinal de f'' e relacionar com o sentido das concavidades do gráfico de f, vem:

x	$-\infty$	1		4	$+\infty$
g	+	+	+	+	+
x^2-5x+4	+	0	−	0	+
f''	+	0	−	0	+
f	$\cup$	Pt. I.	$\cap$	Pt. I.	$\cup$

- Assim, por observação do gráfico da função da opção (I) podemos rejeitar esta hipótese, porque o sentido das concavidades é o oposto do que foi estudado.
- Relativamente à opção (II), podemos observar que $f(1) > 0$ e $f(4) < 0$, logo $f(1) \times f(4) < 0$ o que contraria a informação do enunciado ($f(1) \times f(4) > 0$), pelo que esta hipótese também é excluída.
- Observando o gráfico da opção (IV), constatamos que existe um ponto ($x = a$) em que a função não é contínua. Neste caso a primeira derivada, neste ponto não estaria definida (não existe $f'(a)$ e consequentemente também a segunda derivada não estaria definida ($f''(a)$ não existe), o que contraria a informação do enunciado, que afirma que f'' tem domínio $\mathbb{R}$

Assim, temos que, a única opção coerente com todos os dados do enunciado é a opção (III).

Exame – 2011, 1.ª fase

33. Por observação do gráfico, concluímos que f é crescente em todo o domínio, logo $f'(x) > 0$, $\forall x \in]1,3[$
Também pela observação do gráfico, é possível constatar que a concavidade do gráfico de f está sempre voltada para baixo, isto é $f''(x) < 0$, $\forall x \in]1,3[$

Resposta: **Opção C**

Teste Intermédio 12.º ano – 26.05.2011

34. Representando a informação do gráfico sob a forma de uma tabela, temos:

x		0		a	
f'	$+$	$+$	$+$	0	$-$
f	$\nearrow$		$\nearrow$	Máx	$\searrow$

Assim, podemos verificar que a função f é crescente em $]0,a]$

Resposta: **Opção C**

Exame – 2010, 2.ª fase

35. Como $h(x) = f(x) + e^x$ e a derivada de uma função afim é o valor do declive (o seu gráfico é uma reta), determinando a expressão da primeira, e depois da segunda derivada, vem:

$$h'(x) = \big(f(x) + e^x\big)' = \big(f(x)\big)' + (e^x)' = m + e^x$$

$$h''(x) = \big(m + e^x\big)' = (m)' + (e^x)' = 0 + e^x = e^x$$

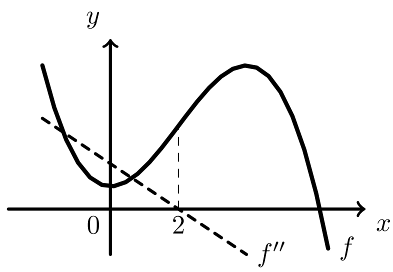
Assim, apenas o gráfico da opção (A) é compatível com a expressão determinada para a segunda derivada.

Resposta: **Opção A**

Exame – 2010, 1.ª Fase

36. Os gráficos das funções das opções (A) e (B) são parábolas com o vértice sobre o eixo das abcissas, ou seja, cada uma das funções tem um zero, mas ao qual não está associada uma mudança de sinal, pelo que, esses zeros não correspondem à abcissa de um ponto de inflexão.
A função da opção (D) tem um zero um zero em $x = 2$, mas é positiva para os valores de x em que o gráfico de f tem a concavidade voltada para baixo, e é negativa para os valores de x em que a concavidade do gráfico de f está voltada para baixo.

A função da opção (C) tem um zero, para $x = 2$, com mudança de sinal associada, o que sinaliza a existência de um ponto de inflexão, e é positiva para $x < 2$ (quando o gráfico de f tem a concavidade voltada para cima) e negativa $para x > 2$ (quando o gráfico de f tem a concavidade voltada para baixo).



Resposta: **Opção C**

Teste Intermédio 12.º ano – 19.05.2010

37. Para estudar o sentido das concavidades do gráfico e a existência de pontos de inflexão, começamos por determinar a expressão da segunda derivada:

$$f''(x) = \big(f'(x)\big) = \big((2x+4)e^x\big) = (2x+4)'e^x + (2x+4)(e^x)' = (2+0)e^x + (2x+4)e^x =$$

$$= 2e^x + 2xe^x + 4e^x = 2xe^x + 6e^x = e^x(2x+6)$$

Calculando os zeros da segunda derivada, temos:

$$f''(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; e^x(2x+6) = 0 \;\Leftrightarrow\; \underbrace{e^x = 0}_{\text{Eq. Imp.},e^x>0} \wedge (2x+6) = 0 \;\Leftrightarrow\; 2x = -6 \;\Leftrightarrow\; x = -3$$

Assim, estudando a variação de sinal de f'' e relacionando com o sentido das concavidades do gráfico de f, vem:

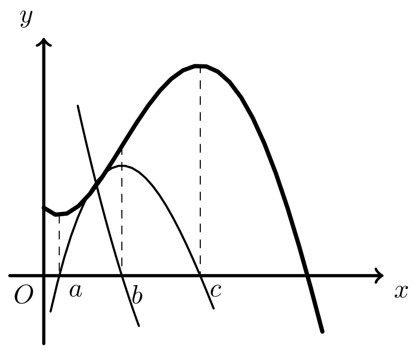
x	$-\infty$	-3	$+\infty$
f''	$-$	0	$+$
f	$\frown$	Pt. I.	$\smile$

Logo, podemos concluir que o gráfico de f:

- tem um único ponto de inflexão (de abcissa $x = -3$)
- tem a concavidade voltada para baixo no intervalo $]-\infty, -3]$
- tem a concavidade voltada para cima no intervalo $[-3, +\infty[$

Teste Intermédio 12.º ano – 27.05.2009

38. O zero da função representada no gráfico da Figura 2, corresponde à abcissa do ponto de inflexão do gráfico de h, o que é suficiente para relacionar este gráfico com a segunda derivada. Mas, podemos ainda observar que para $x \in]0,b[$ a função representada no gráfico da Figura 1 é positiva enquanto, para os mesmos valores, a concavidade do gráfico de h está voltada para cima; e de forma análoga, quando $x \in]b, +\infty[$, a função do gráfico da Figura 2 é negativa, enquanto o gráfico da função h, tem a concavidade voltada para baixo. Desta forma, podemos concluir que **o gráfico da Figura 2 é o gráfico de h"**



Os zeros da função representada no gráfico Figura 3, correspondem às abcissas dos extremos de h, o que permite relacionar este gráfico com a primeira derivada. Mas, podemos ainda observar que para $x \in]a,c[$ a função representada no gráfico da Figura 3 é positiva enquanto, para os mesmos valores, a função h é crescente; e de forma análoga, quando $x \in]0,a[\cup]c, +\infty[$, a função representada no gráfico da Figura 2 é negativa, enquanto a função h é decrescente. Desta forma, podemos concluir que **o gráfico da Figura 3 é o gráfico de h'**

Exame – 2007, 2.ª fase

39. Estudando a variação de sinal de f'' e relacionando com o sentido das concavidades do gráfico de f, vem:

x		-6		-1		1	
(x^2-1)	$+$	$+$	$+$	0	$-$	0	$+$
(x^2+5)	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$(x+6)^2$	$+$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
f''	$+$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
f	$\smile$		$\smile$	Pt. Inf.	$\frown$	Pt. Inf.	$\smile$

Pelo que podemos concluir que a função f tem **dois pontos de inflexão**.

Resposta: **Opção B**

Exame – 2006, Ép. especial

40. Por observação do gráfico, temos que:

- $h(0) < 0$, porque a imagem de zero é negativa
- $h'(0) > 0$, porque em $x = 0$ a função é crescente
- $h''(0) < 0$, porque em $x = 0$ a concavidade do gráfico da função está voltada para baixo

Logo, podemos afirmar que:

- $h(0) + h''(0) < 0$; $h(0) - h'(0) < 0$ e $h'(0) \times h''(0) < 0$
- $h'(0) - h''(0) > 0$

Resposta: **Opção C**

Exame – 2006, 2.ª Fase

41. De acordo com os dados, temos que:

- $f''(0) = 0$, porque no ponto de abcissa 0, o gráfico de f inverte o sentido das concavidades, ou seja é um ponto de inflexão
- $f'(0) = 1$, a tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa 0, é paralela à bissetriz dos quadrantes ímpares, logo tem declive 1
- $f(0) = 2$, porque a reta tangente tem declive 1 e contém o ponto $(-2{,}0)$, logo, a ordenada na origem pode ser calculada como: $0 = 1 \times (-2) + b \Leftrightarrow 2 = b$

Assim, $f(0) + f'(0) + f''(0) = 2 + 1 + 0 = 3$

Resposta: **Opção C**

Exame – 2006, 1.ª Fase

42. Determinando a expressão da segunda deriva, temos:

$$f''(x) = \big(f'(x)\big)' = (x^3 - 3x + 1)' = (x^3)' - (3x)' + (1)' = 3x^2 - 3$$

Determinado os zeros da segunda derivada, vem:

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow 3x^2 = 3 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$$

Como o gráfico da segunda derivada é uma parábola, com a concavidade voltada para cima, temos que a segunda derivada é negativa em $]-1{,}1[$, ou seja, o gráfico da função tem a a concavidade voltada para baixo, neste intervalo.

Resposta: **Opção A**

Exame – 2005, Ép. especial (cód. 435)

43. Determinando a expressão da segunda derivada, vem:

$$f''(x) = \left(f'(x)\right)' = (2 + x\ln x)' = (2)' + (x\ln x)' = 0 + (x)'\ln x + x(\ln x)' = \ln x + x \times \frac{1}{x} = \ln x + 1$$

Determinando os zeros da segunda derivada, temos:

$$f''(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \ln x + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \ln x = -1 \quad \Leftrightarrow \quad x = e^{-1} \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{1}{e}$$

Assim, estudando a variação de sinal de f'' e relacionando com o sentido das concavidades do gráfico de f, vem:

x	0		$\frac{1}{e}$		$+\infty$
f''	n.d.	$-$	0	$+$	
f	n.d.	$\frown$	Pt. I.	$\smile$	

Logo, podemos concluir que o gráfico de f:

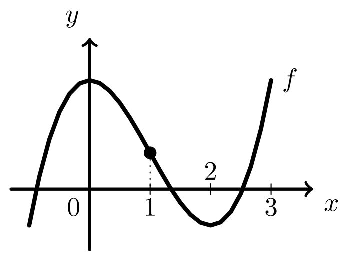
- tem um único ponto de inflexão (de abcissa $x = \frac{1}{e}$)
- tem a concavidade voltada para baixo no intervalo $\left]0,\frac{1}{e}\right]$
- tem a concavidade voltada para cima no intervalo $\left[\frac{1}{e},+\infty\right[$

Exame – 2005, 1.ª Fase (cód. 435)

44. A solução da equação $f''(x) = 0$ é a abcissa do ponto de inflexão do gráfico de f.

Logo, pela observação do gráfico, a única opção razoável - de entre as apresentadas - para o valor da abcissa do ponto de inflexão é o valor 1.

Resposta: **Opção B**



Exame – 2004, Ép. especial (cód. 435)

45. Determinando a expressão da primeira, e depois, da segunda derivada vem:

$$f'(x) = \left(x^{\alpha}\right)' = \alpha x^{\alpha-1}$$

$$f''(x) = \left(f'(x)\right)' = \left(\alpha x^{\alpha-1}\right)' = \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-1-1} = \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}$$

Assim, temos que:

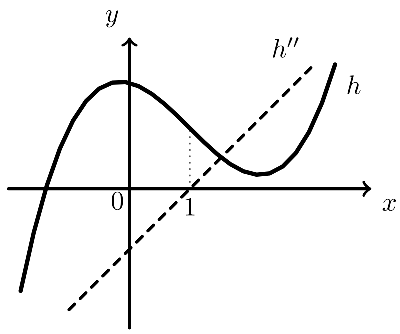
- Como $\alpha \in]0,1[$, então $\alpha - 1 < 0$
- Como o domínio de f é $\mathbb{R}^{+}$, então $x^{\alpha-2} > 0$

Logo, como $\alpha > 0$, o produto $\alpha\times(\alpha-1)$ é negativo, e por isso, o produto $\alpha(\alpha-1)\times x^{\alpha-2}$ também é negativo.

Desta forma a segunda derivada da função f é sempre negativa, o que permite afirmar que a concavidade do gráfico de f tem a concavidade voltada para baixo, qualquer que seja o valor de $\alpha \in]0,1[$.

Exame – 2004, 2.ª Fase (cód. 435)

46. Os gráficos das funções apresentadas nas opções (A) e (B) são parábolas cujo vértice está sobre o eixo das abcissas, ou seja, ambas têm um zero, mas que não está associado a uma mudança de sinal, pelo que, cada uma destas funções é a segunda derivada de uma função sem pontos de inflexão, e pela observação do gráfico, podemos constatar que a função h tem dois pontos de inflexão, pelo que nenhuma destas opções é correta.



O gráfico da função da opção (D), é uma reta com um zero igual a 1, e por isso coerente com o ponto de inflexão observado no gráfico de h, mas esta função é negativa quando o gráfico de h tem a concavidade voltada para cima, e é positiva quando o gráfico de h tem a concavidade voltada para baixo, pelo que, esta também não é a opção correta.

Resposta: **Opção C**

Exame – 2004, 1.ª Fase (cód. 435)

47. Determinando a expressão da primeira, e depois da segunda derivada, temos:

$$f'(x) = \left((x-5)^3\right)' = 3(x-5)^2(x-5)' = 3(x-5)^2 \times 1 = 3(x-5)^2$$

Assim podemos observar que a primeira derivada de f é uma parábola cujo vértice está sobre o eixo das abcissas, ou seja, o zero da primeira derivada não está associado a uma mudança de sinal, pelo que a função f não tem extremos.

$$f''(x) = \left(f'(x)\right)' = \left(3(x-5)^2\right)' = 2 \times 3(x-5)(x-5)' = 6(x-5)$$

Calculando o zero da segunda derivada, vem:

$$f''(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 6(x-5) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x - 5 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 5$$

Como o gráfico da segunda derivada é uma reta de declive não nulo, o zero da segunda derivada está associado a uma mudança de sinal, ou seja corresponde à abcissa de um ponto de inflexão de f.

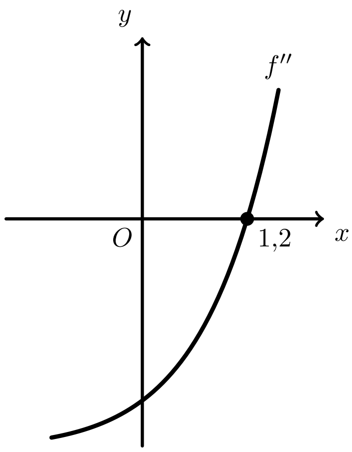
Resposta: **Opção C**

Exame – 2003, Prova para militares (cód. 435)

48. Como as abcissas dos pontos de inflexão correspondem aos zeros da segunda derivada associados a uma mudança de sinal, começamos por determinar a segunda derivada da função f:

$$f''(x) = (f'(x))' = ((x+1)e^x - 10x)' = ((x+1)e^x)' - (10x)' = (x+1)'e^x + (x+1)(e^x)' - 10 =$$
$$= e^x + (x+1)(e^x) - 10$$

Representado graficamente a expressão da segunda derivada de f na calculadora, obtemos o gráfico que se reproduz na figura ao lado.



Verificamos que a segunda derivada tem um zero, com mudança de sinal associada, e recorrendo à função da calculadora para determinar valores aproximados dos zeros da função, obtemos o valor, arredondado às décimas de 1,2.

Assim, concluímos que a abcissa do ponto A, ou seja do ponto de inflexão do gráfico de f é

$$x_A \approx 1{,}2$$

Exame – 2003, 1.ª fase - 2.ª chamada (cód. 435)

49. Como a primeira derivada é negativa, a função é decrescente (podem ser validadas as opções (A) e (C)).

    Como a segunda derivada é negativa, o gráfico da função tem a concavidade voltada para baixo (podem ser validadas as opções (A) e (D)).

    Resposta: **Opção A**

Exame – 2003, 1.ª fase - 1.ª chamada (cód. 435)

50. Analisando cada uma das afirmações, podemos concluir que:

    - a é zero de f se $f(a) = 0$; não existe qualquer relação entre os zeros da função e os zeros da derivada, pelo que não é possível garantir a veracidade da afirmação
    - $f(a)$ é extremo relativo de f se a for um zero da derivada e estiver associado a uma mudança de sinal; como não dispomos de informação sobre a variação do sinal da derivada, a condição $f'(a) = 0$ não é suficiente para garantir a veracidade da afirmação
    - $(a,f(a))$ é ponto de inflexão do gráfico de f se a for um zero da segunda derivada, associado a uma mudança de sinal; como não dispomos de informação sobre a segunda derivada, não é possível garantir a veracidade da afirmação
    - Como o valor da derivada num ponto é também o valor do declive da reta tangente ao gráfico, nesse ponto, podemos afirmar que a reta tangente ao gráfico de f, no ponto de abcissa a tem declive 0; ou seja, a reta tangente tem equação $y = 0 \times x + b \;\Leftrightarrow\; y = b$; como a reta é tangente ao gráfico de f no ponto $(a,f(a))$, substituindo as coordenadas deste ponto na reta tangente, temos:

      $$f(a) = 0 \times a + b \;\Leftrightarrow\; f(a) = b$$

      Ou seja a reta tangente tem de equação $y = f(a)$

    Resposta: **Opção D**

Exame – 2002, Prova para militares (cód. 435)

51. Analisando cada uma das afirmações, podemos concluir que:

    - Sendo a um zero da segunda derivada, não está associado a uma mudança de sinal da segunda derivada, pelo que o sentido da concavidade do gráfico da função não se altera, ou seja, a não é a abcissa de um ponto de inflexão
    - Como c é um zero da segunda derivada, associado a uma mudança de sinal da segunda derivada, sabemos que o sentido da concavidade do gráfico da função varia, ou seja, c é a abcissa de um ponto de inflexão do gráfico de f
    - No intervalo $[0,b]$ a concavidade do gráfico da segunda derivada está virada para baixo, mas é positiva, ou seja a concavidade do gráfico de f está voltada para cima.
    - No intervalo $[b,c]$ a segunda derivada é negativa, o que significa que, a concavidade do gráfico de f está voltada para baixo neste intervalo.

    Resposta: **Opção B**

Exame – 2002, 2.ª fase (cód. 435)

52. Por observação do gráfico, podemos constatar que a função é crescente no intervalo $[a,c]$ e também no intervalo $[e, +\infty[$, e decrescente para os restantes valores de x; assim podemos afirmar que a primeira derivada é positiva nos intervalos indicados e negativa para os restantes valores de x (pelo que podemos validar as opções (C) e (D)).

    Relativamente ao sentido das concavidades, a observação do gráfico permite verificar que a concavidade está voltada para baixo no intervalo $[b,d]$, e voltada para cima, para os restantes valores de x, ou seja, a segunda derivada é negativa neste intervalo e positiva para os restantes valores de x (com este argumento podemos validar as opções (A) e (C)).

    Resposta: **Opção C**

Exame – 2002, 1.ª fase - 1.ª chamada (cód. 435)

53. Resposta: **Opção B**

O gráfico representado na opção (B), é o único que tem apenas um ponto de inflexão, e a concavidade voltada para baixo, para valores de x inferiores à abcissa do ponto de inflexão e a concavidade voltada para cima, para valores de x superiores à abcissa do ponto de inflexão.
A monotonia da função representa neste gráfico é igualmente compatível com a variação do sinal da primeira derivada.

Exame – 2001, Prova para militares (cód. 435)

54. Calculando os zeros da segunda derivada, temos:

$$g''(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; 1 - x^2 = 0 \;\Leftrightarrow\; 1 = x^2 \;\Leftrightarrow\; \pm\sqrt{1} = x \;\Leftrightarrow\; x = -1 \vee x = 1$$

Assim, estudando a variação de sinal de g'' e relacionando com o sentido das concavidades do gráfico de g, vem:

x		-1		1	
g''	$-$	0	$+$	0	$-$
g	$\frown$	Pt. I.	$\smile$	Pt. I.	$\frown$

Logo, analisando as várias opções, podemos verificar que as funções representadas nas opções (A) e (B) têm um único ponto de inflexão e o gráfico representado na oção (D) tem o sentido das concavidades incompatíveis com a variação do sinal da segunda derivada.

Resposta: **Opção C**

Exame – 2001, 1.ª fase - 1.ª chamada (cód. 435)

55. Como o gráfico da função g tem um ponto de inflexão de abcissa 1, a segunda derivada tem um zero em $x = 1$ e uma mudança de sinal associada.
Analisando os gráficos das opções apresentadas, temos que nas opções (C) e (D) $x = 1$ não é um zero; e na opção (A) $x = 1$ é um zero, mas não está associado a uma mudança de sinal.

Resposta: **Opção B**

Exame – 2000, 1.ª fase - 2.ª chamada (cód. 435)

56. Determinando a expressão da segunda derivada, vem:

$$f''(x) = \big(f'(x)\big)' = \big(e^x(x^2+3x+1)\big)' = (e^x)'(x^2+3x+1)+e^x(x^2+3x+1)' = e^x(x^2+3x+1)+e^x(2x+3+0) =$$

$$= x^2e^x + 3xe^x + e^x + 2xe^x + 3e^x = x^2e^x + 5xe^x + 4e^x = e^x(x^2 + 5x + 4)$$

Determinando os zeros da segunda derivada, temos:

$$f''(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; e^x(x^2 + 5x + 4) = 0 \;\Leftrightarrow\; \underbrace{e^x = 0}_{\text{Eq. Imp.}, e^x>0} \vee\, x^2 + 5x + 4 = 0 \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; x = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4(1)(4)}}{2 \times 1} \;\Leftrightarrow\; x = \frac{-5 \pm \sqrt{9}}{2} \;\Leftrightarrow\; x = -4 \,\vee\, x = -1$$

Assim, estudando a variação de sinal de f'' e relacionando com o sentido das concavidades do gráfico de f, vem:

x	$-\infty$	-4		-1	$+\infty$
f''	$+$	0	$-$	0	$+$
f	$\cup$	Pt. I.	$\cap$	Pt. I.	$\cup$

Logo, podemos concluir que o gráfico de f:

- tem dois pontos de inflexão (de abcissas $x = -4$ e $x = -1$)
- tem a concavidade voltada para cima no intervalo $]-\infty, -4]$ e no intervalo $[-1, +\infty[$
- tem a concavidade voltada para baixo no intervalo $[-4, -1]$

Exame – 2000, 1.ª fase - 1.ª chamada (cód. 435)

57. Como $g''(x) > 0$, a concavidade do gráfico de g está voltada para cima, ou seja o gráfico da opção (C) é o único que não tem a concavidade voltada para baixo em nenhum intervalo.

Resposta: **Opção C**

Exame – 2000, Prova modelo (cód. 435)

58. Determinando a expressão da segunda derivada, vem:

$$f''(x) = \big(f'(x)\big)' = \left(\frac{1+\ln x}{x}\right)' = \frac{(1+\ln x)'x - (1+\ln x)(x)'}{x^2} = \frac{\left(0+\dfrac{1}{x}\right)x - (1+\ln x)\times 1}{x^2} =$$

$$= \frac{\dfrac{x}{x} - 1 - \ln x}{x^2} \underset{x\in\mathbb{R}^+ \Rightarrow x\neq 0}{=} \frac{1-1-\ln x}{x^2} = \frac{-\ln x}{x^2}$$

Determinando os zeros da segunda derivada, temos:

$$f''(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; \frac{-\ln x}{x^2} = 0 \;\Leftrightarrow\; -\ln x = 0 \wedge \underbrace{x^2 \neq 0}_{\text{PV}, x\in\mathbb{R}^+} \;\Leftrightarrow\; \ln x = 0 \;\Leftrightarrow\; x = e^0 \;\Leftrightarrow\; x = 1$$

Assim, estudando a variação de sinal de f'' e relacionando com o sentido das concavidades do gráfico de f, vem:

x	0		1	$+\infty$
f''	n.d.	$+$	0	$-$
f	n.d.	$\smile$	Pt. I.	$\frown$

Logo, podemos concluir que o gráfico de f:

- tem um único ponto de inflexão (de abcissa $x = 1$)
- tem a concavidade voltada para cima no intervalo $]0,1]$
- tem a concavidade voltada para baixo no intervalo $[1,+\infty[$

Exame – 1998, 1.ª fase - 2.ª chamada (cód. 135)