Funções (12.º ano)

Teorema de Bolzano

Exercícios de Provas Nacionais e Testes Intermédios

1. Resolva este item sem recorrer à calculadora.

   Seja a um número real maior do que 1 , e seja f a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = ax^3 + x - 2$.

   Mostre que a função f tem, pelo menos, um zero no intervalo $]0,1[$.

   Exame – 2024, Ép. especial

2. Seja f uma função de domínio $\mathbb{R}$.

   Sabe-se que:

   - para qualquer número real a, $a \neq 2$, $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$;
   - $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = f(2)$, com $f(2) > 0$, e $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = -\infty$;
   - $f(1) \times f(3) < 0$.

   Considere a proposição seguinte.

   O teorema de Bolzano-Cauchy permite afirmar que a função f tem, pelo menos, um zero no intervalo $]1,3[$.

   Justifique que a proposição anterior é falsa.

   Na sua resposta, apresente uma razão que justifique a sua falsidade.

   Exame – 2024, 1.ª Fase (adaptado)

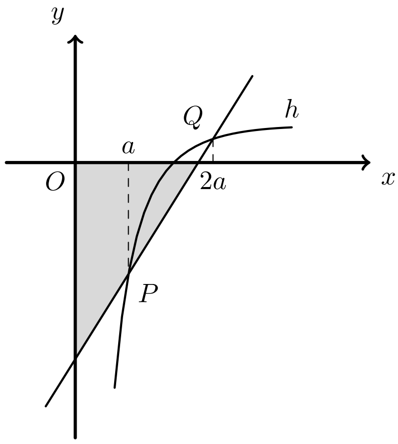
3. Para um certo número real k , seja g a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por

   $$g(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - x}{k - kx} & \text{se } x < 1 \\ \\ x^2 - 10 + 8\ln x & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$$

   Mostre, recorrendo a métodos exclusivamente analíticos, que a função g tem, pelo menos, um zero no intervalo $]\sqrt{e},e[$

   Exame – 2020, Ép. especial

4. Na figura ao lado, está representada, num referencial o.n. xOy, parte do gráfico da função h, de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por $h(x) = \frac{\ln x}{x}$



Para cada número real a pertencente ao intervalo $\left[\frac{1}{2},1\right]$, sejam P e Q os pontos do gráfico da função h de abcissas a e $2a$, respetivamente.
Tal como a figura sugere, a reta PQ define, com os eixos coordenados, um triângulo retângulo.

Mostre que existe, pelo menos, um número real a pertencente ao intervalo $\left[\frac{1}{2},1\right]$ para o qual esse triângulo é isósceles.

Sugestão: comece por identificar o valor do declive da reta PQ para o qual o triângulo é isósceles.

Exame – 2018, 1.ª Fase

5. Seja g uma função contínua, de domínio $\mathbb{R}$, tal que:

   - para todo o número real x, $(g \circ g)(x) = x$
   - para um certo número real a, tem-se $g(a) > a + 1$

   Mostre que a equação $g(x) = x + 1$ é possível no intervalo $]a,g(a)[$

Exame – 2016, 2.ª Fase

6. Seja f a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x - \sqrt{e}}{2x-1} & \text{se } x < \dfrac{1}{2} \\ \\ (x+1)\ln x & \text{se } x \geq \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

   Mostre que a equação $f(x) = 3$ é possível em $]1,e[$ e, utilizando a calculadora gráfica, determine a única solução desta equação, neste intervalo, arredondada às centésimas.
   Na sua resposta:

   - recorra ao teorema de Bolzano para provar que a equação $f(x) = 3$ tem, pelo menos, uma solução no intervalo $]1,e[$
   - reproduza, num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) que visualizar na calculadora, devidamente identificado(s);
   - apresente a solução pedida.

Exame – 2015, 1.ª Fase

7. Considere a função f, de domínio $]-\infty,0[$ definida por $f(x) = x - 1 + \frac{\ln(-x)}{x}$

   Mostre que a condição $f(x) = -e$ tem, pelo menos, uma solução em $]-e,-1[$, recorrendo a métodos analíticos, sem utilizar a calculadora.

Exame – 2014, 2.ª Fase

8. Considere, para um certo número real k, a função f, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = ke^x + x$

   O teorema de Bolzano garante que a função f tem, pelo menos, um zero no intervalo $]0,1[$

A qual dos intervalos seguintes pode pertencer k?

(A) $\left]-e,-\frac{1}{e}\right[$ **(B)** $\left]-\frac{1}{e},0\right[$ **(C)** $\left]0,\frac{1}{e}\right[$ **(D)** $\left]\frac{1}{e},1\right[$

Exame – 2014, 1.ª Fase

9. Seja f uma função de domínio $[-e,1]$
Sabe-se que:

- f é contínua no seu domínio;
- $f(-e) = 1$
- $f(1) = e$

Qual das afirmações seguintes é necessariamente verdadeira?

(A) A equação $f(x) - 1 = 0$ tem pelo menos uma solução em $]-e,1[$

(B) A equação $f(x) = e$ tem pelo menos uma solução em $]-e,1[$

(C) A equação $f(x) = 0$ tem pelo menos uma solução em $]-e,1[$

(D) A equação $f(x) = \frac{e}{2}$ tem pelo menos uma solução em $]-e,1[$

Exame – 2013, 2.ª Fase

10. Considere, para um certo número real a positivo, uma função f, contínua, de domínio $[-a,a]$
Sabe-se que $f(-a) = f(a)$ e $f(a) > f(0)$
Mostre que a condição $f(x) = f(x+a)$ tem, pelo menos, uma solução em $]-a,0[$

Exame – 2013, 1.ª Fase

11. Seja a um número real tal que $a > e$ (e – número de Neper ou número de Euler)
Seja g a função, de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por $g(x) = ax + \ln x$
Mostre que a função g tem, pelo menos, um zero no intervalo $\left]\frac{1}{a},\frac{1}{e}\right[$

Teste Intermédio 12.º ano – 24.05.2013

12. Admita que a concentração de um produto químico na água, em gramas por litro, t minutos após a sua colocação na água, é dada, aproximadamente, por

$$C(t) = 0{,}5t^2 \times e^{-0{,}1t}, \text{ com } t \geq 0$$

Recorrendo a métodos exclusivamente analíticos, mostre que, durante os primeiros 15 minutos após a colocação desse produto químico na água, houve, pelo menos, um instante em que a concentração do produto foi 13 gramas por litro.
Se utilizar a calculadora em eventuais cálculos numéricos, sempre que proceder a arredondamentos, use três casas decimais.

Exame – 2012, Ép. especial

13. Seja f uma função de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = e^x - 3$
Em qual dos intervalos seguintes o teorema de Bolzano permite afirmar que a equação $f(x) = -x - \frac{3}{2}$ tem, pelo menos, uma solução?

(A) $\left]0,\frac{1}{5}\right[$ **(B)** $\left]\frac{1}{5},\frac{1}{4}\right[$ **(C)** $\left]\frac{1}{4},\frac{1}{3}\right[$ **(D)** $\left]\frac{1}{3},1\right[$

Exame – 2012, 1.ª Fase

14. Relativamente a duas funções, f e g, sabe-se que:

- têm domínio $[2,3]$
- são funções contínuas
- $f(2) - g(2) > 0$ e $f(3) - g(3) < 0$

Qual das afirmações seguintes é necessariamente verdadeira?

(A) Os gráficos de f e g intersectam-se em pelo menos um ponto.

(B) A função $f - g$ é crescente.

(C) Os gráficos de f e g não se intersectam.

(D) A função $f - g$ é decrescente.

Teste Intermédio 12.º ano – 24.05.2012

15. Seja f a função, de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por $f(x) = 2 + \log_3 x$
Seja g a função, de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por $g(x) = x + f(x)$
Mostre, **sem recorrer à calculadora**, que $\exists c \in]1,3[: g(c) = 5$

Teste Intermédio 12.º ano – 13.03.2012

16. Considere a função f, de domínio $[0, +\infty[$, definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{2-x} - 1}{x - 2} & \text{se } 0 \leq x < 2 \\ \\ \dfrac{x+1}{\ln(x+1)} & \text{se } x \geq 2 \end{cases}$$

Mostre, sem resolver a equação e recorrendo a métodos exclusivamente analíticos, que $f(x) = -3$ tem , pelo menos, uma solução em $\left]0, \frac{1}{2}\right[$

Exame – 2011, 2.ª Fase

17. Seja f uma função de domínio $[0, +\infty[$, definida por

$$f(x) = \begin{cases} 2^x - 9 & \text{se } 0 \leq x < 5 \\ \\ \dfrac{1 - e^x}{x} & \text{se } x \geq 5 \end{cases}$$

Em qual dos intervalos seguintes o teorema de Bolzano permite garantir a existência de, pelo menos, um zero da função f?

(A) $]0,1[$ **(B)** $]1,4[$ **(C)** $]4,6[$ **(D)** $]6,7[$

Exame – 2011, 1.ª Fase

18. Seja f uma função, de domínio $\mathbb{R}$, contínua no intervalo $[-1,4]$
Tem-se $f(-1) = 3$ e $f(4) = 9$

Em qual das opções seguintes está definida uma função g, de domínio $\mathbb{R}$, para a qual o teorema de Bolzano garante a existência de pelo menos um zero no intervalo$] - 1,4[$?

(A) $g(x) = 2x + f(x)$ **(B)** $g(x) = 2x - f(x)$ **(C)** $g(x) = x^2 + f(x)$ **(D)** $g(x) = x^2 - f(x)$

Teste Intermédio 12.º ano – 26.05.2011

19. Considere a função f, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = -x + e^{2x^3-1}$
Recorrendo a métodos exclusivamente analíticos, mostre que $f(x) = 1{,}5$ tem, pelo menos, uma solução em $]-2,-1[$
Se utilizar a calculadora em eventuais cálculos numéricos, sempre que proceder a arredondamentos, use três casas decimais.

Exame – 2010, 2.ª Fase

20. Seja g a função, de domínio $[0,+\infty[$, definida por

$$g(x) = \begin{cases} 3^x - \sqrt{x} & \text{se } 0 \leq x < 2 \\ \\ x - 5 + \log_2(x-1) & \text{se } x \geq 2 \end{cases}$$

Em qual dos intervalos seguintes o Teorema de Bolzano permite garantir a existência de pelo menos um zero da função g?

(A) $]0,1[$ **(B)** $]1,3[$ **(C)** $]3,5[$ **(D)** $]5,9[$

Teste Intermédio 12.º ano – 15.03.2010

21. Considere a função g, de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por $g(x) = e^{2x} + \ln x$
Mostre, **recorrendo a métodos exclusivamente analíticos**, que a função g tem, pelo menos, um zero no intervalo $]0{,}1; 0{,}3[$
Nota: A calculadora pode ser utilizada em eventuais cálculos numéricos.

Exame – 2009, 1.ª Fase

22. De uma função f de domínio $[1,2]$ sabe-se que:

- f é contínua em todo o seu domínio
- $\forall x \in [1,2], f(x) < 0$
- $f(1) = 3f(2)$

Seja a função g de domínio $[1,2]$ definida por $g(x) = 2f(x) - f(1)$
Prove que a função g tem pelo menos um zero.

Teste Intermédio 12.º ano – 11.03.2009

23. A massa de uma substância radioativa diminui com a passagem do tempo. Supõe-se que, para uma amostra de uma determinada substância, a massa, em gramas, ao fim de t **horas** de observação, é dada pelo modelo matemático $M(t) = 15 \times e^{-0{,}02t}$, $t \geq 0$.
Resolva, **usando métodos analíticos**, o item que se segue.
Utilize o **Teorema de Bolzano** para justificar que houve, pelo menos, um instante, entre as 2 horas e 30 minutos e as 4 horas após o início da observação, em que a massa da amostra da substância radioativa atingiu os 14 gramas.
Nota: A calculadora pode ser utilizada em eventuais cálculos intermédios; sempre que proceder a arredondamentos, use três casas decimais.

Exame – 2008, 2.ª Fase

24. Seja h a função de domínio $]-1,+\infty[$, definida por $h(x) = 4 - x + \ln(x+1)$ (ln designa logaritmo de base e).
Justifique, aplicando o **Teorema de Bolzano**, que a função h tem, pelo menos, um zero no intervalo $]5,6[$.
Nota: A calculadora pode ser utilizada em eventuais cálculos intermédios; sempre que proceder a arredondamentos, use duas casas decimais.

Exame – 2008, 1.ª fase

25. Seja f uma função de domínio $\mathbb{R}$, contínua no intervalo $[-2,2]$
Tem-se $f(-2) = 1$ e $f(2) = 3$
Indique qual das expressões seguintes define uma função g, de domínio $\mathbb{R}$, para a qual o Teorema de Bolzano garante a existência de pelo menos um zero no intervalo $]-2,2[$

(A) $g(x) = x + f(x)$ **(B)** $g(x) = x - f(x)$ **(C)** $g(x) = x^2 + f(x)$ **(D)** $g(x) = x^2 - f(x)$

Teste Intermédio 12.º ano – 29.05.2008

26. Considere, num referencial o. n. xoy,

- a curva C, que representa graficamente a função f, de domínio $[0,1]$, definida por $f(x) = e^x + 3x$
- a reta r, de equação $y = 5$

Sem recorrer à calculadora, justifique que a reta r intersecta a curva C em pelo menos um ponto.

Teste Intermédio 12.º ano – 15.03.2007

27. Seja a função f, de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{\ln x} & \text{se } 0 < x < 1 \\ xe^{2-x} & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$

Sem recorrer à calculadora, mostre que $\exists x \in]4,5[: \ f(x) + f(e^{-1}) = 0$

Exame – 2006, Ép. especial

28. Seja $f : [0,2] \to \mathbb{R}$ uma função contínua tal que $f(0) = f(2) = 0$ e $f(1) > 0$
Prove que existe pelo menos um número real c no intervalo $]0,1[$ tal que $f(c) = f(c+1)$
Sugestão: considere a função $g : [0,1] \to \mathbb{R}$, definida por $g(x) = f(x) - f(x+1)$

Exame – 2006, 2.ª fase

29. De uma certa função f, contínua em $\mathbb{R}$, sabe-se que $f(3) = 8$ e $f(7) = 1$.
Qual das afirmações seguintes é necessariamente verdadeira?

(A) $1 \leq f(6) \leq 8$ **(B)** A função f não tem zeros em $[3,7]$

(C) $f(4) > f(5)$ **(D)** 2 pertence ao contradomínio de f

Exame – 2005, 2.ª fase

30. Considere a função f, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = 1 + 3x^2e^{-x}$
Sem recorrer à calculadora, (a não ser para efetuar eventuais cálculos numéricos), mostre que, no intervalo $]-1,0[$, existe pelo menos um objecto cuja imagem, por meio de f, é 4.

Exame – 2004, 1.ª Fase

31. Seja f uma função contínua, de domínio $[0,5]$ e contradomínio $[3,4]$.
Seja g a função, de domínio $[0,5]$, definida por $g(x) = f(x) - x$.
Prove que a função g tem, pelo menos, um zero.

Exame – 2002, 1.ª fase - 2.ª chamada

32. De uma função g, contínua em $\mathbb{R}$, sabe-se que:

- 1 é zero de g;
- $g(3) > 0$

Prove que a equação $g(x) = \dfrac{g(3)}{2}$ tem, pelo menos, uma solução no intervalo $]1,3[$.

Exame – 2001, 2.ª fase

33. De uma função f, contínua no intervalo $[1,3]$, sabe-se que $f(1) = 7$ e $f(3) = 4$.

Qual das afirmações seguintes é **necessariamente** verdadeira?

(A) A função f tem pelo menos um zero no intervalo $[1,3]$

(B) A função f não tem zeros em $[1,3]$

(C) A equação $f(x) = 5$ tem pelo menos uma solução no intervalo $[1,3]$

(D) A equação $f(x) = 5$ não tem solução no intervalo $[1,3]$

Exame – 2001, 1.ª fase - 1.ª chamada

34. Foi administrado um medicamento a um doente às 9 horas da manhã de um certo dia.
A concentração desse medicamento, em miligrama por mililitro de sangue, t **horas** após ter sido administrado, é dada por

$$C(t) = 2te^{-0.3t}$$

Utilize o Teorema de Bolzano para mostrar que houve um instante, entre as 9 h 30 min e as 10 h, em que a concentração do medicamento foi de 1 mg/ml.

Exame – 1999, Prova modelo (prog. antigo)

35. Seja g a função definida em $\mathbb{R}$ por $g(x) = x^5 - x + 1$.
O Teorema de Bolzano permite-nos afirmar que a equação $g(x) = 8$ tem pelo menos uma solução no intervalo

(A) $]-1,0[$ **(B)** $]0,1[$ **(C)** $]1,2[$ **(D)** $]2,3[$

Exame – 1997, 1.ª fase - 1.ª chamada (prog. antigo)