

Funções (12.º ano)
Exponenciais e logaritmos

Exercícios de Provas Nacionais e Testes Intermédios - Propostas de resolução



1. As soluções da equação pertencem ao conjunto $\{x \in \mathbb{R} : x > 0 \wedge x + 1 > 0\}$

Como $x > 0 \wedge -x > -1 \Leftrightarrow x > -1$,

temos que $x \in]0, +\infty[\cap]-1, +\infty[$ ou seja, $x \in]0, +\infty[$, e resolvendo a equação, vem que:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \log_2 x - \log_2 \sqrt{x+1} = -1 &\Leftrightarrow \frac{1}{2} \log_2 x - \log_2 (x+1)^{\frac{1}{2}} = -1 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \log_2 x - \frac{1}{2} \log_2 (x+1) = -1 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{2} (\log_2 x - \log_2 (x+1)) = -1 \Leftrightarrow \log_2 x - \log_2 (x+1) = -2 \Leftrightarrow \log_2 \left(\frac{x}{x+1} \right) = -2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{x}{x+1} = 2^{-2} \Leftrightarrow \frac{x}{x+1} = \frac{1}{2^2} \Leftrightarrow \frac{x}{x+1} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow 4x = x+1 \Leftrightarrow 4x - x = 1 \Leftrightarrow 3x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Assim, como $\frac{1}{3} \in]0, +\infty[$, o conjunto solução da equação é $\left\{ \frac{1}{3} \right\}$.

Exame – 2024, Ép. especial

2. De acordo com os dados do enunciado, determinando os comprimentos da altura e das bases do trapézio, temos que:

- $\overline{AB} = x_B - x_A = a + 4 - a = 4$
- $\overline{AD} = y_D = f(a) = \log_{2a} a$
- $\overline{BC} = y_C = f(a+4) = \log_{2a} (a+4)$

Assim, o valor a para o qual a área do trapézio $[ABCD]$ é igual a 4, é a solução da equação seguinte:

$$\begin{aligned} A_{[ABCD]} = 4 &\Leftrightarrow \frac{\overline{BC} + \overline{AD}}{2} \times \overline{AB} = 4 \Leftrightarrow \frac{\log_{2a} (a+4) + \log_{2a} a}{2} \times 4 = 4 \Leftrightarrow \log_{2a} (a+4) + \log_{2a} a = \frac{4 \times 2}{4} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \log_{2a} ((a+4) \times a) = 2 \Leftrightarrow \log_{2a} (a^2 + 4a) = 2 \Leftrightarrow (2a)^2 = a^2 + 4a \Leftrightarrow 4a^2 = a^2 + 4a \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 3a^2 - 4a = 0 \Leftrightarrow a(3a - 4) = 0 \Leftrightarrow \underbrace{a=0}_{a>1} \vee 3a - 4 = 0 \Leftrightarrow a = \frac{4}{3} \end{aligned}$$

Exame – 2024, 2.ª Fase

3. Considerando $y = \ln x$, temos que:

$$\ln^2 x - \ln x - 2 < 0 \Leftrightarrow y^2 - y - 2 < 0$$

Determinado os zeros da equação $y^2 - y - 2 = 0$, temos:

$$y = \frac{1 \pm \sqrt{1^2 - 4(1)(-2)}}{2} \Leftrightarrow y = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} \Leftrightarrow y = \frac{1 \pm 3}{2} \Leftrightarrow y = 2 \vee y = -1$$

Observando que:

- $y = 2 \Leftrightarrow \ln x = 2 \Leftrightarrow x = e^2$
- $y = -1 \Leftrightarrow \ln x = -1 \Leftrightarrow x = e^{-1} \Leftrightarrow x = \frac{1}{e}$

Pelo que, fatorizando a expressão polinomial, temos que:

$$\ln^2 x - \ln x - 2 < 0 \Leftrightarrow y^2 - y - 2 < 0 \Leftrightarrow (y - 2)(y + 1) < 0 \Leftrightarrow (x - e^2) \left(x - \frac{1}{e} \right) < 0$$

Estudando o sinal da função, observando que o domínio de validade da inequação é \mathbb{R}^+ , porque a função logarítmica só está definida para reais positivos, temos:

x	0		$\frac{1}{e}$		e^2	$+\infty$
$x - e^2$	n.d.	-	-	-	0	+
$x - \frac{1}{e}$	n.d.	-	0	+	+	+
P	n.d.	+	0	-	0	+



Assim, o conjunto dos números reais que verificam a condição indicada, é: $\left] \frac{1}{e}, e^2 \right[$.

Exame – 2024, 1.ª Fase

4. Recorrendo às propriedades dos logaritmos, temos que:

$$\log_a \left(\frac{b}{a} \right) = 2 \Leftrightarrow \log_a b - \log_a a = 2 \Leftrightarrow \log_a b - 1 = 2 \Leftrightarrow \log_a b = 2 + 1 \Leftrightarrow \log_a b = 3$$

E assim:

$$\log_a \left(\sqrt{a^3} \times b^2 \right) = \log_a \sqrt{a^3} + \log_a b^2 = \log_a (a)^{\frac{3}{2}} + 2 \log_a b = \frac{3}{2} \times \log_a a + 2 \times 3 = \frac{3}{2} \times 1 + 6 = \frac{3}{2} + \frac{12}{2} = \frac{15}{2}$$

Resposta: **Opção B**

Exame – 2023, Ép. especial



5. Como $e^x > 0$ e $e^{-x} > 0$, então $e^x + e^{-x} \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}$, pelo que resolvendo a equação, temos:

$$\begin{aligned} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{1}{3} &\Leftrightarrow 3(e^x - e^{-x}) = e^x + e^{-x} \Leftrightarrow 3e^x - 3e^{-x} - e^x - e^{-x} = 0 \Leftrightarrow 2e^x - 4e^{-x} = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 2e^x - 4 \times \frac{1}{e^x} = 0 &\Leftrightarrow 2e^x \times \frac{e^x}{e^x} - \frac{4}{e^x} = 0 \Leftrightarrow \frac{2(e^x)^2 - 4}{e^x} = 0 \Leftrightarrow 2e^{2x} - 4 = 0 \wedge \underbrace{e^x \neq 0}_{\text{Cond. universal}} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 2e^{2x} = 4 \Leftrightarrow e^{2x} = 2 \Leftrightarrow 2x = \ln 2 \Leftrightarrow x = \frac{\ln 2}{2} \end{aligned}$$

$$\text{C.S.} = \left\{ \frac{\ln 2}{2} \right\}$$

Exame – 2023, Ép. especial

6. Substituindo as coordenadas dos pontos na expressão algébrica da função, temos que:

- $f(1) = 5 \Leftrightarrow a + e^{b \times 1} = 5 \Leftrightarrow a = 5 - e^b$
- $f(2) = 7 \Leftrightarrow a + e^{b \times 2} = 7 \Leftrightarrow a = 7 - e^{2b}$

Ou seja:

$$5 - e^b = 7 - e^{2b} \Leftrightarrow e^{2b} - e^b - 2 = 0 \Leftrightarrow (e^b)^2 - e^b - 2 = 0$$

Considerando $y = e^b$, temos que:

$$y^2 - y - 2 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4(1)(-2)}}{2 \times 1} \Leftrightarrow y = -1 \vee y = 2$$

Assim, como $y = e^b$, temos que:

- $\underbrace{e^b = -1}_{\text{Cond. impossível}} \vee e^b = 2 \Leftrightarrow b = \ln 2$
- $a = 5 - e^b = 5 - 2 = 3$

Exame – 2023, 2.ª Fase

7. As soluções da equação pertencem ao conjunto $\{x \in \mathbb{R} : g(x) > 0 \wedge x \geq 1\}$

Como a função g é crescente e

$$g(x) = 0 \Leftrightarrow 7 \times 3^{x-1} - 3 = 0 \Leftrightarrow 3^{x-1} = \frac{3}{7} \Leftrightarrow x - 1 = \log_3 \frac{3}{7} \Leftrightarrow x - 1 = \log_3 3 - \log_3 7 \Leftrightarrow x = 2 - \log_3 7$$

então $g(x) > 0$ se $x \in]2 - \log_3 7, +\infty[$, e como $2 - \log_3 7 < 1$, as soluções da equação pertencem ao conjunto $[1, +\infty[$.

Assim, resolvendo a equação, temos:

$$\begin{aligned} \log_3 (g(x)) = x + \log_3 2 &\Leftrightarrow \log_3 (7 \times 3^{x-1} - 3) = x + \log_3 2 \Leftrightarrow \log_3 (7 \times 3^{x-1} - 3) = \log_3 (3^x) + \log_3 2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \log_3 (7 \times 3^{x-1} - 3) = \log_3 (3^x \times 2) \Leftrightarrow 7 \times 3^{x-1} - 3 = 2 \times 3^x \Leftrightarrow 7 \times \frac{3^x}{3} - 2 \times 3^x = 3 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 7 \times 3^x - 6 \times 3^x = 9 \Leftrightarrow 3^x = 9 \Leftrightarrow x = \log_3 9 \Leftrightarrow x = 2 \end{aligned}$$

Assim, como $2 \in [1, +\infty[$, o conjunto dos números reais que são solução da equação, é $\{2\}$.

Exame – 2023, 1.ª Fase



8. As soluções da equação pertencem ao conjunto $\{x \in \mathbb{R} : 9x + 1 > 0 \wedge 6x > 0\}$

Como $9x > -1 \wedge 6x > 0 \Leftrightarrow x > -\frac{1}{9} \wedge x > 0 \Leftrightarrow x > 0$, temos que $x \in]0, +\infty[$, e resolvendo a equação, vem que:

$$\frac{1}{2} \log_2(9x+1) = \log_2(6x) \Leftrightarrow \log_2(9x+1) = 2 \log_2(6x) \Leftrightarrow \log_2(9x+1) = \log_2(6x)^2 \Leftrightarrow 9x+1 = (6x)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 9x+1 = 36x^2 \Leftrightarrow -36x^2 + 9x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-9 \pm \sqrt{9^2 - 4(-36)(1)}}{2 \times (-36)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-9 + 15}{-72} \vee x = \frac{-9 - 15}{-72} \Leftrightarrow x = -\frac{1}{12} \vee x = \frac{1}{3}$$

Assim, como $x > 0$, $x = -\frac{1}{12}$ não é solução da equação, pelo que o conjunto dos números reais que são solução da equação, é: $\left\{ \frac{1}{3} \right\}$

Exame – 2022, Ép. especial

9. Como o ponto do cabo mais próximo do solo é equidistante dos dois postes, está a 5 metros de cada um dos postes, em particular está a 5 metros do poste da esquerda, pelo que $x = 5$

Assim, a altura deste ponto é dada por

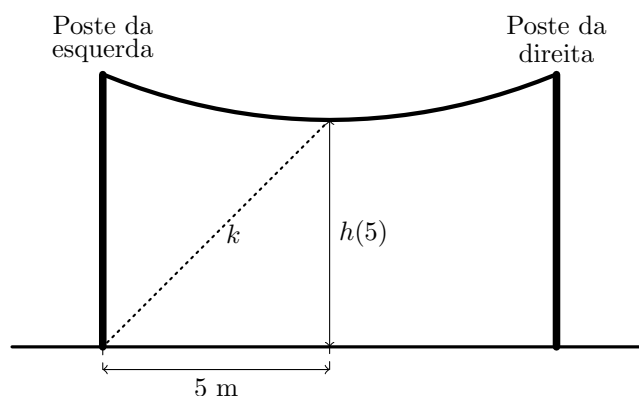
$$h(5) = 6,3(e^{\frac{5-5}{12,6}} + e^{\frac{5-5}{12,6}}) - 7,6 = 6,3(e^0 + e^0) - 7,6 = 6,3 \times 2 - 7,6 = 5$$

Logo a a distância (k), arredondada às décimas de metro, da base do poste da esquerda ao ponto do cabo que está mais próximo do solo é dada por

$$k^2 = 5^2 + 5^2 \Leftrightarrow k^2 = 25 + 25 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow_{k>0} k = \sqrt{50} \Rightarrow k \approx 7,1 \text{ m}$$

Resposta: **Opção A**



Exame – 2022, 1.ª Fase



10. As soluções da equação pertencem ao conjunto $\{x \in \mathbb{R} : 5 - 2x > 0 \wedge 3 - x > 0\}$

$$\text{Como } -2x > -5 \wedge -x > -3 \Leftrightarrow 2x < 5 \wedge x < 3 \Leftrightarrow x < \frac{5}{2} \wedge x < 3 \Leftrightarrow x < \frac{5}{2},$$

temos que $x \in \left] -\infty, \frac{5}{2} \right[$, e resolvendo a equação, vem que:

$$\begin{aligned} (e^x - 1) \ln(5 - 2x) + e^x \ln(3 - x) = \ln(3 - x) &\Leftrightarrow (e^x - 1) \ln(5 - 2x) + e^x \ln(3 - x) - \ln(3 - x) = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (e^x - 1) \ln(5 - 2x) + \ln(3 - x)(e^x - 1) = 0 &\Leftrightarrow (e^x - 1)(\ln(5 - 2x) + \ln(3 - x)) = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (e^x - 1)(\ln((5 - 2x) \times (3 - x))) = 0 &\Leftrightarrow (e^x - 1)(\ln(15 - 5x - 6x + 2x^2)) = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (e^x - 1)(\ln(2x^2 - 11x + 15)) = 0 &\Leftrightarrow e^x - 1 = 0 \vee \ln(2x^2 - 11x + 15) = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow e^x = 1 \vee 2x^2 - 11x + 15 = e^0 &\Leftrightarrow x = \ln 1 \vee 2x^2 - 11x + 15 = 1 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x = 0 \vee 2x^2 - 11x + 14 = 0 &\Leftrightarrow x = 0 \vee x = \frac{-(-11) \pm \sqrt{(-11)^2 - 4(2)(14)}}{2 \times 2} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x = 0 \vee x = 2 \vee x = \frac{7}{2} \end{aligned}$$

Assim, como $x < \frac{5}{2}$, $x = \frac{7}{2}$ não é solução da equação, pelo que o conjunto dos números reais que são solução da equação, é: $\{0, 2\}$

Exame - 2022, 1.ª Fase

11. Resolvendo a inequação, temos:

$$\begin{aligned} e^{-x}(4 + e^{2x}) \geq 5 &\Leftrightarrow \frac{1}{e^x} \times (4 + e^{2x}) \geq 5 \Leftrightarrow \frac{4}{e^x} + \frac{e^{2x}}{e^x} \geq 5 \Leftrightarrow \frac{4}{e^x} + \frac{e^{2x}}{e^x} \geq \frac{5e^x}{e^x} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 4 + e^{2x} \geq 5e^x \Leftrightarrow (e^x)^2 - 5e^x + 4 \geq 0 \end{aligned}$$

Considerando $y = e^x$, temos que: $y^2 - 5y + 4 \geq 0$

Como $y^2 - 5y + 4 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4(1)(4)}}{2 \times 1} \Leftrightarrow y = 1 \vee y = 4$, e o coeficiente de y^2 é positivo, então: $y^2 - 5y + 4 \geq 0 \Leftrightarrow y \leq 1 \vee y \geq 4$

Assim, como $y = e^x$, temos que:

$$e^{-x}(4 + e^{2x}) \geq 5 \Leftrightarrow e^x \leq 1 \vee e^x \geq 4 \Leftrightarrow x \leq \ln 1 \vee x \geq \ln 4 \Leftrightarrow x \leq 0 \vee x \geq \ln 4$$

E como $-2 \leq x \leq 2$, temos que o conjunto dos números reais que verificam a condição dada é:

$$(-\infty, 0] \cup [\ln 4, +\infty) \cap [-2, 2] = [-2, 0] \cup [\ln 4, 2]$$

Exame - 2021, Ép. especial



12. Como no instante t_1 a temperatura da substância foi 30°C , temos que:

$$\begin{aligned} T(t_1) = 30 &\Leftrightarrow 20 + 100e^{-k \cdot t_1} = 30 \Leftrightarrow 100e^{-k \cdot t_1} = 30 - 20 \Leftrightarrow e^{-k \cdot t_1} = \frac{10}{100} \Leftrightarrow e^{-k \cdot t_1} = \frac{1}{10} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \ln\left(\frac{1}{10}\right) = -k \cdot t_1 \Leftrightarrow k \cdot t_1 = -\ln\left(\frac{1}{10}\right) \Leftrightarrow k = \frac{-\ln 1 - \ln 10}{t_1} \Leftrightarrow k = \frac{-0 + \ln 10}{t_1} \Leftrightarrow k = \frac{\ln 10}{t_1} \end{aligned}$$

Resposta: **Opção C**

Exame – 2021, 2.ª Fase

13. Determinando o domínio da condição, temos:

$$1 - x > 0 \wedge 3 - 2x > 0 \Leftrightarrow -x > -1 \wedge -2x > -3 \Leftrightarrow x < 1 \wedge x < \frac{3}{2} \Leftrightarrow x < 1$$

Resolvendo a equação, temos:

$$\begin{aligned} x \ln(1-x) - \ln(1-x) &= (1-x) \ln(3-2x) \Leftrightarrow \ln(1-x)(x-1) = -(x-1) \ln(3-2x) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \ln(1-x) = -\frac{(x-1) \ln(3-2x)}{x-1} \wedge \underbrace{x-1 \neq 0}_{\text{Cond. universal no domínio}} \Leftrightarrow \ln(1-x) = -\ln(3-2x) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \ln(1-x) + \ln(3-2x) = 0 \Leftrightarrow \ln(1-x) + \ln(3-2x) = 0 \Leftrightarrow \ln\left((1-x)(3-2x)\right) = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (1-x)(3-2x) = e^0 \Leftrightarrow 3-2x-3x+2x^2 = 1 \Leftrightarrow 2x^2-5x+2 = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4(2)(2)}}{2 \times 2} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \vee \underbrace{x=2}_{\text{Cond. impossível no domínio}} \end{aligned}$$

$$\text{C.S.} = \left\{ \frac{1}{2} \right\}$$

Exame – 2021, 2.ª Fase

14. Resolvendo a equação, temos:

$$\begin{aligned} \ln\left((1-x)e^{x-1}\right) = x &\Leftrightarrow e^x = (1-x)e^{x-1} \Leftrightarrow e^x = (1-x) \times \frac{e^x}{e} \Leftrightarrow \frac{e^x}{e^x} = \frac{1-x}{e} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 1 = \frac{1-x}{e} \Leftrightarrow e = 1-x \Leftrightarrow x = 1-e \end{aligned}$$

Determinando o domínio da condição, temos:

$$(1-x)e^{x-1} > 0 \Leftrightarrow_{e^{x-1} > 0} 1-x > 0 \Leftrightarrow -x > -1 \Leftrightarrow x < 1$$

Como $1-e < 1$, temos que $1-e$ é solução da equação.

$$\text{C.S.} = \{1-e\}$$

Exame – 2021, 1.ª Fase



15. Designando por a e b os dois números reais positivos, e usando as propriedades dos logaritmos, podemos determinar o produto ab :

$$\log_8 a + \log_8 b = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \log_8(a \times b) = \frac{1}{3} \Leftrightarrow ab = 8^{\frac{1}{3}} \Leftrightarrow ab = \sqrt[3]{8} \Leftrightarrow ab = 2$$

Resposta: **Opção A**

Exame – 2020, 2.ª Fase

16.

- 16.1. Resolvendo a equação dada, para $x \in]-\infty, 2]$, temos:

$$\begin{aligned} f(x) = 2x + 1 &\Leftrightarrow x + \ln(e^x + 1) = 2x + 1 \Leftrightarrow \ln(e^x + 1) = -x + 2x + 1 \Leftrightarrow \ln(e^x + 1) = x + 1 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow e^{x+1} = e^x + 1 \Leftrightarrow e^x \times e - e^x = 1 \Leftrightarrow e^x(e - 1) = 1 \Leftrightarrow e^x = \frac{1}{e - 1} \Leftrightarrow x = \ln\left(\frac{1}{e - 1}\right) \end{aligned}$$

Apresentando a única solução na forma $-\ln k$, $k > 0$, vem:

$$\ln\left(\frac{1}{e - 1}\right) = \ln((e - 1)^{-1}) = (-1)\ln(e - 1) = -\ln(e - 1) \quad \left(\text{como } e > 1, \text{ então } e - 1 > 0\right)$$

- 16.2. Resolvendo a equação $y = f(x) - x$ em ordem a x , para determinar a expressão algébrica da função h^{-1} , temos:

$$\begin{aligned} y = f(x) - x &\Leftrightarrow y = x + \ln(e^x + 1) - x \Leftrightarrow y = \ln(e^x + 1) \Leftrightarrow e^y = e^x + 1 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow e^y = e^x + 1 \Leftrightarrow e^y - 1 = e^x \Leftrightarrow \ln(e^y - 1) = x \end{aligned}$$

Desta forma temos que, para $x \in]-\infty, 2]$, $h^{-1}(x) = \ln(e^x - 1)$

Resposta: **Opção C**

Exame – 2020, 1.ª Fase

17. Resolvendo a equação, temos:

$$\begin{aligned} (x - 1) \times h(x) + 2e^{-x} = 3 &\Leftrightarrow (x - 1) \times \frac{e^x}{x - 1} + 2 \times \frac{1}{e^x} = 3 \Leftrightarrow e^x + \frac{2}{e^x} - 3 = 0 \Leftrightarrow \frac{(e^x)^2}{e^x} + \frac{2}{e^x} - \frac{3e^x}{e^x} = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (e^x)^2 + 2 - 3e^x = 0 \Leftrightarrow (e^x)^2 - 3e^x + 2 = 0 \Leftrightarrow \end{aligned}$$

Fazendo a substituição de variável $y = e^x$, e usando a fórmula resolvente, vem:

$$\Leftrightarrow y^2 - 3y + 2 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4(1)(2)}}{2} \Leftrightarrow y = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 8}}{2} \Leftrightarrow y = \frac{3 \pm 1}{2} \Leftrightarrow y = 1 \vee y = 2$$

Como $y = e^x$, temos que:

$$e^x = 1 \vee e^x = 2 \Leftrightarrow x = \ln 1 \vee x = \ln 2 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = \ln 2$$

C.S. = $\{0, \ln 2\}$

Exame – 2019, 2.ª Fase



18. Usando as propriedades dos logaritmos, temos que:

$$\ln(a^2 - b^2) - 2\ln(a + b) = \ln(a^2 - b^2) - \ln(a + b)^2 = \ln \frac{a^2 - b^2}{(a + b)^2} = \ln \frac{(a + b)(a - b)}{(a + b)(a + b)} = \ln \frac{a - b}{a + b}$$

Como $a + b = 2(a - b)$, obtendo o valor da aproximação com a calculadora, temos que:

$$\ln \frac{a - b}{a + b} = \ln \frac{a - b}{2(a - b)} = \ln \frac{1}{2} \approx -0,7$$

Resposta: **Opção C**

Exame – 2019, 1.ª Fase

19. Resolvendo a inequação, como $3 = \log_2 8$, temos que:

$$\log_2(x + 1) \leq 3 - \log_2(8 - x) \Leftrightarrow \log_2(x + 1) + \log_2(8 - x) \leq 3 \Leftrightarrow \log_2((x + 1) \times (8 - x)) \leq \log_2 8 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x + 1)(8 - x) \leq 8 \Leftrightarrow 8x - x^2 + 8 - x \leq 8 \Leftrightarrow 7x - x^2 \leq 8 - 8 \Leftrightarrow 7x - x^2 \leq 0 \Leftrightarrow x(7 - x) \leq 0$$

Mas como a expressão $\log_2(x + 1) \leq 3 - \log_2(8 - x)$ só está definida se:

$$x + 1 > 0 \wedge 8 - x > 0 \Leftrightarrow x > -1 \wedge 8 > x \Leftrightarrow x > -1 \wedge x < 8$$

E como $x(7 - x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee 7 - x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee 7 = x$, podemos estudar o sinal de $x(7 - x)$, para os valores de x definidos, recorrendo a uma tabela:

x	-1		0		7		8
x	n.d.	-	0	+	+	+	n.d.
$7 - x$	n.d.	+	+	+	0	-	n.d.
$x(7 - x)$	n.d.	-	0	+	0	-	n.d.

Pelo que o conjunto dos números reais que são soluções da inequação é: $] - 1, 0] \cup [7, 8[$

Exame – 2018, 2.ª Fase

20. Considerando a função h , podemos observar que:

$$h(1) = 1 + 1 \Leftrightarrow h(1) = 2 \Leftrightarrow h^{-1}(2) = 1$$

E assim, vem que:

$$(f \circ h^{-1})(2) = f(h^{-1}(2)) = f(1) = \frac{\ln(1^2) + 2}{1} = \frac{0 + 2}{1} = 2$$

Resposta: **Opção C**

Exame – 2018, 2.ª Fase



21. Simplificando a igualdade, vem que:

$$\ln b = 4 \ln a \Leftrightarrow \ln b = \ln(a^4) \Leftrightarrow b = a^4$$

E assim, resolvendo a inequação, temos:

$$a^x \geq b^{\frac{1}{x}} \Leftrightarrow a^x \geq (a^4)^{\frac{1}{x}} \Leftrightarrow a^x \geq a^{\frac{4}{x}} \Leftrightarrow x \geq \frac{4}{x} \Leftrightarrow x - \frac{4}{x} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x^2}{x} - \frac{4}{x} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 - 4}{x} \geq 0$$

Determinando as soluções da equação $\frac{x^2 - 4}{x} = 0$, temos:

$$\frac{x^2 - 4}{x} = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4 = 0 \wedge x \neq 0 \Leftrightarrow x^2 = 4 \wedge x \neq 0 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{4} \wedge x \neq 0 \Leftrightarrow x = -2 \vee x = 2$$

Estudando a variação do sinal de $\frac{x^2 - 4}{x}$, para $x \neq 0$, vem:

x	$-\infty$	-2		0		2	$+\infty$
$x^2 - 4$	+	0	-	-	-	0	+
x	-	-	-	0	+	+	+
$\frac{x^2 - 4}{x}$	-	0	+	n.d.	-	0	+

Assim, como $a^x \geq b^{\frac{1}{x}} \Leftrightarrow \frac{x^2 - 4}{x} > 0$, para $a > 1$, temos que o conjunto solução de $a^x \geq b^{\frac{1}{x}}$ é:

$$C.S. = [-2, 0[\cup]2, +\infty[$$

Exame – 2018, 1.ª Fase

22. Usando as propriedades dos logaritmos, temos que:

$$\begin{aligned} 4 + \log_a(5^{\ln a}) &= 4 + \ln a \times (\log_a 5) = 4 + \frac{\log_a a}{\log_a e} \times (\log_a 5) = 4 + \frac{1 \times \log_a 5}{\log_a e} = \\ &= 4 + \frac{\log_a 5}{\log_a e} = 4 + \ln 5 = \ln(e^4) + \ln 5 = \ln(e^4 \times 5) = \ln(5e^4) \end{aligned}$$

Resposta: **Opção B**

Exame – 2017, Ép. especial

23.

23.1. Como duas horas após o início do processo ($t = 2$), a massa de poluente é metade da existente ao fim de uma hora ($t = 1$), então temos que $p(2) = \frac{p(1)}{2}$

Assim, resolvendo a equação anterior e escrevendo o valor de k forma solicitada, vem:

$$\begin{aligned} p(2) = \frac{p(1)}{2} &\Leftrightarrow 120 e^{-k \times 2} = \frac{120 e^{-k \times 1}}{2} \Leftrightarrow \frac{2 \times 120}{120} = \frac{e^{-k}}{e^{-2k}} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 2 = e^{-k - (-2k)} \Leftrightarrow 2 = e^{-k + 2k} \Leftrightarrow 2 = e^k \Leftrightarrow k = \ln 2 \end{aligned}$$



23.2. Calculando as imagens dos objetos 0 e 3, temos:

$$p(0) = 120 e^{-0,7 \times 0} = 120 e^0 = 120 \times 1 = 120$$

$$p(3) = 120 e^{-0,7 \times 3} = 120 e^{-2,1} \approx 14,69$$

E assim, calculando a taxa média de variação da função p no intervalo $[0, 3]$ e apresentando o resultado arredondado às unidades, temos

$$TVM_{[0,3]} = \frac{p(3) - p(0)}{3 - 0} \approx \frac{14,69 - 120}{3} \approx \frac{-105,31}{3} \approx -35$$

No contexto da situação descrita, o valor da taxa média de variação significa que nas primeiras 3 horas do processo, a massa de poluente no tanque, decresceu, em média, 35 gramas por hora, aproximadamente.

Exame – 2017, Ép. especial

24. Resolvendo a inequação, temos que:

$$f(x) > 2 \ln x \Leftrightarrow \frac{\ln x}{x} > 2 \ln x \Leftrightarrow \ln x > x \times 2 \ln x \Leftrightarrow \ln x - x \times 2 \ln x > 0 \Leftrightarrow (\ln x)(1 - 2x) > 0$$

Como o domínio da função é \mathbb{R}^+ estudamos o sinal do produto, em $]0, +\infty[$, através de um quadro de variação de sinal, para resolver a inequação:

x	0		$\frac{1}{2}$		1	$+\infty$
$\ln x$	n.d.	-	-	-	0	+
$1 - 2x$	n.d.	+	0	-	-	-
$(\ln x)(1 - 2x)$	n.d.	-	0	+	0	-

Assim, temos que o conjunto solução da inequação é $\left] \frac{1}{2}, 1 \right[$

Exame – 2017, 2.ª fase

25. Temos que $f(0) = 9 - 2,5 (e^{1-0,2 \times 0} + e^{0,2 \times 0 - 1}) = 9 - 2,5 (e^1 + e^{-1}) \approx 1,28$

E assim, substituindo o valor aproximado de $f(0)$ na equação $\sqrt{f(0)^2 + x^2} = 2$, vem:

$$\begin{aligned} \sqrt{1,28^2 + x^2} = 2 &\Leftrightarrow_{1,28^2 + x^2 > 0} \left(\sqrt{1,28^2 + x^2} \right)^2 = 2^2 \Leftrightarrow_{1,28^2 + x^2 > 0} 1,28^2 + x^2 = 4 \Leftrightarrow x^2 = 4 - 1,28^2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x^2 = 2,3616 \Leftrightarrow x = \pm \sqrt{2,3616} \end{aligned}$$

Como $x \in [0, 7]$, então a solução da equação é $x = \sqrt{2,3616} \approx 1,5$

Como $\overline{SP}^2 = \overline{OP}^2 + \overline{OS}^2$, e $\overline{OP} = f(0)$ e $\overline{OS} = x$, então temos que $\sqrt{f(0)^2 + x^2}$ é a distância \overline{SP} .

Assim a solução da equação $\sqrt{f(0)^2 + x^2} = 2$ é a abscissa do ponto S , na posição em que dista duas unidades do ponto P , ou seja, o ponto da superfície do rio que está a 2 metros do topo da parede esquerda que suporta a ponte está a 1,5 metros de distância da base da mesma parede.

Exame – 2017, 1.ª fase



26. Usando a definição de logaritmo, temos que:

$$a = b^3 \Leftrightarrow \log_b a = 3$$

Pelas propriedades operatórias dos logaritmos, vem que:

$$\log_a b + \log_b a = \frac{\log_b b}{\log_b a} + 3 = \frac{1}{3} + 3 = \frac{1}{3} + \frac{9}{3} = \frac{10}{3}$$

Resposta: **Opção C**

Exame – 2016, Ép. especial

27. Pela definição de função composta temos que:

$$(f \circ g)(x) = 0 \Leftrightarrow f(g(x)) = 0 \Leftrightarrow f(\ln x) = 0$$

Como, pela observação do gráfico, podemos verificar que:

$$f(-1) = 0 \wedge f(1) = 0$$

Desta forma, vem que:

$$(f \circ g)(x) = 0 \Leftrightarrow \ln x = -1 \wedge \ln x = 1 \Leftrightarrow x = e^{-1} \wedge x = e^1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{e} \wedge x = e$$

Resposta: **Opção D**

Exame – 2016, Ép. especial

28.

28.1. De acordo com os dados do enunciado temos que $x = 25$, pelo que a velocidade constante da nave, em quilómetros por segundo, quando termina a queima do combustível é dada por:

$$V(25) = 3 \ln \left(\frac{25 + 300}{25 + 60} \right) = 3 \ln \left(\frac{325}{85} \right) \approx 4,02 \text{ km/s}$$

Assim, como a relação entre o tempo (t), a distância (d) e a velocidade (V), em segundos, arredondada às unidades, é:

$$V = \frac{d}{t} \Leftrightarrow t = \frac{d}{V}$$

Temos que para viajar 200 quilómetros ($d = 200$) a esta velocidade ($V = 4,02$), o tempo necessário é:

$$t = \frac{200}{4,02} \approx 50 \text{ s}$$

28.2. Pretende-se determinar o valor de x associado ao valor de $V = 3$, ou seja, a solução da equação $V(x) = 3$

Resolvendo a equação, e arredondando o resultado às unidades, vem que:

$$\begin{aligned} V(x) = 3 &\Leftrightarrow 3 \ln \left(\frac{x + 300}{x + 60} \right) = 3 \Leftrightarrow \ln \left(\frac{x + 300}{x + 60} \right) = \frac{3}{3} \Leftrightarrow \ln \left(\frac{x + 300}{x + 60} \right) = 1 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{x + 300}{x + 60} = e^1 \Leftrightarrow_{x \neq -60} x + 300 = e(x + 60) \Leftrightarrow x + 300 = ex + 60e \Leftrightarrow x - ex = 60e - 300 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x(1 - e) = 60e - 300 \Leftrightarrow x = \frac{60e - 300}{1 - e} \Rightarrow x \approx 80 \text{ milhares de toneladas} \end{aligned}$$

Exame – 2016, Ép. especial



29. Simplificando a expressão da inequação, temos que:

$$g(0) \times g(k) < 0 \Leftrightarrow \ln(0+k) \times \ln(k+k) < 0 \Leftrightarrow \ln k \times \ln(2k) < 0$$

Atendendo a que:

- $\ln k = 0 \Leftrightarrow k = e^0 \Leftrightarrow k = 1$
- $\ln(2k) = 0 \Leftrightarrow 2k = e^0 \Leftrightarrow 2k = 1 \Leftrightarrow k = \frac{1}{2}$

Como k é um número real positivo ($k \in]0, +\infty[$) estudamos o sinal do produto, em $]0, +\infty[$, através de um quadro de variação de sinal, para resolver a inequação:

k	0		$\frac{1}{2}$		1	$+\infty$
$\ln k$	n.d.	-	-	-	0	+
$\ln(2k)$	n.d.	-	0	+	+	+
$g(0) \times g(k)$	n.d.	+	0	-	0	+

Pelo que se concluí que se $g(0) \times g(k) < 0$, então $k \in \left] \frac{1}{2}, 1 \right[$

Exame – 2016, Ép. especial

30. Usando as propriedades dos logaritmos, temos que:

$$\log_a(ab^3) = \log_a a + \log_a(b^3) = 1 + 3 \log_a b$$

E assim, vem que:

$$\log_a(ab^3) = 5 \Leftrightarrow 1 + 3 \log_a b = 5 \Leftrightarrow \log_a b = \frac{5-1}{3} \Leftrightarrow \log_a b = \frac{4}{3}$$

Logo, vem que:

$$\log_b a = \frac{\log_a a}{\log_a b} = \frac{1}{\log_a b} = \frac{1}{\frac{4}{3}} = \frac{3}{4}$$

Resposta: **Opção B**

Exame – 2016, 2.ª Fase

31. Temos que $x = 0,003$ e como o empréstimo será pago em prestações mensais de 24 euros então $p = 24$

Substituindo estes valores na expressão conhecida, e resolvendo a equação, vem:

$$24 = \frac{600(0,003)}{1 - e^{-n \times 0,003}} \Leftrightarrow \underset{(1)}{24 - 24e^{-0,003n} = 1,8} \Leftrightarrow -24e^{-0,003n} = 1,8 - 24 \Leftrightarrow e^{-0,003n} = \frac{-22,2}{-24} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^{-0,003n} = 0,925 \Leftrightarrow -0,003n = \ln 0,925 \Leftrightarrow n = \frac{\ln 0,925}{-0,003}$$

(1) Como $n \in \mathbb{N}$, $n \neq 0$, então $1 - e^{-0,003n} \neq 0$

Como $\frac{\ln 0,925}{-0,003} \approx 26$, concluímos que o José irá demorar 26 meses a pagar o empréstimo.

Exame – 2016, 2.ª Fase



32. Determinando o declive da reta que contém os pontos de abscissas $-a$ e a , vem que:

$$\begin{aligned} m &= \frac{f(a) - f(-a)}{a - (-a)} = \frac{\ln\left(\frac{a-1}{a+1}\right) - \ln\left(\frac{-a-1}{-a+1}\right)}{a+a} = \frac{\ln\left(\frac{a-1}{a+1}\right) - \ln\left(\frac{-(a+1)}{-(a-1)}\right)}{2a} = \\ &= \frac{\ln\left(\frac{a-1}{a+1}\right) - \ln\left(\frac{a+1}{a-1}\right)}{2a} = \frac{\ln\left(\frac{a-1}{a+1}\right) - \ln\left(\left(\frac{a-1}{a+1}\right)^{-1}\right)}{2a} = \frac{\ln\left(\frac{a-1}{a+1}\right) - (-1)\ln\left(\frac{a-1}{a+1}\right)}{2a} = \\ &= \frac{\ln\left(\frac{a-1}{a+1}\right) + \ln\left(\frac{a-1}{a+1}\right)}{2a} = \frac{2\ln\left(\frac{a-1}{a+1}\right)}{2a} = \frac{\ln\left(\frac{a-1}{a+1}\right)}{a} = \frac{f(a)}{a} \end{aligned}$$

Logo a equação da reta é da forma $y = \frac{f(a)}{a} \times x + b$

Como o ponto de coordenadas $(a, f(a))$ pertence à reta, podemos substituir estas coordenadas e o valor do declive, na expressão geral de uma reta, para determinar o valor da ordenada na origem:

$$f(a) = \frac{f(a)}{a} \times a + b \Leftrightarrow f(a) = f(a) + b \Leftrightarrow f(a) - f(a) = b \Leftrightarrow 0 = b$$

Como a ordenada na origem é zero, podemos concluir que a reta passa na origem do referencial.

Exame – 2016, 1.ª Fase

33. Como o ponto P pertence ao gráfico de f , substituindo as suas coordenadas na expressão algébrica da função, temos que

$$8 = e^{a \ln 2} \Leftrightarrow 8 = (e^{\ln 2})^a \Leftrightarrow 8 = 2^a \Leftrightarrow a = \log_2 8 \Leftrightarrow a = 3$$

Resposta: **Opção C**

Exame – 2015, Ép. especial

34.

34.1. Calculando as imagens dos objetos 20 e 10, temos

$$N(20) = \frac{200}{1 + 50e^{-0,25 \times 20}} = \frac{200}{1 + 50e^{-5}} \approx 149,60$$

$$N(10) = \frac{200}{1 + 50e^{-0,25 \times 10}} = \frac{200}{1 + 50e^{-2,5}} \approx 39,18$$

E assim, calculando a taxa média de variação da função N no intervalo $[10, 20]$ e apresentando o resultado arredondado às unidades, temos

$$TVM_{[10,20]} = \frac{N(20) - N(10)}{20 - 10} \approx \frac{149,60 - 39,18}{10} \approx \frac{110,42}{10} \approx 11,042 \approx 11$$

No contexto da situação descrita, o valor da taxa média de variação significa que entre os anos de 1900 e 2000 o número de habitantes, da região do globo em causa, cresceu em média aproximadamente 11 milhões em cada década.



34.2. Resolvendo em ordem a t , temos:

$$\begin{aligned}
 N &= \frac{200}{1 + 50e^{-0,25t}} \Leftrightarrow 1 + 50e^{-0,25t} = \frac{200}{N} \Leftrightarrow 50e^{-0,25t} = \frac{200}{N} - 1 \Leftrightarrow 50e^{-0,25t} = \frac{200}{N} - \frac{N}{N} \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow 50e^{-0,25t} &= \frac{200 - N}{N} \Leftrightarrow e^{-0,25t} = \frac{200 - N}{50N} \Leftrightarrow -0,25t = \ln\left(\frac{200 - N}{50N}\right) \Leftrightarrow t = \frac{\ln\left(\frac{200 - N}{50N}\right)}{-0,25} \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow t &= -\frac{1}{0,25} \ln\left(\frac{200 - N}{50N}\right) \Leftrightarrow t = -\frac{1}{\frac{25}{100}} \ln\left(\frac{200 - N}{50N}\right) \Leftrightarrow t = -\frac{100}{25} \ln\left(\frac{200 - N}{50N}\right) \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow t &= -4 \ln\left(\frac{200 - N}{50N}\right) \Leftrightarrow t = \ln\left(\frac{200 - N}{50N}\right)^{-4} \Leftrightarrow t = \ln\left(\frac{50N}{200 - N}\right)^4
 \end{aligned}$$

Exame – 2015, Ép. especial

35. Usando as propriedades dos logaritmos, temos que

$$\log_a(a^2b) = \log_a(a^2) + \log_a b = 2\log_a a + \frac{\log_b b}{\log_b a} = 2 \times 1 + \frac{1}{\frac{1}{3}} = 2 + 3 = 5$$

Resposta: **Opção D**

Exame – 2015, 2.ª Fase

36. Para $x \in]-\infty, 3]$, $f(x) = 1 + xe^x$, logo, vem que

$$f(x) - 2x > 1 \Leftrightarrow 1 + xe^x - 2x > 1 \Leftrightarrow xe^x - 2x > 0 \Leftrightarrow x(e^x - 2) > 0$$

Determinando as soluções da equação $x(e^x - 2) = 0$, temos:

$$x(e^x - 2) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee e^x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee e^x = 2 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = \ln 2$$

Estudando a variação do sinal de $x(e^x - 2)$, em $]-\infty, 3]$, vem:

x	$-\infty$	0		$\ln 2$		3
x		–	0	+	+	+
$e^x - 2$		–	–	–	0	+
$x(e^x - 2)$		+	0	–	0	+

Assim, como $f(x) - 2x > 1 \Leftrightarrow x(e^x - 2) > 0$, temos que o conjunto solução de $f(x) - 2x > 1$ é

$$C.S. =]-\infty, 0[\cup]\ln 2, 3]$$

Exame – 2015, 2.ª Fase

37. Usando as propriedades dos logaritmos, temos que

$$\log_3\left(\frac{3^k}{9}\right) = \log_3(3^k) - \log_3 9 = k \times \log_3 3 - 2 = k - 2$$

Resposta: **Opção B**

Exame – 2015, 1.ª Fase



38. A distância do centro da esfera ao ponto P , no momento em que se inicia o movimento, em centímetros, é

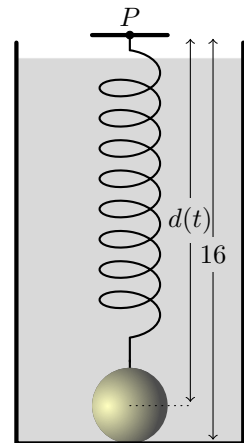
$$d(0) = 10 + (5 - 0)e^{-0,05 \times 0} = 10 + (5)e^0 = 10 + 5 \times 1 = 15$$

Como, no momento em que se inicia o movimento, o ponto da esfera mais afastado do ponto P está a 16 cm (do ponto P), o raio da esfera, em centímetros, é

$$r = 16 - d(0) = 16 - 15 = 1$$

Pelo que, calculando o volume da esfera em cm^3 , e arredondado o resultado às centésimas, temos

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi \times 1^3 = \frac{4\pi}{3} \approx 4,19$$



Exame – 2015, 1.ª Fase

39. Como $10^2 = 100 \Leftrightarrow \log_{10} 100 = 2$, usando as propriedades dos logaritmos, temos que

$$\log(100b) = \log 100 + \log b = 2 + 2014 = 2016$$

Resposta: **Opção A**

Teste Intermédio 12.º ano – 30.04.2014

40. Simplificando a condição $\ln(e^{-x} - a) \leq 0$, como a função logarítmica tem imagens não positivas para $x \in]0,1]$, temos:

$$\begin{aligned} \ln(e^{-x} - a) \leq 0 &\Leftrightarrow 0 < e^{-x} - a \leq 1 \Leftrightarrow e^{-x} - a > 0 \wedge e^{-x} - a \leq 1 \Leftrightarrow e^{-x} > a \wedge e^{-x} \leq 1 + a \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow -x > \ln(a) \wedge -x \leq \ln(1 + a) \Leftrightarrow x < -\ln(a) \wedge x \geq -\ln(1 + a) \end{aligned}$$

Assim, $S = [-\ln(1 + a), -\ln(a)[$

Resposta: **Opção B**

Exame – 2013, Ép. especial

41. Usando as propriedades dos logaritmos, temos que

$$\begin{aligned} \log_a (a^5 \times \sqrt[3]{b}) + a^{\log_a b} &= \log_a (a^5) + \log_a \sqrt[3]{b} + b = 5 + \log_a (b^{\frac{1}{3}}) + b = \\ &= 5 + \frac{1}{3} \log_a b + b = 5 + \frac{1}{3} \times 3 + b = 5 + 1 + b = 6 + b \end{aligned}$$

Resposta: **Opção A**

Exame – 2013, 2.ª Fase

42. Usando as propriedades dos logaritmos, e sabendo que $\log_a b = 2$, temos que

$$\log_b a + \log_a \sqrt{b} = \frac{\log_a a}{\log_a b} + \log_a (b^{\frac{1}{2}}) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \log_a b = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times 2 = \frac{1}{2} \times 3 = \frac{3}{2}$$

Resposta: **Opção D**

Teste Intermédio 12.º ano – 28.02.2013



43.

- 43.1. Designando por A o centro do balão A, por B o centro do balão B e por P um ponto com a mesma altura do balão A, situado na perpendicular ao solo em que está o balão B, temos que o triângulo $[ABP]$ é retângulo em P , e pretendemos calcular \overline{AB}

Assim, temos que $\overline{AP} = 7$ e $\overline{BP} = b(5) - a(5)$

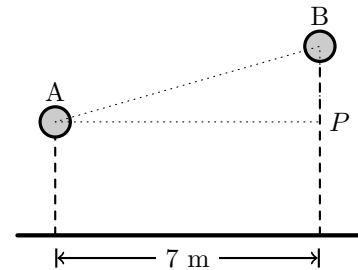
Calculado $b(5)$ e $a(5)$, temos

$$b(5) = 6e^{-0,06 \times 5} - 0,02 \times 5 + 2 = 6e^{-0,3} - 0,1 + 2 \approx 6,345$$

$$a(5) = e^{-0,03 \times 5} - 0,02 \times 5 + 3 = e^{-0,15} - 0,1 + 3 \approx 3,761$$

E assim, vem que

$$\overline{BP} = b(5) - a(5) \approx 2,584$$



E assim, recorrendo ao Teorema de Pitágoras, vem $\overline{AB}^2 = \overline{AP}^2 + \overline{BP}^2$:

$$\overline{AB}^2 = 7^2 + 2,584^2 \Leftrightarrow \overline{AB}^2 = 55,677 \Rightarrow \overline{AB} = \sqrt{55,677} \Rightarrow \overline{AB} \approx 7,5 \text{ m}$$

- 43.2. Calculando o tempo decorrido entre o instante inicial e o instante em que os centros dos dois balões estavam à mesma distância do solo, em segundos, temos:

$$a(t) = b(t) \Leftrightarrow e^{-0,03t} - 0,02t + 3 = 6e^{-0,06t} - 0,02t + 2 \Leftrightarrow e^{-0,03t} + 3 = 6e^{-0,06t} + 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^{-0,03t} - 6e^{-0,06t} + 3 - 2 = 0 \Leftrightarrow e^{-0,03t} - 6e^{2 \times (-0,03t)} + 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^{-0,03t} - 6(e^{-0,03t})^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow -6(e^{-0,03t})^2 + e^{-0,03t} + 1 = 0 \Leftrightarrow$$

Fazendo a substituição de variável $y = e^{-0,03t}$, e usando a fórmula resolvente, vem:

$$\Leftrightarrow -6y^2 + y + 1 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{-1 \pm \sqrt{(1)^2 - 4(-6)(1)}}{2(-6)} \Leftrightarrow y = \frac{-1 \pm \sqrt{1+24}}{-12} \Leftrightarrow y = \frac{-1 \pm \sqrt{25}}{-12} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{-1 \pm 5}{-12} \Leftrightarrow y = \frac{-6}{-12} \vee y = \frac{4}{-12} \Leftrightarrow y = \frac{1}{2} \vee y = -\frac{1}{3}$$

Como $y = e^{-0,03t}$, temos que:

$$e^{-0,03t} = \frac{1}{2} \vee e^{-0,03t} = -\frac{1}{3}$$

E como a equação $e^{-0,03t} = -\frac{1}{3}$ é impossível, podemos determinar única solução da equação:

$$e^{-0,03t} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow -0,03t = \ln\left(\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow t = \frac{\ln 1 - \ln 2}{-0,03} \Leftrightarrow t = \frac{0 - \ln 2}{-0,03} \Leftrightarrow t = \frac{\ln 2}{0,03}$$

Assim, arredondado o resultado às unidades, temos $t \approx 23$ s

Teste Intermédio 12.º ano – 28.02.2013

44. Como

$$\log_a \sqrt{c} = 3 \Leftrightarrow \log_a (c)^{\frac{1}{2}} = 3 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \log_a c = 3 \Leftrightarrow \log_a c = 6$$

e $\log_a b = c$, usando as propriedades dos logaritmos, temos que

$$\log_a \sqrt{b \times c} = \log_a (b \times c)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \log_a (b \times c) = \frac{1}{2} (\log_a b + \log_a c) = \frac{1}{2} (c + 6) = \frac{c + 6}{2} = \frac{c}{2} + 3$$

Resposta: **Opção C**

Exame – 2012, Ép. especial



45. Resolvendo a equação $f(x) = 0$, temos que

$$\begin{aligned} e^{x-2} - \frac{4e^{-x} + 4}{e^2} = 0 &\Leftrightarrow \frac{e^2 \times e^{x-2}}{e^2} - \frac{4e^{-x} + 4}{e^2} = 0 \Leftrightarrow \frac{e^2 \times e^{x-2}}{e^2} - \frac{4e^{-x} + 4}{e^2} = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{e^x}{e^2} - \frac{4e^{-x} + 4}{e^2} = 0 &\Leftrightarrow \frac{e^x}{e^2} - \frac{4e^{-x} + 4}{e^2} = 0 \Leftrightarrow \frac{e^x - 4e^{-x} - 4}{e^2} = 0 \Leftrightarrow_{e^2 \neq 0} e^x - 4e^{-x} - 4 = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow e^x - 4 \times \frac{1}{e^x} - 4 = 0 &\Leftrightarrow \frac{e^x \times e^x}{e^x} - \frac{4}{e^x} - \frac{4e^x}{e^x} = 0 \Leftrightarrow_{e^x \neq 0} (e^x)^2 - 4e^x - 4 = 0 \Leftrightarrow \end{aligned}$$

Fazendo a substituição de variável $y = e^x$, e usando a fórmula resolvente, vem:

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow y^2 - 4y - 4 = 0 &\Leftrightarrow y = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4(1)(-4)}}{2} \Leftrightarrow y = \frac{4 \pm \sqrt{16 + 16}}{2} \Leftrightarrow y = \frac{4 \pm \sqrt{32}}{2} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow y = \frac{4 \pm 4\sqrt{2}}{2} &\Leftrightarrow y = 2 + 2\sqrt{2} \vee y = 2 - 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

Como $y = e^x$, temos que:

$$e^x = 2 + 2\sqrt{2} \vee e^x = 2 - 2\sqrt{2}$$

E como $2 - 2\sqrt{2} < 0$, a equação $e^x = 2 - 2\sqrt{2}$ é impossível, pelo que podemos determinar o valor do único zero da função f :

$$e^x = 2 + 2\sqrt{2} \Leftrightarrow x = \ln(2 + 2\sqrt{2})$$

Exame – 2012, 1.ª Fase

46. Usando as propriedades dos logaritmos, e como $b = a^\pi \Leftrightarrow \log_a b = \pi$, temos que

$$\log_a (a^{12} \times b^{100}) = \log_a (a^{12}) + \log_a (b^{100}) = 12 \times \log_a (a) + 100 \times \log_a (b) = 12 \times 1 + 100 \times \pi = 12 + 100\pi \approx 326$$

Resposta: **Opção B**

Teste Intermédio 12.º ano – 24.05.2012

47.

47.1. Como $f(x) = 2 + \log_3 x$, então

$$\begin{aligned} f(x) \geq 4 + \log_3(x - 8) &\Leftrightarrow 2 + \log_3 x \geq 4 + \log_3(x - 8) \Leftrightarrow \log_3 x \geq 4 - 2 + \log_3(x - 8) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \log_3 x \geq 2 + \log_3(x - 8) &\Leftrightarrow \log_3 x \geq \log_3 9 + \log_3(x - 8) \Leftrightarrow \log_3 x \geq \log_3 (9 \times (x - 8)) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x \geq 9 \times (x - 8) &\Leftrightarrow x \geq 9x - 72 \Leftrightarrow x - 9x \geq -72 \Leftrightarrow -8x \geq -72 \Leftrightarrow 8x \leq 72 \Leftrightarrow x \leq 9 \end{aligned}$$

Mas como $\log_3(x)$ só está definido para $x > 0$, então a expressão $2 + \log_3 x \geq 4 + \log_3(x - 8)$ só está definida se $x > 0 \wedge x - 8 > 0$, ou seja, se $x > 0 \wedge x > 8$

Pelo que a condição $f(x) \geq 4 + \log_3(x - 8)$ é verdadeira para os valores de x tais que $x \leq 9 \wedge x > 8$, ou seja, no intervalo

$$] - \infty, 9] \cap] 8, + \infty [=] 8, 9]$$

47.2. Calculando o valor de $f(36^{1000}) - f(4^{1000})$, temos que

$$\begin{aligned} f(36^{1000}) - f(4^{1000}) &= 2 + \log_3 (36^{1000}) - \left(2 + \log_3 (4^{1000}) \right) = 2 + 1000 \log_3 (36) - 2 - 1000 \log_3 (4) = \\ &= 1000 \log_3 (36) - 1000 \log_3 (4) = 1000 \left(\log_3 (36) - \log_3 (4) \right) = 1000 \log_3 \frac{36}{4} = \\ &= 1000 \log_3 9 = 1000 \times 2 = 2000 \end{aligned}$$

Teste Intermédio 12.º ano – 13.03.2012



48. Calculando o número de frangos infetados no instante em que o vírus foi detetado ($x = 0$), temos:

$$f(0) = \frac{200}{1 + 3 \times 2^{3-0,1(0)}} = \frac{200}{1 + 3 \times 2^3} = \frac{200}{1 + 3 \times 8} = \frac{200}{1 + 24} = \frac{200}{25} = 8$$

O número de dias passados, em que o número de frangos infetados era dez vezes maior ($10 \times 8 = 80$), é a solução da equação $f(x) = 80$:

$$\begin{aligned} f(x) = 80 &\Leftrightarrow \frac{200}{1 + 3 \times 2^{3-0,1x}} = 80 \Leftrightarrow \frac{200}{80} = 1 + 3 \times 2^{3-0,1x} \Leftrightarrow 2,5 - 1 = 3 \times 2^{3-0,1x} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{1,5}{3} = 2^{3-0,1x} \Leftrightarrow 0,5 = 2^{3-0,1x} \Leftrightarrow \log_2 0,5 = 3 - 0,1x \Leftrightarrow \log_2 \frac{1}{2} = 3 - 0,1x \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \log_2 2^{-1} = 3 - 0,1x \Leftrightarrow -1 - 3 = -0,1x \Leftrightarrow -4 = -\frac{1}{10}x \Leftrightarrow 40 = x \end{aligned}$$

Ou seja, desde que o vírus foi detetado, até que o número de frangos infetados fosse dez vezes maior, passaram 40 dias.

Teste Intermédio 12.º ano – 13.03.2012

49.

49.1. Sabendo que $M = 7,1$, podemos calcular a energia sísmica irradiada, substituindo o valor dado em $M = \frac{2}{3} \log_{10}(E) - 2,9$:

$$7,1 = \frac{2}{3} \log_{10}(E) - 2,9 \Leftrightarrow \frac{(7,1 + 2,9) \times 3}{2} = \log_{10}(E) \Leftrightarrow \log_{10}(E) = 15 \Leftrightarrow E = 10^{15}$$

Como a relação entre o momento sísmico e a energia libertada é $E = M_0 \times 1,6 \times 10^{-5}$, substituindo o valor de E nesta expressão, vem:

$$\begin{aligned} 10^{15} = M_0 \times 1,6 \times 10^{-5} &\Leftrightarrow \frac{10^{15}}{1,6 \times 10^{-5}} = M_0 \Leftrightarrow M_0 = 0,625 \times 10^{15} \times 10^5 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow M_0 = 6,25 \times 10^{-1} \times 10^{20} \Leftrightarrow M_0 = 6,25 \times 10^{19} \end{aligned}$$

49.2. Sabemos que $M_1 - M_2 = \frac{2}{3}$.

Sejam E_1 a energia sísmica irradiada pelo sismo de magnitude M_1 e E_2 a energia sísmica irradiada pelo sismo de magnitude M_2 .

Assim, temos que $M_1 = \frac{2}{3} \log_{10}(E_1) - 2,9$ e $M_2 = \frac{2}{3} \log_{10}(E_2) - 2,9$, pelo que

$$M_1 - M_2 = \frac{2}{3} \log_{10}(E_1) - 2,9 - \left(\frac{2}{3} \log_{10}(E_2) - 2,9 \right)$$

Logo:

$$\begin{aligned} \frac{2}{3} \log_{10}(E_1) - 2,9 - \left(\frac{2}{3} \log_{10}(E_2) - 2,9 \right) &= \frac{2}{3} \Leftrightarrow \frac{2}{3} \log_{10}(E_1) - 2,9 - \frac{2}{3} \log_{10}(E_2) + 2,9 = \frac{2}{3} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{2}{3} \log_{10}(E_1) - \frac{2}{3} \log_{10}(E_2) &= \frac{2}{3} \Leftrightarrow \frac{2}{3} \left(\log_{10}(E_1) - \log_{10}(E_2) \right) = \frac{2}{3} \Leftrightarrow \log_{10}(E_1) - \log_{10}(E_2) = 1 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \log_{10} \left(\frac{E_1}{E_2} \right) &= 1 \Leftrightarrow \frac{E_1}{E_2} = 10^1 \Leftrightarrow E_1 = 10 \times E_2 \end{aligned}$$

Assim, a energia sísmica irradiada pelo sismo de magnitude M_1 é dez vezes superior à energia sísmica irradiada pelo sismo de magnitude M_2 .

Exame – 2011, Prova especial



50. Como a máquina agrícola funcionou durante 20 minutos e, nesse período de tempo, consumiu 2 litros de combustível, logo a quantidade de combustível que existia no depósito no momento inicial era a quantidade medida ao fim de 20 minutos acrescida dos 2 litros consumidos, ou seja,

$$Q(0) = Q(20) + 2 \Leftrightarrow Q(0) - Q(20) = 2$$

Logo, determinando o valor de k , temos que

$$\begin{aligned} Q(0) - Q(20) = 2 &\Leftrightarrow 12 + \log_3(81 - k \times 0^2) - (12 + \log_3(81 - k \times 20^2)) = 2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 12 + \log_3(81 - 0) - 12 - \log_3(81 - 400k) = 2 \Leftrightarrow \log_3(81) - \log_3(81 - 400k) = 2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 4 - \log_3(81 - 400k) = 2 \Leftrightarrow -\log_3(81 - 400k) = 2 - 4 \Leftrightarrow \log_3(81 - 400k) = 2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 3^2 = 81 - 400k \Leftrightarrow 400k = 81 - 3^2 \Leftrightarrow k = \frac{72}{400} \Leftrightarrow k = \frac{9}{50} \end{aligned}$$

Exame – 2011, Ép. especial

51.

- 51.1. Começamos por calcular o número de nenúfares, às zero horas do dia 1 de Março de 2010, no lago A , ou seja, aos zero dias:

$$N_A(0) = \frac{120}{1 + 7 \times e^{-0,2 \times 0}} = \frac{120}{1 + 7 \times e^0} = \frac{120}{1 + 7 \times 1} = \frac{120}{8} = 15$$

Calculando o número aproximado de nenúfares, no lago A , 7 dias depois, temos:

$$N_A(7) = \frac{120}{1 + 7 \times e^{-0,2 \times 7}} = \frac{120}{1 + 7 \times e^{-1,4}} \approx 44,02$$

Assim temos que o aumento do número de nenúfares, no lago A , nos primeiros 7 dias, arredondado às unidades é

$$N_A(7) - N_A(0) \approx 44,02 - 15 \approx 29 \text{ nenúfares}$$

- 51.2. O número de dias necessários, após as zero horas do dia 1 de Março de 2010, para que o número de nenúfares existentes no lago A seja igual ao número de nenúfares existentes no lago B é a solução da equação $N_A(t) = N_B(t)$:

$$\begin{aligned} N_A(t) = N_B(t) &\Leftrightarrow \frac{120}{1 + 7 \times e^{-0,2t}} = \frac{150}{1 + 50 \times e^{-0,4t}} \Leftrightarrow 120(1 + 50 \times e^{-0,4t}) = 150(1 + 7 \times e^{-0,2t}) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 120 + 6000 \times e^{-0,4t} = 150 + 1050 \times e^{-0,2t} \Leftrightarrow 6000 \times e^{-0,4t} - 1050 \times e^{-0,2t} + 120 - 150 = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 6000 \times (e^{-0,2t})^2 - 1050 \times e^{-0,2t} - 30 = 0 \Leftrightarrow \end{aligned}$$

Fazendo a substituição de variável $y = e^{-0,2t}$, e usando a fórmula resolvente, vem:

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow 6000y^2 - 1050y - 30 = 0 &\Leftrightarrow y = \frac{1050 \pm \sqrt{(-1050)^2 - 4(6000)(-30)}}{2(6000)} \Leftrightarrow y = \frac{1050 \pm 1350}{12000} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow y = -\frac{1}{40} \vee y = \frac{1}{5} \end{aligned}$$

Como $y = e^{-0,2t}$, temos que:

$$e^{-0,2t} = -\frac{1}{40} \vee e^{-0,2t} = \frac{1}{5}$$

E como a equação $e^{-0,2t} = -\frac{1}{40}$ é impossível, podemos determinar única solução da equação:

$$e^{-0,2t} = \frac{1}{5} \Leftrightarrow -0,2t = \ln\left(\frac{1}{5}\right) \Leftrightarrow t = \frac{\ln 1 - \ln 5}{-0,2} \Leftrightarrow t = \frac{0 - \ln 5}{-0,2} \Leftrightarrow t = \frac{\ln 5}{0,2}$$

Assim, arredondando o resultado às unidades, temos $t \approx 8$ dias

Exame – 2011, 2.ª Fase



52. Resolvendo a equação $\frac{f(x)}{x} = e^x - \frac{2}{3}$, no intervalo $[1, +\infty[$, temos que

$$\begin{aligned} \frac{f(x)}{x} = e^x - \frac{2}{3} &\Leftrightarrow \frac{xe^{-x} + 2x}{x} = e^x - \frac{2}{3} \Leftrightarrow \frac{x(e^{-x} + 2)}{x} = e^x - \frac{2}{3} \underset{x>1}{\Leftrightarrow} e^{-x} + 2 = e^x - \frac{2}{3} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{1}{e^x} - e^x + 2 + \frac{2}{3} = 0 &\Leftrightarrow \frac{1}{e^x} - e^x + \frac{6}{3} + \frac{2}{3} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{e^x} - e^x + \frac{8}{3} = 0 \Leftrightarrow \frac{3}{3e^x} - \frac{3e^x \times e^x}{3e^x} + \frac{8e^x}{3e^x} = 0 \underset{3e^x \neq 0}{\Leftrightarrow} \\ &\Leftrightarrow 3 - 3(e^x)^2 + 8e^x = 0 \Leftrightarrow -3(e^x)^2 + 8e^x + 3 = 0 \Leftrightarrow \end{aligned}$$

Fazendo a substituição de variável $y = e^x$, e usando a fórmula resolvente, vem:

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow -3y^2 + 8y + 3 = 0 &\Leftrightarrow y = \frac{-8 \pm \sqrt{8^2 - 4(-3)(3)}}{2(-3)} \Leftrightarrow y = \frac{-8 \pm \sqrt{64 + 36}}{-6} \Leftrightarrow y = \frac{-8 \pm \sqrt{100}}{-6} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow y = \frac{-8 \pm 10}{-6} \Leftrightarrow y = \frac{2}{-6} \vee y = \frac{-18}{-6} \Leftrightarrow y = -\frac{1}{3} \vee y = 3 \Leftrightarrow \end{aligned}$$

Como $y = e^x$, temos que:

$$\Leftrightarrow \underbrace{e^x = -\frac{1}{3}}_{\text{Eq. Imp.}} \vee e^x = 3 \Leftrightarrow x = \ln 3$$

Assim, a única solução da equação, em $[1, +\infty[$, é $\ln 3$

Teste Intermédio 12.º ano – 26.05.2011

53. Como o ponto P pertence ao gráfico da função f e tem ordenada $\frac{1}{2}$, então podemos calcular a sua abcissa recorrendo à expressão algébrica da função f :

$$f(x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \log_9(x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = 9^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow x = \sqrt{9} \Leftrightarrow x = 3$$

Resposta: **Opção C**

Teste Intermédio 12.º ano – 19.01.2011

54. Resolvendo a inequação, temos

$$\begin{aligned} \log_3(7x + 6) \geq 2 + \log_3(x) &\Leftrightarrow \log_3(7x + 6) \geq \log_3 9 + \log_3(x) \Leftrightarrow \log_3(7x + 6) \geq \log_3(9 \times x) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 7x + 6 \geq 9x \Leftrightarrow 7x - 9x \geq -6 \Leftrightarrow -2x \geq -6 \Leftrightarrow 2x \leq 6 \Leftrightarrow x \leq \frac{6}{2} \Leftrightarrow x \leq 3 \end{aligned}$$

Mas como $\log_3(x)$ só está definido para $x > 0$, então a expressão $\log_3(7x + 6) \geq 2 + \log_3(x)$ só está definida se $x > 0 \wedge 7x + 6 > 0$, ou seja, se $x > 0 \wedge x > -\frac{6}{7}$, ou mais simplesmente, se $x > 0$

Pelo que a condição é verdadeira $\log_3(7x + 6) \geq 2 + \log_3(x)$ para os valores de x tais que $x \leq 3 \wedge x > 0$, ou seja, no intervalo

$$]-\infty, 3] \cap]0, +\infty[=]0, 3]$$

Teste Intermédio 12.º ano – 19.01.2011



55.

- 55.1. Como $k = \frac{1}{2}$ e $p = 1$, o número, em milhares, de pessoas que estavam infetadas com a doença, nesta região, t anos após o início de 1960 é

$$I(t) = \frac{3e^{\frac{1}{2}t}}{1 + 1 \times e^{\frac{1}{2}t}} = \frac{3e^{\frac{t}{2}}}{1 + e^{\frac{t}{2}}}$$

E o ano em que o número de pessoas infetadas, nesta região atingiu os 2500, ou seja, os 2,5 milhares é a solução da equação

$$I(t) = 2,5$$

Assim, resolvendo a equação, temos

$$I(t) = 2,5 \Leftrightarrow \frac{3e^{\frac{t}{2}}}{1 + e^{\frac{t}{2}}} = 2,5 \Leftrightarrow 3e^{\frac{t}{2}} = 2,5 \left(1 + e^{\frac{t}{2}}\right) \Leftrightarrow 3e^{\frac{t}{2}} = 2,5 + 2,5e^{\frac{t}{2}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3e^{\frac{t}{2}} - 2,5e^{\frac{t}{2}} = 2,5 \Leftrightarrow 0,5e^{\frac{t}{2}} = 2,5 \Leftrightarrow e^{\frac{t}{2}} = \frac{2,5}{0,5} \Leftrightarrow e^{\frac{t}{2}} = 5 \Leftrightarrow \frac{t}{2} = \ln 5 \Leftrightarrow t = 2 \ln 5$$

Logo, como $2 \ln 5 \approx 3,219$ e $1960 + 3,219 \approx 1963$, temos que o número de pessoas infetadas, nesta região, atingiu os 2500 no ano de 1963

- 55.2. Como, nesta região, em 1961, ou seja 1 ano após o início de 1960 ($t = 1$), se constatou que havia um milhar de pessoas infetadas ($I = 1$), então temos que

$$I(1) = 1$$

Logo, substituindo na expressão da função I , resolvendo em ordem a k e escrevendo o resultado na forma $k = -\ln(A + pB)$, vem que

$$I(1) = 1 \Leftrightarrow 1 = \frac{3e^{k \times 1}}{1 + pe^{k \times 1}} \Leftrightarrow 1 = \frac{3e^k}{1 + pe^k} \Leftrightarrow 1 + pe^k = 3e^k \Leftrightarrow 1 = 3e^k - pe^k \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1 = e^k(3 - p) \Leftrightarrow \frac{1}{3 - p} = e^k \Leftrightarrow k = \ln\left(\frac{1}{3 - p}\right) \Leftrightarrow k = \ln 1 - \ln(3 - p) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow k = 0 - \ln(3 - p) \Leftrightarrow k = -\ln(3 - p)$$

Teste Intermédio 12.º ano – 19.01.2011

56. Resolvendo a equação, temos:

$$f(x) = 2 \Leftrightarrow \ln(-3x) = 2 \Leftrightarrow -3x = e^2 \Leftrightarrow x = \frac{e^2}{-3} \Leftrightarrow x = -\frac{1}{3}e^2$$

Resposta: **Opção C**

Exame – 2010, Ép. especial

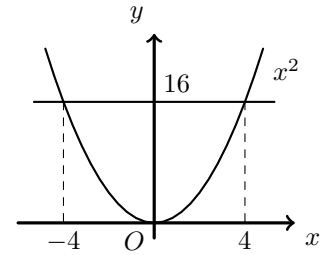


57. Temos que

$$h(-4) = \ln((-4)^2 + 1) = \ln(16 + 1) = \ln(17)$$

Assim, resolvendo a inequação, em $] -\infty, 0]$, temos :

$$\begin{aligned} h(x) > h(-4) &\Leftrightarrow \ln(x^2 + 1) > \ln(17) \Leftrightarrow x^2 + 1 > 17 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x^2 > 17 - 1 \Leftrightarrow x^2 > 16 \Leftrightarrow x < -4 \vee x > 4 \end{aligned}$$



Como o domínio de valência da inequação é $] -\infty, 0]$, o conjunto solução é

$$]-\infty, 0] \cap (]-\infty, -4[\cup]4, +\infty[) =]-\infty, -4[$$

Exame – 2010, Ép. especial

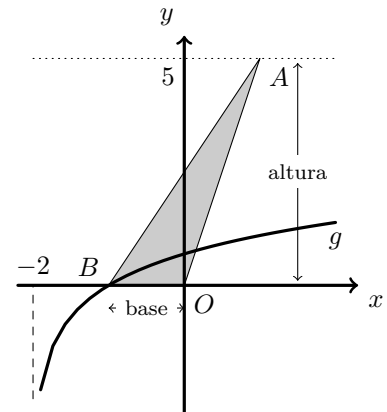
58. Como o ponto B é o ponto de intersecção do gráfico da função g com o eixo das abcissas, podemos determinar a sua abcissa, calculando o zero da função g :

$$g(x) = 0 \Leftrightarrow \ln(x + 2) = 0 \Leftrightarrow x + 2 = e^0 \Leftrightarrow x = 1 - 2 \Leftrightarrow x = -1$$

E assim, considerando o lado $[OB]$ do triângulo como a base, a altura será a ordenada do ponto A , (independentemente da sua abcissa), pelo que a área do triângulo é:

$$A_{[OAB]} = \frac{\overline{OB} \times y_A}{2} = \frac{|x_B| \times y_A}{2} = \frac{1 \times 5}{2} = \frac{5}{2}$$

Resposta: **Opção A**



Exame – 2010, 1.ª Fase

59.

59.1. Aplicando as regras operatórias dos logaritmos, vem que, para qualquer valor de $t \in [0,5]$:

$$\begin{aligned} N(t) &= 8 \log_4(3t + 1)^3 - 8 \log_4(3t + 1) = 8 \times 3 \log_4(3t + 1) - 8 \log_4(3t + 1) = \\ &= 24 \log_4(3t + 1) - 8 \log_4(3t + 1) = 16 \log_4(3t + 1) \end{aligned}$$

59.2. Como $N(t)$ é o número de bilhetes vendidos, em centenas, t horas após o início da venda, e 2400 bilhetes são 24 centenas de bilhetes, o tempo necessário para vender 2400 bilhetes é a solução da equação $N(t) = 24$:

$$\begin{aligned} N(t) = 24 &\Leftrightarrow 16 \log_4(3t + 1) = 24 \Leftrightarrow \log_4(3t + 1) = \frac{24}{16} \Leftrightarrow \log_4(3t + 1) = \frac{3}{2} \Leftrightarrow 3t + 1 = 4^{\frac{3}{2}} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 3t + 1 = \sqrt{4^3} \Leftrightarrow 3t + 1 = \sqrt{64} \Leftrightarrow 3t + 1 = 8 \Leftrightarrow 3t = 8 - 1 \Leftrightarrow t = \frac{7}{3} \end{aligned}$$

Escrevendo o resultado em horas e minutos, temos que $t = \frac{7}{3} = 2 + \frac{1}{3}$, e como $\frac{1}{3}$ de hora são 20 minutos, temos que serão necessárias 2 horas e 20 minutos para que sejam vendidos 2400 bilhetes.

Exame – 2010, 1.ª Fase



60. Os zeros da função g são as soluções da equação $g(x) = 0$, que pertencem ao domínio de g . Assim, temos que:

$$\begin{aligned} g(x) = 0 &\Leftrightarrow x + \ln(f(x) - 3) = 0 \Leftrightarrow x + \ln(3 + 4x^2e^{-x} - 3) = 0 \Leftrightarrow x + \ln(4x^2 \times e^{-x}) = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x + \ln(4x^2) + \ln(e^{-x}) = 0 \Leftrightarrow x + \ln(4x^2) + (-x) = 0 \Leftrightarrow \ln(4x^2) = 0 \Leftrightarrow 4x^2 = e^0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 4x^2 = 1 \Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{\frac{1}{4}} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \vee x = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Como o domínio da função g é $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, então o conjunto dos zeros da função é $\left\{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\}$

Teste Intermédio 12.º ano – 19.05.2010

61. Usando as propriedades dos logaritmos, temos que:

$$\log_5\left(\frac{5^{1000}}{25}\right) = \log_5(5^{1000}) - \log_5 25 = 1000 - \log_5(5^2) = 1000 - 2 = 998$$

Resposta: **Opção D**

Teste Intermédio 12.º ano – 15.03.2010

62.

- 62.1. Supondo que $k = 10$, temos que:

$$f(t) = \frac{10}{3 - 2e^{-0,13t}}$$

Assim, como $f(t)$ é o número de coelhos, em milhares, t semanas após a deteção da doença, a solução da equação $f(t) = 9$ é o número t de semanas após a deteção da doença em que existiam 9 milhares de coelhos.

Resolvendo a equação temos que:

$$\begin{aligned} f(t) = 9 &\Leftrightarrow \frac{10}{3 - 2e^{-0,13t}} = 9 \Leftrightarrow \frac{10}{9} = 3 - 2e^{-0,13t} \Leftrightarrow 2e^{-0,13t} = 3 - \frac{10}{9} \Leftrightarrow 2e^{-0,13t} = \frac{27}{9} - \frac{10}{9} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 2e^{-0,13t} = \frac{17}{9} \Leftrightarrow e^{-0,13t} = \frac{17}{18} \Leftrightarrow -0,13t = \ln\left(\frac{17}{18}\right) \Leftrightarrow t = \frac{\ln\left(\frac{17}{18}\right)}{-0,13} \end{aligned}$$

Logo, o número de coelhos existentes na região é igual a 9000 ao fim de $\frac{\ln\left(\frac{17}{18}\right)}{-0,13} \approx 0,4397$ semanas.

Como cada semana tem 7 dias, o número de coelhos existentes na região é igual a 9000 ao fim de $0,4397 \times 7 \approx 3$ dias.



- 62.2. O número de coelhos no início da primeira semana ($t = 0$), é dado por $f(0)$ e no final da primeira semana ($t = 1$) é dado por $f(1)$
 Como durante a primeira semana, morreram dois mil coelhos (2 milhares) e não nasceu nenhum, sabemos que

$$f(1) = f(0) - 2$$

Como

- $f(0) = \frac{k}{3 - 2e^{-0,13 \times 0}} = \frac{k}{3 - 2 \times 1} = \frac{k}{1} = k$
- $f(1) = \frac{k}{3 - 2e^{-0,13 \times 1}} = \frac{k}{3 - 2e^{-0,13}}$

Assim, resolvendo a equação para determinar o valor k , vem:

$$f(1) = f(0) - 2 \Leftrightarrow \frac{k}{3 - 2e^{-0,13}} = k - 2$$

Considerando a aproximação $3 - 2e^{-0,13} \approx 1,2438$ vem:

$$\begin{aligned} \frac{k}{1,2438} = k - 2 &\Leftrightarrow k = 1,2438k - 2 \times 1,2438 \Leftrightarrow 2,4876 = k(1,2438 - 1) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 2,4876 = k(1,2438 - 1) \Leftrightarrow \frac{2,4876}{0,2438} = k \end{aligned}$$

Arredondando o valor de k às décimas, temos que $k \approx 10,2$

Teste Intermédio 12.º ano – 15.03.2010

63. Temos que:

$$b = a^2 \Leftrightarrow_{a>1} a = \sqrt{b} \Leftrightarrow a = b^{\frac{1}{2}}$$

Assim, usando as propriedades dos logaritmos, vem que:

$$1 + \log_b a = 1 + \log_b \left(b^{\frac{1}{2}} \right) = 1 + \frac{1}{2} = \frac{2}{2} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

Resposta: **Opção D**

Exame – 2009, Ép. especial

64. Como a abcissa do ponto P é positiva, porque este se deslocar sobre o semieixo positivo das abcissas, então podemos considerar a base do triângulo o lado $[OP]$ e a sua medida é a abcissa do ponto P , pelo que $\overline{OP} = x$

Como relativamente à base $[OP]$, a altura é o lado $[PA]$, e a medida da altura é a ordenada do ponto A , temos que $\overline{PA} = f(x) = e^x$

Assim, a área do triângulo $[OAP]$ em função de x (abcissa do ponto P) é:

$$A_{[OAP]} = \frac{\overline{OP} \times \overline{PA}}{2} = \frac{x \times f(x)}{2} = \frac{x \cdot e^x}{2}$$

Resposta: **Opção B**

Exame – 2009, Ép. especial



65.

65.1. Como $M_1 = 0,67 \log E_1 - 3,25$ e $M_2 = 0,67 \log E_2 - 3,25$, temos que

$$\begin{aligned} M_1 - M_2 = 1 &\Leftrightarrow 0,67 \log E_1 - 3,25 - (0,67 \log E_2 - 3,25) = 1 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 0,67 \log E_1 - 3,25 - 0,67 \log E_2 + 3,25 = 1 \Leftrightarrow 0,67 \log E_1 - 0,67 \log E_2 = 1 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 0,67(\log E_1 - \log E_2) = 1 \Leftrightarrow \log E_1 - \log E_2 = \frac{1}{0,67} \Leftrightarrow \log \frac{E_1}{E_2} = \frac{1}{0,67} \Leftrightarrow \frac{E_1}{E_2} = 10^{\frac{1}{0,67}} \end{aligned}$$

E assim temos que $\frac{E_1}{E_2} \approx 31$

Assim, no contexto da situação descrita, como $M_1 - M_2 = 1$ e $\frac{E_1}{E_2} \approx 31 \Leftrightarrow E_1 \approx 31E_2$, temos que para quaisquer dois sismos cujas magnitudes tenham a diferença de uma unidade (na escala de Richter) a energia libertada (em joules) pelo sismo de maior magnitude é aproximadamente 31 vezes superior à que é libertada pelo sismo de menor magnitude.

65.2. Como o sismo teve magnitude 4,7, na escala de Richter, vem que $M = 4,7$

E assim, substituindo o valor de M na expressão $M = 0,67 \log E - 3,25$, e calculando o valor de E , vem:

$$4,7 = 0,67 \log E - 3,25 \Leftrightarrow 4,7 + 3,25 = 0,67 \log E \Leftrightarrow \frac{7,95}{0,67} \log E \Leftrightarrow E = 10^{\frac{7,95}{0,67}}$$

Assim, a energia libertada nesse sismo, em notação científica, foi de, aproximadamente 7×10^{11} joules

Exame – 2009, Ép. especial

66. Calculando as imagens das abscissas dos pontos indicados em cada uma das opções pela função f , temos:

- $f(-1) = e^{-1+1} = e^0 = 1$
- $f(\ln 2) = e^{\ln 2+1} = e^{\ln 2} \times e^1 = 2 \times e = 2e$
- $f(\ln 5) = e^{\ln 5+1} = e^{\ln 5} \times e^1 = 5 \times e = 5e$
- $f(-2) = e^{-2+1} = e^{-1} = \frac{1}{e}$

Pelo que podemos verificar que, de entre os pontos apresentados, o ponto de coordenadas $(\ln 2, 2e)$ é o único que pertence ao gráfico de f

Resposta: **Opção B**

Exame – 2009, 2.ª Fase

67. Calculando a área afetada quando a doença foi detetada ($t = 0$), e a área afetada uma semana depois ($t = 1$), temos:

$$A(0) = 2 - 0 + 5 \ln(0 + 1) = 2 + 5 \times 0 = 2$$

$$A(1) = 2 - 1 + 5 \ln(1 + 1) = 1 + 5 \ln(2)$$

Assim, o aumento da área afetada registado na primeira semana, em hectares, arredondado às centésimas é de

$$A(1) - A(0) = 1 + 5 \ln(2) - 2 = 5 \ln(2) - 1 \approx 2,47 \text{ ha}$$

Exame – 2009, 2.ª Fase



68. Usando as propriedades das potências e dos logaritmos, temos que:

$$e^{4 \ln x} - 10^{2 \log x} = e^{\ln x^4} - 10^{\log x^2} = x^4 - x^2$$

Resposta: **Opção C**

Exame – 2009, 1.ª Fase

69. Como os domínios de f e g são, respetivamente $]1, +\infty[$ e $] - \infty, 2[$, então a condição $f(x) \geq 1 + h(x)$ está definida em

$$]1, +\infty[\cap] - \infty, 2[=]1, 2[$$

Assim, vem que:

$$f(x) \geq 1 + h(x) \Leftrightarrow \log_2(x-1) \geq 1 + \log_2(2-x) \Leftrightarrow \log_2(x-1) \geq \log_2 2 + \log_2(2-x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_2(x-1) \geq \log_2(2 \times (2-x)) \Leftrightarrow \log_2(x-1) \geq \log_2(4-2x) \Leftrightarrow$$

(como $\log_2 x$ é crescente no seu domínio)

$$\Leftrightarrow x-1 \geq 4-2x \Leftrightarrow x+2x \geq 4+1 \Leftrightarrow 3x \geq 5 \Leftrightarrow x \geq \frac{5}{3}$$

Como $f(x) \geq 1 + h(x)$ está definida em $]1, 2[$, o conjunto solução é

$$\left[\frac{5}{3}, +\infty \right[\cap]1, 2[= \left[\frac{5}{3}, 2 \right[$$

Exame – 2009, 1.ª Fase

70. Usando as propriedades dos logaritmos temos que:

$$\log_a x = 1 + 5 \log_a y \Leftrightarrow \log_a x = \log_a a + \log_a y^5 \Leftrightarrow \log_a x = \log_a (a \times y^5) \Rightarrow x = ay^5$$

Resposta: **Opção A**

Teste Intermédio 12.º ano – 27.05.2009



71. Como

- $x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > 1$
- $13 - x > 0 \Leftrightarrow -x > -13 \Leftrightarrow x < 13$

Então os valores de x para os quais a inequação está definida são:

$$]1, +\infty[\cap]-\infty, 13[=]1, 13[$$

E, resolvendo a inequação, vem que:

$$\log_2(x-1) + \log_2(13-x) \leq 5 \Leftrightarrow \log_2((x-1) \times (13-x)) \leq \log_2 2^5 \Leftrightarrow$$

(como $\log_2 x$ é crescente no seu domínio)

$$\Leftrightarrow (x-1) \times (13-x) \leq 2^5 \Leftrightarrow 13x - x^2 - 13 + x \leq 32 \Leftrightarrow -x^2 + 14x - 13 - 32 \leq 0 \Leftrightarrow -x^2 + 14x - 45 \leq 0 \Leftrightarrow$$

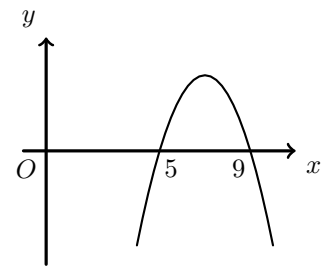
$$\Leftrightarrow (x-5)(x-9) \leq 0 \Leftrightarrow x \leq 5 \vee x \geq 9$$

Cálculos auxiliares:

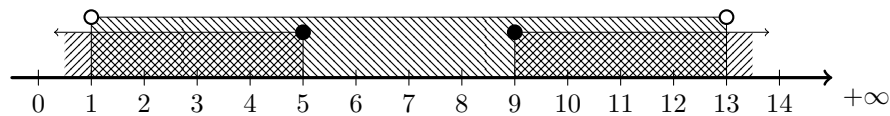
$$-x^2 + 14x - 45 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-14 \pm \sqrt{14^2 - 4(-1)(-45)}}{2(-1)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-14 \pm \sqrt{16}}{-2} \Leftrightarrow x = \frac{-14 + 4}{-2} \vee x = \frac{-14 - 4}{-2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 5 \vee x = 9$$



Como a inequação está definida para $x \in]1, 13[$, representando a interseção dos conjuntos, temos:



E assim, o conjunto solução da inequação é

$$]1, 5] \cup [9, 13[$$



72.

72.1. Escrevendo os dados apresentados com recurso à função descrita, temos que:

- A massa de *carbono-14* presente no fóssil, mil anos depois de um certo instante inicial, era de 2,91g, significa que

$$m(1) = 2,91$$

- A massa de *carbono-14* presente no fóssil, dois mil anos depois do mesmo instante inicial, era de 2,58g, significa que

$$m(2) = 2,58$$

Assim, temos que:

$$ae^{b \times 1} = 2,91 \text{ e que } ae^{b \times 2} = 2,58$$

Como o valor de a é o mesmo (porque é a massa da substância no referido instante inicial), então como:

$$a = \frac{2,91}{e^b} \text{ e como } a = \frac{2,58}{e^{2b}}$$

Calculando o valor de b e arredondando o resultado às centésimas, vem que:

$$\frac{2,91}{e^b} = \frac{2,58}{e^{2b}} \Leftrightarrow \frac{e^{2b}}{e^b} = \frac{2,58}{2,91} \Leftrightarrow e^{2b-b} = \frac{2,58}{2,91} \Leftrightarrow e^b = \frac{2,58}{2,91} \Leftrightarrow b = \ln\left(\frac{2,58}{2,91}\right) \Rightarrow b \approx -0,12$$

Utilizando o valor de b para determinar o valor de a , ou seja, a massa de *carbono-14* que existia no fóssil, no referido instante inicial, e arredondando o resultado final às centésimas, temos:

$$m(1) = 2,91 \Leftrightarrow ae^b = 2,91 \Rightarrow ae^{-0,120} \approx 2,91 \Rightarrow a \times 0,887 \approx 2,91 \Rightarrow a \approx \frac{2,91}{0,887} \Rightarrow a \approx 3,28 \text{ g}$$

72.2. Considerando $b = -0,43$ temos que:

$$\frac{m(t+1,6)}{m(t)} = \frac{ae^{-0,43(t+1,6)}}{ae^{-0,43t}} = \frac{e^{-0,43(t+1,6)}}{e^{-0,43t}} = e^{-0,43(t+1,6)-(-0,43t)} = e^{-0,43t-0,688+0,43t} = e^{-0,688}$$

Assim, temos que $\frac{m(t+1,6)}{m(t)}$ é constante e o valor dessa constante, arredondado às décimas, é

$$e^{-0,688} \approx 0,5$$

E assim temos que:

$$\frac{m(t+1,6)}{m(t)} \approx 0,5 \Leftrightarrow m(t+1,6) \approx 0,5 m(t)$$

o que significa que a passagem de 1,6 milhares de anos, ou seja, 1600 anos, implica uma diminuição da massa de *radio-266* para metade.

Teste Intermédio 12.º ano – 11.03.2009

73. Usando as propriedades dos logaritmos temos que:

$$x \cdot \ln(e^e) = x \cdot e \ln e = x \cdot e \times 1 = ex$$

Resposta: **Opção A**

Exame – 2008, Ép. especial



74. Equacionado o problema e resolvendo a equação, vem:

$$T(t) = 36 \Leftrightarrow 25 + 48e^{-0,05t} = 36 \Leftrightarrow 48e^{-0,05t} = 36 - 25 \Leftrightarrow e^{-0,05t} = \frac{11}{48} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -0,05t = \ln \frac{11}{48} \Leftrightarrow t = \frac{\ln \frac{11}{48}}{-0,05} \Rightarrow t \approx 29,4661$$

Assim temos que o tempo corresponde a 29,4661 minutos, aproximadamente. E como cada minuto tem 60 segundos, fazendo a conversão de 0,4661 minutos para segundos, vem

$$0,4661 \times 60 = 27,9660 \approx 28 \text{ s}$$

Pelo que se concluí que demorou 29 minutos e 28 segundos, após o início do arrefecimento, para que a temperatura da água atingisse os 36° Celsius.

Exame – 2008, Ép. especial

75. Como o ponto $P(1,3)$ pertence ao gráfico da função, substituindo as coordenadas na expressão algébrica da função, e resolvendo a equação, podemos determinar o valor de a :

$$3 = 2^{a \times 1} - 1 \Leftrightarrow 3 + 1 = 2^a \Leftrightarrow 4 = 2^a \Leftrightarrow a = \log_2 4 \Leftrightarrow a = 2$$

Resposta: **Opção A**

Exame – 2008, 2.ª Fase

76. Determinando a massa inicial da amostra da substância radioativa, ou seja a massa ao fim de zero horas ($t = 0$), vem que:

$$M(0) = 15 \times e^{-0,02 \times 0} = 15 \times e^0 = 15 \times 1 = 15$$

Assim, equacionado o problema e resolvendo a equação vem:

$$M(t) = \frac{15}{2} \Leftrightarrow 15 \times e^{-0,02t} = \frac{15}{2} \Leftrightarrow e^{-0,02t} = \frac{15}{2 \times 15} \Leftrightarrow e^{-0,02t} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -0,02t = \ln \frac{1}{2} \Leftrightarrow t = \frac{\ln \frac{1}{2}}{-0,02} \Rightarrow t \approx 34,657$$

Assim temos que o tempo corresponde a 34,657 horas, aproximadamente. E como cada hora tem 60 minutos, fazendo a conversão de 0,657 horas para minutos, vem

$$0,657 \times 60 = 39,420 \approx 39 \text{ min}$$

Pelo que se concluí ao fim de 34 horas e 39 minutos a massa inicial da amostra da substância radioativa se reduz a metade.

Exame – 2008, 2.ª Fase

77. Usando as propriedades dos logaritmos temos que:

$$2 \log_a \left(a^{\frac{1}{3}} \right) = 2 \times \frac{1}{3} \log_a a = \frac{2}{3} \log_a a = \frac{2}{3} \times 1 = \frac{2}{3}$$

Resposta: **Opção D**

Exame – 2008, 1.ª Fase



78. Equacionado o problema e resolvendo a equação, vem:

$$N(t) = 1000 \Leftrightarrow \frac{2000}{1 + 199e^{-0,01t}} = 1000 \Leftrightarrow \frac{2000}{1000} = 1 + 199e^{-0,01t} \Leftrightarrow 2 - 1 = 199e^{-0,01t} \Leftrightarrow \frac{1}{199} = e^{-0,01t} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -0,01t = \ln \frac{1}{199} \Leftrightarrow t = \frac{\ln \frac{1}{199}}{-0,01} \Rightarrow t \approx 529,330$$

Assim, podemos observar que ao fim de 529 dias ainda a associação ainda não contava com 1000 associados e que este número foi atingido durante o 530º dia.

Exame – 2008, 1.ª Fase

79. Usando as propriedades dos logaritmos temos que:

$$\log_a 3 + 2 \log_a 5 = \log_a 3 + \log_a (5^2) = \log_a (3 \times 5^2) = \log_a (3 \times 25) = \log_a 75$$

Resposta: **Opção C**

Teste Intermédio 12.º ano – 29.04.2008

80.

80.1. Supondo que foram introduzidos 100 peixes no lago, temos que:

$$f(0) = 100 \Leftrightarrow \frac{2000}{1 + ke^{-0,13 \times 0}} = 100 \Leftrightarrow \frac{2000}{1 + ke^0} = 100 \Leftrightarrow \frac{2000}{1 + k \times 1} = 100 \Leftrightarrow 2000 = 100(1 + k) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2000 = 100 + 100k \Leftrightarrow 2000 - 100 = 100k \Leftrightarrow \frac{1900}{100} = k \Leftrightarrow 19 = k$$

80.2. O número de anos que decorre até que o número de peixes no lago atinge o meio milhar (500), é a solução da equação $f(t) = 500$

Assim, considerando $k = 24$, resolvendo a equação e apresentando o resultado arredondado às unidades, temos que:

$$f(t) = 500 \Leftrightarrow \frac{2000}{1 + 24e^{-0,13t}} = 500 \Leftrightarrow 2000 = 500(1 + 24e^{-0,13t}) \Leftrightarrow 2000 = 500 + 12000e^{-0,13t} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2000 - 500 = 12000e^{-0,13t} \Leftrightarrow \frac{1500}{12000} = e^{-0,13t} \Leftrightarrow \frac{1}{8} = e^{-0,13t} \Leftrightarrow -0,13t = \ln \left(\frac{1}{8} \right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -0,13t = \ln 1 - \ln 8 \Leftrightarrow -0,13t = -\ln 8 \Leftrightarrow t = \frac{-\ln 8}{-0,13} \Leftrightarrow t = \frac{\ln 8}{0,13} \Rightarrow t \approx 16$$

Teste Intermédio 12.º ano – 29.04.2008

81. Usando as propriedades dos logaritmos, vem que:

$$\log_5(x) = \pi - 1 \Leftrightarrow x = 5^{\pi-1} \Leftrightarrow 5 \times x = 5 \times 5^{\pi-1} \Leftrightarrow 5x = 5^{1+\pi-1} \Leftrightarrow 5x = 5^\pi$$

Resposta: **Opção C**

Teste Intermédio 12.º ano – 17.01.2008



82.

82.1. Como o número de indivíduos que existiam no instante inicial é a , então r vezes o número de indivíduos que existiam no instante inicial é $r \times a$

Por outro lado a população de indivíduos ao fim de n dias é $P(n) = ae^{kn}$

Assim, temos que:

$$r \times a = ae^{kn} \Leftrightarrow r = \frac{ae^{kn}}{a} \Leftrightarrow r = e^{kn} \Leftrightarrow kn = \ln(r) \Leftrightarrow k = \frac{\ln(r)}{n}$$

82.2. Como no instante inicial em cada colónia foram colocadas 500 bactérias temos que $a = 500$, e decorrido exatamente um dia, a estirpe A estava reduzida a 250 indivíduos, pelo que $P(1) = 250$

Assim, resolvendo a equação podemos calcular o valor de k_A , com quatro casas decimais:

$$P(1) = 250 \Leftrightarrow 500e^{k_A \times 1} = 250 \Leftrightarrow e^{k_A} = \frac{250}{500} \Leftrightarrow e^{k_A} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow k_A = \ln\left(\frac{1}{2}\right) \Rightarrow k_A \approx -0,6931$$

Relativamente à estirpe B , como após seis dias a população era de 1000 indivíduos, temos que $P(6) = 1000$

Assim, resolvendo a equação podemos calcular o valor de k_B , com quatro casas decimais:

$$P(6) = 1000 \Leftrightarrow 500e^{k_B \times 6} = 1000 \Leftrightarrow e^{6k_B} = \frac{1000}{500} \Leftrightarrow e^{6k_B} = 2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 6k_B = \ln(2) \Leftrightarrow k_B = \frac{\ln(2)}{6} \Rightarrow k_B \approx 0,1155$$

Teste Intermédio 12.º ano – 17.01.2008

83. As abcissas dos pontos de interseção do gráfico de f com o eixo Ox são as soluções da equação $f(x) = 0$. Resolvendo a equação, temos que:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - \ln(x^2) = 0 \Leftrightarrow 1 = \ln(x^2) \Leftrightarrow x^2 = e^1 \Leftrightarrow x^2 = e \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{e}$$

Assim, temos que as coordenadas dos pontos de interseção do gráfico de f com o eixo Ox são:

$$(-\sqrt{e}, 0) \text{ e } (\sqrt{e}, 0)$$

Exame – 2007, 2.ª Fase

84. Resolvendo a inequação temos que:

$$\ln(x) - \ln\left(e^{\frac{1}{3}}\right) > 0 \Leftrightarrow \ln(x) > \ln\left(e^{\frac{1}{3}}\right) \Leftrightarrow x > e^{\frac{1}{3}} \Leftrightarrow x > \sqrt[3]{e}$$

Como $\sqrt[3]{e} \approx 1,4$, temos que, de entre as opções apresentadas, o único valor possível para x é 2

Resposta: **Opção D**

Exame – 2007, 1.ª fase

85. Calculando a intensidade da luz solar à superfície da água, ou seja a zero metros de profundidade temos:

$$I(0) = ae^{-b \times 0} = ae^0 = a \times 1 = a$$

Como a 20 metros de profundidade, a intensidade da luz solar era metade da sua intensidade à superfície da água, temos que $I(20) = \frac{I(0)}{2}$

Resolvendo a equação, e apresentando o resultado arredondado às centésimas, vem que:

$$I(20) = \frac{I(0)}{2} \Leftrightarrow ae^{-b \times 20} = \frac{a}{2} \Leftrightarrow e^{-20b} = \frac{a}{2a} \Leftrightarrow e^{-20b} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow -20b = \ln\left(\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow b = \frac{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}{-20} \Rightarrow b \approx 0,03$$

Exame – 2007, 1.ª Fase



86. Resolvendo a inequação, temos que:

$$e^{-x} > \frac{1}{e} \Leftrightarrow \frac{1}{e^x} > \frac{1}{e} \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} e > e^x \Leftrightarrow e^1 > e^x \stackrel{(2)}{\Leftrightarrow} 1 > x \Leftrightarrow x < 1$$

(1) $e^x > 0, \forall x \in \mathbb{R}$

(2) e^x é crescente no seu domínio

Escrevendo as soluções na forma de intervalo de números reais temos: $] - \infty, 1[$

Resposta: **Opção B**

Teste Intermédio 12.º ano – 15.03.2007

87. Usando as propriedades dos logaritmos, vem que:

$$\log_a (a \times \sqrt[3]{a}) = \log_a a + \log_a \sqrt[3]{a} = 1 + \log_a \left(a^{\frac{1}{3}} \right) = 1 + \frac{1}{3} \log_a a = 1 + \frac{1}{3} \times 1 = \frac{3}{3} + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$$

Resposta: **Opção B**

Teste Intermédio 12.º ano – 15.03.2007

88.

88.1. Substituindo na equação o valor do pH por 7,4, resolvendo a equação e apresentando o resultado na forma solicitada, temos:

$$7,4 = -\log(x) \Leftrightarrow -7,4 = \log(x) \Leftrightarrow x = 10^{-7,4} \Rightarrow x \approx 4 \times 10^{-8} \text{ mol/dm}^3$$

88.2. Designando por l a concentração de iões H_3O^+ no leite, temos que:

- o pH do leite é $-\log(l)$
- a concentração de iões H_3O^+ no café é $3l$
- o pH do café é $-\log(3l)$

Assim a diferença entre o pH do leite e o pH do café é:

$$-\log(l) - (-\log(3l))$$

Simplificando a expressão e apresentando o resultado arredondado às décimas, vem:

$$-\log(l) - (-\log(3l)) = -\log(l) + \log(3l) = \log(3l) - \log(l) = \log \frac{3l}{l} = \log 3 \approx 0,5$$

Teste Intermédio 12.º ano – 15.03.2007



89. Como o ponto A é o ponto de interseção do gráfico de f com o eixo Ox , então resolvendo a equação $f(x) = 0$, temos:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow e^x - c = 0 \Leftrightarrow e^x = c \Leftrightarrow x = \ln c$$

E assim, o ponto A tem coordenadas $A(\ln c, 0)$

Como o ponto B é o ponto de interseção do gráfico de f com o eixo Oy , então calculando $f(0)$ temos:

$$f(0) = e^0 - c = 1 - c$$

E assim, o ponto B tem coordenadas $B(0, 1 - c)$

Determinando o declive da reta AB recorrendo às coordenadas dos pontos A e B , vem:

$$m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{1 - c - 0}{0 - \ln c} = \frac{1 - c}{-\ln c}$$

Como o declive da reta AB é $c - 1$, estabelecendo a igualdade e resolvendo a equação, temos:

$$m_{AB} = c - 1 \Leftrightarrow \frac{1 - c}{-\ln c} = c - 1 \Leftrightarrow \frac{1 - c}{-(c - 1)} = \ln c \Leftrightarrow \frac{1 - c}{1 - c} = \ln c \Leftrightarrow 1 = \ln c \Leftrightarrow c = e^1 \Leftrightarrow c = e$$

Teste Intermédio 12.º ano – 15.03.2007

90. Como o ponto $(0, 2)$ pertence ao gráfico de f , temos que $f(0) = 2$, e assim vem que:

$$f(0) = 2 \Leftrightarrow a^0 + b = 2 \Leftrightarrow 1 + b = 2 \Leftrightarrow b = 2 - 1 \Leftrightarrow b = 1$$

Como o ponto $(1, 3)$ pertence ao gráfico de f , temos que $f(1) = 3$, e como $b = 1$ vem que:

$$f(1) = 3 \Leftrightarrow a^1 + b = 3 \Leftrightarrow a + 1 = 3 \Leftrightarrow a = 3 - 1 \Leftrightarrow a = 2$$

Resposta: **Opção A**

Exame – 2006, 2.ª Fase

91. Usando as propriedades dos logaritmos, vem que:

$$h(x) = \frac{\ln(\sqrt{e^x})}{2} = \frac{\ln(e^{\frac{x}{2}})}{2} = \frac{\frac{x}{2} \ln(e)}{2} = \frac{\frac{x}{2} \times 1}{2} = \frac{x}{4}$$

Resposta: **Opção C**

Exame – 2006, 1.ª fase

92. Como o triângulo $[OPQ]$ é isósceles, então a abcissa do Q é o dobro da abcissa do ponto P , pelo que a abcissa do ponto Q é $2x$

Como o ponto P pertence ao gráfico de f , então a ordenada de P é $f(x) = e^{-x}$

Considerando o lado $[OQ]$ como a base do triângulo, temos que a área do triângulo $[OPQ]$ é:

$$A(x) = \frac{2x \times e^{-x}}{2} = xe^{-x}$$

Exame – 2006, 1.ª fase

93. Resolvendo a equação temos:

$$e^{x-2} = \frac{1}{\sqrt{e}} \Leftrightarrow e^{x-2} = \frac{1}{e^{\frac{1}{2}}} \Leftrightarrow e^{x-2} = e^{-\frac{1}{2}} \Leftrightarrow x - 2 = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2} + 2 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$$

Resposta: **Opção B**

Teste Intermédio 12.º ano – 17.03.2006



94. Resolvendo a inequação, temos que:

$$\begin{aligned}\log_3(1-x) \leq 1 &\Leftrightarrow \log_3(1-x) \leq \log_3 3 \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} 1-x \leq 3 \wedge 1-x > 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow -x \leq 3-1 \wedge -x > -1 \Leftrightarrow x \geq -2 \wedge x < 1\end{aligned}$$

(1) $\log_3 x$ é crescente no seu domínio e só está definida para valores positivos

Escrevendo as soluções na forma de intervalo de números reais temos: $[-2, 1[$

Resposta: **Opção A**

Teste Intermédio 12.º ano – 17.03.2006

95. Podemos determinar a ordenada do ponto A , calculando a imagem de zero pela função f :

$$y_A = f(0) = e^0 = 1$$

Como $\overline{AC} = \overline{OA}$, então a ordenada do ponto C é o dobro da ordenada do ponto A :

$$y_C = 2 \times y_A = 2 \times 1 = 2$$

Pelo que, podemos calcular a ordenada do ponto E , ou seja, a medida da base do triângulo:

$$\ln x = 2 \Leftrightarrow x = e^2$$

Como a abcissa do ponto B é:

$$\ln x = 0 \Leftrightarrow x = e^0 \Leftrightarrow x = 1$$

Logo a ordenada do ponto D é:

$$y_D = f(1) = e^1 = e$$

Desta forma, a altura do triângulo (relativamente ao lado $[CE]$) é:

$$y_D - y_C = e - 2$$

E assim, a área do triângulo é:

$$A_{[CDE]} = \frac{x_E \times (y_D - y_C)}{2} = \frac{e^2(e-2)}{2}$$

Resposta: **Opção D**

Teste Intermédio 12.º ano – 17.03.2006

96. Como x é o preço de venda ao público, em euros, de 1 litro de azeite, e por cada litro de azeite vendido a empresa tem uma despesa de 3 euros, então o lucro obtido por cada litro de azeite é $x - 3$

Assim, o lucro obtido ($L(x)$) será o produto do lucro obtido por litro de azeite ($x - 3$), pela quantidade de litros de azeite vendida ($V(x)$):

$$L(x) = (x - 3) \times V(x) = (x - 3)e^{14-x}$$

Teste Intermédio 12.º ano – 17.03.2006

97. Usando a definição e as propriedades dos logaritmos, temos que:

$$\begin{aligned}f\left(\frac{1}{2}\right) &= \frac{1 - \ln\left(\frac{1}{2}\right)}{\frac{1}{2}} = \frac{1 - (\ln 1 - \ln 2)}{\frac{1}{2}} = \frac{1 - (0 - \ln 2)}{\frac{1}{2}} = \frac{1 + \ln 2}{\frac{1}{2}} = 2(1 + \ln 2) = \\ &= 2 + 2 \ln 2 = \ln(e^2) + \ln(2^2) = \ln(e^2 \times 2^2) = \ln(4e^2)\end{aligned}$$

Teste Intermédio 12.º ano – 17.03.2006



98.

98.1. Relativamente ao planeta Úrano, temos que:

- Como $t = 84$, então, vem que:

$$2 \ln(84) = k + 3 \ln(d_U)$$

- Como a distância média de Úrano ao Sol (d_U) é o dobro da distância média de Saturno ao Sol (d_S), ou seja:

$$d_U = 2d_S$$

Logo, temos que:

$$2 \ln(84) = k + 3 \ln(2d_S) \Leftrightarrow 2 \ln(84) = k + 3(\ln(2) + \ln(d_S)) \Leftrightarrow 2 \ln(84) - k - 3 \ln(2) = 3 \ln(d_S)$$

Assim, calculando o tempo, em anos, que demora o planeta Saturno a realizar uma translação completa em torno do Sol (t_S) e apresentando o resultado arredondado às décimas, temos:

$$\begin{aligned} 2 \ln(t_S) = k + 3 \ln(d_S) &\Leftrightarrow 2 \ln(t_S) = k + 2 \ln(84) - k - 3 \ln(2) \Leftrightarrow \ln(t_S) = \frac{2 \ln(84) - 3 \ln(2)}{2} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \ln(t_S) \approx 3,391 \Rightarrow t_S \approx e^{3,391} \Rightarrow t_S \approx 29,7 \end{aligned}$$

98.2. Como, no caso da Terra, $t = 1$ e $d = 149,6$, determinando o valor de k , e apresentando o resultado arredondado às unidades, vem que:

$$2 \ln(1) = k + 3 \ln(149,6) \Leftrightarrow 2 \times 0 = k + 3 \ln(149,6) \Leftrightarrow -3 \ln(149,6) = k \Rightarrow k \approx -15$$

Exame – 2005, Ép. especial (cód. 435)

99. Recorrendo à definição de taxa de variação média de uma função num intervalo, e das propriedades dos logaritmos:

$$\begin{aligned} TVM_{[1,3]}h(x) &= \frac{h(3) - h(1)}{3 - 1} = \frac{2(3) + 10 \ln(1 - 0,1 \times 3) - (2(1) + 10 \ln(1 - 0,1 \times 1))}{2} = \\ &= \frac{6 + 10 \ln(1 - 0,3) - (2 + 10 \ln(1 - 0,1))}{2} = \frac{6 + 10 \ln(0,7) - 2 - 10 \ln(0,9)}{2} = \\ &= \frac{6 - 2 + 10(\ln(0,7) - \ln(0,9))}{2} = \frac{4 + 10 \left(\ln \left(\frac{0,7}{0,9} \right) \right)}{2} = 2 + 5 \left(\ln \left(\frac{0,7}{0,9} \right) \right) = \\ &= \ln(e^2) + 5 \times \ln \left(\frac{7}{9} \right) = \ln(e^2) + \ln \left(\left(\frac{7}{9} \right)^5 \right) = \ln \left[e^2 \left(\frac{7}{9} \right)^5 \right] \end{aligned}$$

Exame – 2005, 2.ª Fase (cód. 435)

100. Relativamente à base $[OB]$, a altura é o segmento $[BA]$, e assim temos que a medida da altura é a abcissa do ponto A e a medida da base é a ordenada do ponto A :

- $\overline{BA} = x_A = 3$
- $\overline{OB} = y_A = f(3) = \log_2(3 + 1) = \log_2(4) = 2$

Pelo que a área do triângulo $[ABO]$ é:

$$A_{[ABO]} = \frac{\overline{BA} \times \overline{OB}}{2} = \frac{3 \times 2}{2} = 3$$

Resposta: **Opção C**

Exame – 2005, 1.ª fase (cód. 435)



101. A população de aves que existia no início de 1970, ou seja zero anos após o início de 1970 é:

$$P(0) = 5,2 \times 10^7 \times e^{(N-M) \times 0} = 5,2 \times 10^7 \times e^0 = 5,2 \times 10^7 \times 1 = 5,2 \times 10^7$$

Como no início de 2000 tinham passado exatamente $2000 - 1970 = 30$ anos, e a população era metade da que existia no início de 1970, então temos que:

$$P(30) = \frac{5,2 \times 10^7}{2}$$

Como a *taxa de natalidade* é 7,56, podemos determinar a *taxa de mortalidade* (M), e arredondar o valor às centésimas:

$$\begin{aligned} 5,2 \times 10^7 \times e^{(7,56-M) \times 30} &= \frac{5,2 \times 10^7}{2} \Leftrightarrow e^{(7,56-M) \times 30} = \frac{5,2 \times 10^7}{2 \times 5,2 \times 10^7} \Leftrightarrow e^{(7,56-M) \times 30} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \ln(0,5) &= 30(7,56 - M) \Leftrightarrow \frac{\ln(0,5)}{30} = 7,56 - M \Leftrightarrow M = 7,56 - \frac{\ln(0,5)}{30} \Leftrightarrow M \approx 7,58 \end{aligned}$$

Exame - 2005, 1.ª Fase (cód. 435)

102. Relativamente à base $[RQ]$, cuja medida é igual à abscissa do ponto Q , a altura é a diferença das ordenadas dos pontos Q e P , e assim temos que as medidas da base (b) e da altura (h), são:

- $b = x_Q = 9a$

- $h = y_Q - y_P = f(9a) - f(a) = \log_3(9a) - \log_3(a) = \log_3\left(\frac{9a}{a}\right) = \log_3(9) = 2$

Pelo que a área do triângulo $[PQR]$ é:

$$A_{[PQR]} = \frac{b \times h}{2} = \frac{9a \times 2}{2} = 9a$$

Resposta: **Opção B**

Exame - 2004, Ép. especial (cód. 435)

103. Usando a definição de logaritmo, temos que:

$$\log_p 16 = 4 \Leftrightarrow p^4 = 16 \underset{p>0}{\Rightarrow} p = \sqrt[4]{16} \Leftrightarrow p = 2$$

Resposta: **Opção C**

Exame - 2004, 2.ª Fase (cód. 435)

104. Usando a definição e as propriedades dos logaritmos, e como $\log_2 a = \frac{1}{5}$, temos que:

$$\log_2 \left(\frac{a^5}{8} \right) = \log_2(a^5) - \log_2(8) = 5 \times \log_2(a) - \log_2(8) = 5 \times \frac{1}{5} - 3 = 1 - 3 = -2$$

Resposta: **Opção B**

Exame - 2004, 1ª Fase (cód. 435)

105. O parâmetro a corresponde a uma translação vertical do gráfico da função definida por $g(x) = e^x$, e como a assíntota horizontal do gráfico de f é $y = -1$ (e a do gráfico de g é $y = 0$), então temos que:

$$a = -1$$

Como o gráfico contém o ponto de coordenadas $(0,1)$, substituindo as coordenadas do ponto na expressão $f(x) = -1 + be^x$, podemos calcular o valor de b :

$$1 = -1 + be^0 \Leftrightarrow 1 + 1 = b \times 1 \Leftrightarrow 2 = b$$

Resposta: **Opção A**

Exame - 2003, Prova para militares (cód. 435)



106. Como a função logarítmica só está definida para valores positivos do argumento do logaritmo, temos que o domínio da função g é o conjunto (ou qualquer subconjunto deste):

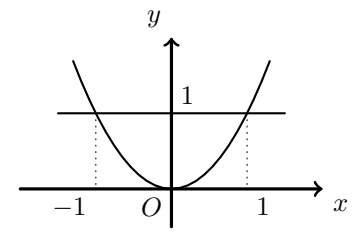
$$\{x \in \mathbb{R} : 1 - x^2 > 0\}$$

Assim, resolvendo a inequação, temos:

$$1 - x^2 > 0 \Leftrightarrow -x^2 > -1 \Leftrightarrow x^2 < 1 \Leftrightarrow x > -1 \vee x < 1$$

Cálculos auxiliares:

$$x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{1} \Leftrightarrow x = 1 \vee x = -1$$



Pelo que, o conjunto solução da inequação (e o domínio da função), é: $] -1, 1[$

Resposta: **Opção B**

Exame – 2003, 2.^a fase (cód. 435)

107.

- 107.1. Como, no modelo, o valor de t é o número de anos decorridos após 1864, no início de 2003 decorreram $2003 - 1864 = 139$ anos, pelo que no final de 2003 decorreram $2003 - 1864 + 1 = 140$ anos.

E assim, substituindo o valor $t = 140$, na expressão do modelo, podemos calcular a população de Portugal Continental no final do ano de 2003, e arredondar o resultado às décimas:

$$p(140) = 3,5 + \frac{6,8}{1 + 12,8e^{-0,036 \times 140}} \approx 9,8 \text{ milhões de habitantes}$$

- 107.2. Vamos primeiro determinar o número de anos após 1864 em que a população de Portugal Continental foi de 3,7 milhões de habitantes:

$$\begin{aligned} p(t) = 3,7 &\Leftrightarrow 3,5 + \frac{6,8}{1 + 12,8e^{-0,036t}} = 3,7 \Leftrightarrow \frac{6,8}{1 + 12,8e^{-0,036t}} = 3,7 - 3,5 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{6,8}{0,2} = 1 + 12,8e^{-0,036t} \Leftrightarrow 34 = 1 + 12,8e^{-0,036t} \Leftrightarrow \frac{34 - 1}{12,8} = e^{-0,036t} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow -0,036t = \ln\left(\frac{33}{12,8}\right) \Leftrightarrow t = \frac{\ln\left(\frac{33}{12,8}\right)}{-0,036} \Rightarrow t \approx -26,307 \end{aligned}$$

Como $t = 0$ corresponde ao início do ano 1864, então o ano em que população de Portugal Continental foi de 3,7 milhões de habitantes aconteceu mais de 26 anos anos, ou seja, 27 anos antes, nomeadamente no ano de $1864 - 27 = 1837$

Exame – 2003, 2.^a Fase (cód. 435)

108.

- 108.1. Como x é a distância à parede A , então para $x = 0$ a altura da rampa é a altura da parede A . Calculando a altura da rampa, em metros, arredondado às décimas, para $x = 0$, temos:

$$h(0) = 15 - 4 \ln(-0^2 + 10 \times 0 + 11) = 15 - 4 \ln(11) \approx 5,4 \text{ m}$$



108.2. Recorrendo às propriedades dos logaritmos, temos que:

- $h(5-x) = 15 - 4 \ln(- (5-x)^2 + 10(5-x) + 11) = 15 - 4 \ln(- (25 - 10x + x^2) + 50 - 10x + 11) = 15 - 4 \ln(- 25 + 10x - x^2 + 61 - 10x) = 15 - 4 \ln(- x^2 + 36)$
- $h(5+x) = 15 - 4 \ln(- (5+x)^2 + 10(5+x) + 11) = 15 - 4 \ln(- (25 + 10x + x^2) + 50 + 10x + 11) = 15 - 4 \ln(- 25 - 10x - x^2 + 61 + 10x) = 15 - 4 \ln(- x^2 + 36)$

Pelo que podemos concluir que $h(5-x) = h(5+x)$, o que, no contexto da situação descrita significa que a altura da rampa em dois pontos equidistantes do ponto central - situado a 5 metros da parede A ($x = 5$) - é igual.

Exame - 2003, 1.ª fase - 2.ª chamada (cód. 435)

109. Como o tempo "uma hora e trinta minutos da tarde" corresponde ao valor $t = 13,5$, então, calculando o nível de poluição e apresentando o resultado arredondado às décimas, temos:

$$P(13,5) = 1 - \frac{\ln(13,5 + 1)}{13,5 + 1} \approx 0,8 \text{ mg/l}$$

Exame - 2003, 1ª fase - 1ª chamada (cód. 435)

110. Usando as propriedades dos logaritmos, e como $\ln(1) = 0$, temos que:

$$\ln a = -\ln b \Leftrightarrow \ln a + \ln b = 0 \Leftrightarrow \ln(a \times b) = \ln(1) \Leftrightarrow a \times b = 1$$

Resposta: **Opção C**

Exame - 2002, Prova para militares (cód. 435)

111. Como $g(\pi) = 2 \sin \pi - \cos \pi = 2 \times 0 - (-1) = 1$, resolvendo a equação e apresentando a solução na forma solicitada, vem que:

$$\begin{aligned} f(x) = g(\pi) &\Leftrightarrow \frac{1}{3} + 2e^{1-x} = 1 \Leftrightarrow 2e^{1-x} = 1 - \frac{1}{3} \Leftrightarrow 2e^{1-x} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow e^{1-x} = \frac{2}{3 \times 2} \Leftrightarrow e^{1-x} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \ln\left(\frac{1}{3}\right) = 1 - x \Leftrightarrow x = 1 - \ln\left(\frac{1}{3}\right) \Leftrightarrow x = \ln e - \ln\left(\frac{1}{3}\right) \Leftrightarrow x = \ln\left(\frac{e}{\frac{1}{3}}\right) \Leftrightarrow x = \ln(3e) \end{aligned}$$

Exame - 2002, 2.ª Fase (cód. 435)

112.

112.1. Usando as propriedades dos logaritmos, temos que:

$$\begin{aligned} N = 10 \log_{10}(10^{12}I) &= 10(\log_{10}(10^{12}) + \log_{10}(I)) = 10 \times \log_{10}(10^{12}) + 10 \log_{10}(I) = \\ &= 10 \times 12 \times \log_{10}(10) + 10 \log_{10}(I) = 120 \times 1 + 10 \log_{10}(I) = 120 + 10 \log_{10} I \end{aligned}$$

112.2. Recorrendo à igualdade anterior e, identificando que $N = 140$, podemos determinar o valor de I , correspondente, em watt por metro quadrado:

$$140 = 120 + 10 \log_{10} I \Leftrightarrow 140 - 120 = 10 \log_{10} I \Leftrightarrow \frac{20}{10} = \log_{10} I \Leftrightarrow 2 = \log_{10} I \Leftrightarrow I = 10^2 \Leftrightarrow I = 100$$

Exame - 2002, 1.ª fase - 2.ª chamada (cód. 435)

113.

113.1. Como o tempo é medido em horas, quinze minutos corresponde a $t = \frac{1}{4}$, pelo que o valor da concentração do antibiótico no sangue da Ana, quinze depois minutos de ela o ter tomado, arredondado às centésimas é:

$$A\left(\frac{1}{4}\right) = 4\left(\frac{1}{4}\right)^3 e^{-\frac{1}{4}} \approx 0,05 \text{ mg/l}$$



- 113.2. Os instantes em que as concentrações são iguais são as soluções da equação $A(t) = C(t)$. Assim, resolvendo a equação, temos:

$$\begin{aligned} A(t) = C(t) &\Leftrightarrow 4t^3e^{-t} = 2t^3e^{-0,7t} \Leftrightarrow 4t^3e^{-t} - 2t^3e^{-0,7t} = 0 \Leftrightarrow 2t^3(2e^{-t} - e^{-0,7t}) = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 2t^3 = 0 \vee 2e^{-t} - e^{-0,7t} = 0 \Leftrightarrow t^3 = 0 \vee 2e^{-t} = e^{-0,7t} \Leftrightarrow t = 0 \vee 2 = \frac{e^{-0,7t}}{e^{-t}} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow t = 0 \vee 2 = e^{-0,7t-(-t)} \Leftrightarrow t = 0 \vee 2 = e^{0,3t} \Leftrightarrow t = 0 \vee 0,3t = \ln 2 \Leftrightarrow t = 0 \vee t = \frac{\ln 2}{0,3} \end{aligned}$$

Logo, para além do instante $t = 0$ (correspondente ao instante em que as duas pessoas tomam o medicamento) a concentração volta a ser igual no instante $t = \frac{\ln 2}{0,3} \approx 2,310$. E como cada hora tem 60 minutos, fazendo a conversão de 0,310 horas para minutos, vem:

$$0,310 \times 60 \approx 19 \text{ min}$$

Pelo que se concluí a concentração do medicamento, no sangue da Ana e do Carlos, volta a ser igual ao fim de 2 horas e 19 minutos depois da toma simultânea.

Exame – 2002, 1.ª fase - 1.ª chamada (cód. 435)

114. O tempo necessário para a temperatura do pudim seja igual a doze graus é a solução da equação $f(t) = 12$. Resolvendo a equação, para valores de $t < 60$, vem:

$$\begin{aligned} f(t) = 12 &\Leftrightarrow 20 + 80 \times 2^{-0,05t} = 12 \Leftrightarrow 80 \times 2^{-0,05t} = 12 - 20 \Leftrightarrow 80 \times 2^{-0,05t} = 12 - 20 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 2^{-0,05t} = -\frac{8}{80} \Leftrightarrow 2^{-0,05t} = -0,1 \Leftrightarrow -0,05t = \log_2(-0,1) \text{ Equação impossível} \end{aligned}$$

Resolvendo a equação, para valores de $t \geq 60$, vem:

$$\begin{aligned} f(t) = 12 &\Leftrightarrow 6 + 24 \times 2^{-0,05(t-60)} = 12 \Leftrightarrow 24 \times 2^{-0,05(t-60)} = 12 - 6 \Leftrightarrow 2^{-0,05(t-60)} = \frac{6}{24} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 2^{-0,05(t-60)} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow -0,05(t-60) = \log_2\left(\frac{1}{4}\right) \Leftrightarrow t - 60 = \frac{\log_2(1) - \log_2(4)}{-0,05} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow t = \frac{0 - 2}{-0,05} + 60 \Leftrightarrow t = \frac{2 \times 100}{5} + 60 \Leftrightarrow t = 40 + 60 \Leftrightarrow t = 100 \text{ min} \end{aligned}$$

Desta forma, a única solução da equação $f(t) = 12$ é $t = 100$, o que significa que demora 100 minutos para que a temperatura do pudim fique igual a doze graus. Assim, como o pudim esteve uma hora a arrefecer na bancada (60 min), o pudim deve ficar no frigorífico durante $100 - 60 = 40$

minutos. Exame – 2001, Prova para militares (cód. 435)

115. Usando as propriedades dos logaritmos e das potências, temos que:

$$3y = \log_2 x \Leftrightarrow x = 2^{3y} \Leftrightarrow x = 2^{3y} \Leftrightarrow x = (2^3)^y \Leftrightarrow x = 8^y$$

Resposta: **Opção A**

Exame – 2001, Ép. especial (cód. 435)



116.

116.1. Usando as propriedades das potências, verificamos que $\frac{A(t+1)}{A(t)}$ é constante, porque:

$$\frac{A(t+1)}{A(t)} = \frac{16e^{0,1(t+1)}}{16e^{0,1t}} = \frac{e^{0,1t+0,1}}{e^{0,1t}} = \frac{e^{0,1t} \times e^{0,1}}{e^{0,1t}} = e^{0,1} \approx 1,1$$

No contexto da situação descrita, temos que a razão das áreas das manchas observadas com uma diferença de uma hora é 1,1, ou seja, a cada hora a mancha aumenta 0,1 vezes a sua área, o que significa que a mancha aumenta 10% a cada hora.

$$\frac{A(t+1)}{A(t)} \approx 1,1 \Leftrightarrow A(t+1) \approx 1,1 \times A(t) \Leftrightarrow A(t+1) \approx A(t) + 0,1 \times A(t)$$

116.2. Como a mancha de crude é circular, com um raio de sete quilómetros, a área da mancha é:

$$A_M = \pi \times 7^2 = 49\pi$$

Determinando o tempo a que corresponde este valor da área, temos:

$$A(t) = 49\pi \Leftrightarrow 16e^{0,1t} = 49\pi \Leftrightarrow e^{0,1t} = \frac{49\pi}{16} \Leftrightarrow 0,1t = \ln\left(\frac{49\pi}{16}\right) \Leftrightarrow t = \frac{\ln\left(\frac{49\pi}{16}\right)}{0,1} \Rightarrow t \approx 22,640$$

Como cada hora tem 60 minutos, fazendo a conversão de 0,640 horas para minutos, vem:

$$0,640 \times 60 \approx 38 \text{ min}$$

Assim, temos que a mancha de crude atingirá a costa às 22 horas e 38 minutos do dia seguinte ao acidente.

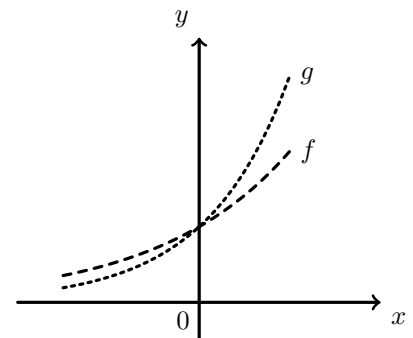
Exame – 2001, 2.ª Fase (cód. 435)

117. Temos que:

- Por exemplo, para $x = -1$ temos que $2^x - 1 > 3^x - 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2} > \frac{1}{3}$, existe pelo menos um valor de $x \in \mathbb{R}^-$ que é solução da inequação $f(x) > g(x)$
- Por exemplo, para $x = 1$ temos que $2^1 < 3^1 \Leftrightarrow 2 < 3$, existe pelo menos um valor de $x \in \mathbb{R}^+$ que não é solução da inequação $f(x) > g(x)$

Assim, como identificamos uma solução da inequação, podemos garantir que é possível e como identificamos um valor de $x \in \mathbb{R}^+$ podemos garantir que o conjunto solução não é \mathbb{R} , nem é \mathbb{R}^+ , pelo que de, entre as opções apresentadas, podemos concluir que o conjunto solução é \mathbb{R}^-

Em alternativa, podemos recorrer à representação gráfica das duas funções para verificar que as ordenadas dos pontos do gráfico de f são superiores às ordenadas dos pontos do gráfico de g para valores negativos de x , como se pode observar na figura ao lado.



Resposta: **Opção B**

Exame – 2001, 1.ª fase - 2.ª chamada (cód. 435)



118.

118.1. Como a altura do Ricardo é $A = 1,4$, determinando o peso correspondente, e apresentando o resultado em quilogramas, arredondado às unidades, vem:

$$\begin{aligned} A(p) = 1,4 &\Leftrightarrow -0,52 + 0,55 \ln p = 1,4 \Leftrightarrow 0,55 \ln p = 1,4 + 0,52 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \ln p = \frac{1,92}{0,55} \Leftrightarrow p = e^{\frac{1,92}{0,55}} \Rightarrow p \approx 33 \text{ kg} \end{aligned}$$

118.2. Recorrendo às propriedades dos logaritmos podemos verificar que $A(2p) - A(p)$ é constante porque:

$$\begin{aligned} A(2p) - A(p) &= -0,52 + 0,55 \ln(2p) - (-0,52 + 0,55 \ln p) = -0,52 + 0,55 \ln(2p) + 0,52 - 0,55 \ln p = \\ &= 0,55 \ln(2p) - 0,55 \ln p = 0,55(\ln(2p) - \ln p) = 0,55 \ln\left(\frac{2p}{p}\right) = 0,55 \ln 2 \approx 0,38 \end{aligned}$$

No contexto da situação descrita, o valor da constante calculada significa que a diferença entre as alturas de duas crianças do sexo masculino, cujos pesos sejam o dobro um do outro, é de 0,38 metros, ou seja, segundo este modelo, a duplicação do peso de uma criança do sexo masculino corresponde um crescimento de 38 centímetros.

Exame – 2001, 1.ª fase - 2.ª chamada (cód. 435)

119. Usando as propriedades das potências e a definição de logaritmo, temos que:

$$e^{2 \ln a} = (e^{\ln a})^2 = a^2$$

Resposta: **Opção D**

Exame – 2001, 1ª fase - 1ª chamada (cód. 435)

120.

120.1. Como a altitude do cume do Pico é 2350 metros, ou seja, 2,35 quilómetros, então, calculando a pressão atmosférica, em quilopascal, de acordo com o modelo, e arredondado o valor obtido às unidades, temos:

$$P(2,35) = 101e^{-0,12 \times 2,35} \approx 76 \text{ kPa}$$

120.2. Resolvendo a equação, e arredondado a solução às décimas, vem que:

$$\begin{aligned} P(h+x) = \frac{1}{2}P(h) &\Leftrightarrow 101e^{-0,12(h+x)} = \frac{1}{2} \times 101e^{-0,12h} \Leftrightarrow \frac{101e^{-0,12h-0,12x}}{101e^{-0,12h}} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{e^{-0,12h-0,12x}}{e^{-0,12h}} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow e^{-0,12h-0,12x-(-0,12h)} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow e^{-0,12x} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow -0,12x = \ln\left(\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow x = \frac{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}{-0,12} \Rightarrow x \approx 5,8 \end{aligned}$$

No contexto da situação descrita, $P(h+5,8) \approx \frac{1}{2}P(h)$ significa que para um acréscimo de 5,8 km de altitude a pressão atmosférica correspondente se reduz para metade.

Exame – 2000, 2.ª fase (cód. 435)



121. Resolvendo a equação, temos que:

$$\begin{aligned}\ln[f(x)] = x &\Leftrightarrow \ln\left(\frac{e^x}{x-1}\right) = x \Leftrightarrow \ln(e^x) - \ln(x-1) = x \Leftrightarrow x - \ln(x-1) = x \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x - x = \ln(x-1) \Leftrightarrow 0 = \ln(x-1) \Leftrightarrow x-1 = e^0 \Leftrightarrow x-1 = 1 \Leftrightarrow x = 2\end{aligned}$$

Exame – 2000, 1.ª fase - 2.ª chamada (cód. 435)

122. A abscissa do ponto P , é a solução da equação $f(x) = \frac{1}{3}$:

$$f(x) = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \log_8 x = \frac{1}{3} \Leftrightarrow x = 8^{\frac{1}{3}} \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{8} \Leftrightarrow x = 2$$

Resposta: **Opção D**

Exame – 2000, 1.ª fase - 1.ª chamada (cód. 435)

123. Sabendo que $\log_a b = c$, e recorrendo às propriedades dos logaritmos, temos que:

$$\log_a(ab) = \log_a(a) + \log_a(b) = 1 + c$$

Resposta: **Opção A**

Exame – 2000, Prova modelo (cód. 435)

124. Como o gráfico de f intersecta o eixo Oy no ponto de ordenada 2, ou seja no ponto de coordenadas $(0,2)$, substituindo as coordenadas do ponto na expressão algébrica da função f , podemos calcular o valor de a :

$$f(0) = 2 \Leftrightarrow e^{0+a} = 2 \Leftrightarrow e^a = 2 \Leftrightarrow a = \ln 2$$

Resposta: **Opção A**

Exame – 2000, Prova para militares (cód. 135)

125. Usando as propriedades dos logaritmos e das potências, temos que:

$$g(x) = \log_2(2 \cdot \sqrt[3]{x}) = \log_2(2) + \log_2(\sqrt[3]{x}) = 1 + \log_2\left(x^{\frac{1}{3}}\right) = 1 + \frac{1}{3} \times \log_2 x = \frac{3}{3} + \frac{\log_2 x}{3} = \frac{3 + \log_2 x}{3}$$

Resposta: **Opção C**

Exame – 1999, Prova modelo (cód. 135)

126. Como o momento em que o pára-quedas se abre, corresponde a zero segundos após a abertura do pára-quedas, então calculando a distância, em metros, ao solo no momento da abertura do pára-quedas, temos:

$$d(0) = 840 - 6(0) + 25e^{-1,7(0)} = 840 + 25e^0 = 840 + 25 \times 1 = 865 \text{ m}$$

Como a distância ao solo no momento do salto é de 1500 metros, a distância percorrida em queda livre, ou seja, entre o salto do helicóptero e a abertura do pára-quedas é:

$$1500 - 865 = 635 \text{ m}$$

Exame – 1998, Prova para militares (cód. 135)



127.

127.1. Como o valor da magnitude é 8,6 ($M = 8,6$), determinando o valor correspondente da energia total libertada, em Joule, vem que:

$$\log_{10} E = 5,24 + 1,44 \times 8,6 \Leftrightarrow \log_{10} E = 17,624 \Leftrightarrow E = 10^{17,624} \Rightarrow E \approx 4,2 \times 10^{17} J$$

127.2. Como cinco vezes a energia total libertada pelo terremoto de Lisboa de 1755 é

$$5 \times 4,2 \times 10^{17} = 2,1 \times 10^{18}$$

ou seja $E = 2,1 \times 10^{18}$, determinando o valor correspondente da da magnitude, e apresentando o resultado na forma de dízima, arredondado às décimas, temos:

$$\begin{aligned} \log_{10} (2,1 \times 10^{18}) &= 5,24 + 1,44M \Leftrightarrow \log_{10}(2,1) + \log_{10} (10^{18}) = 5,24 + 1,44M \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \log_{10}(2,1) + 18 &= 5,24 + 1,44M \Leftrightarrow \log_{10}(2,1) + 18 - 5,24 = 1,44M \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{\log_{10}(2,1) + 12,76}{1,44} &= M \Rightarrow M \approx 9,1 \end{aligned}$$

Exame – 1998, 2.ª fase (cód. 135)

128.

128.1. Usando as propriedades dos logaritmos, temos que:

$$f(x) = \log_2(8x^2) - \log_2 x = \log_2(8) + \log_2(x^2) - \log_2 x = 3 + \log_2 \left(\frac{x^2}{x} \right) = 3 + \log_2(x)$$

128.2. A abcissa do ponto do gráfico de f que tem ordenada 8 é a solução da equação $f(x) = 8$. Usando a expressão algébrica anterior, e resolvendo a equação, vem que:

$$f(x) = 8 \Leftrightarrow 3 + \log_2(x) = 8 \Leftrightarrow \log_2(x) = 8 - 3 \Leftrightarrow \log_2(x) = 5 \Leftrightarrow x = 2^5 \Leftrightarrow x = 32$$

Exame – 1998, 1.ª fase - 1.ª chamada (cód. 135)

129. Calculando a ordenada do ponto do gráfico de f , cuja abcissa é e , temos que:

$$f(e) = \ln(3e) = \ln 3 + \ln e = \ln 3 + 1 = 1 + \ln 3$$

Resposta: **Opção B**

Exame – 1998, Prova modelo (cód. 135)

130. Como o primeiro poste está a zero metros dele próprio, a sua altura é dada por:

$$f(0) = 5 (e^{1-0,1 \times 0} + e^{0,1 \times 0-1}) = 5 (e^1 + e^{-1}) = 5 \left(e + \frac{1}{e} \right)$$

Analogamente, como o segundo poste está a 30 metros do primeiro poste, a sua altura é dada por:

$$f(30) = 5 (e^{1-0,1 \times 30} + e^{0,1 \times 30-1}) = 5 (e^{-2} + e^2) = 5 \left(\frac{1}{e^2} + e^2 \right)$$

E assim, calculando a diferença, em metros, das alturas dos dois postes, e apresentando o resultado na forma de dízima, com aproximação às décimas, temos:

$$f(30) - f(0) = 5 \left(\frac{1}{e^2} + e^2 \right) - 5 \left(e + \frac{1}{e} \right) \approx 22,2 \text{ m}$$

Exame – 1998, Prova modelo (cód. 135)



131.

131.1. O valor inicial da atividade, corresponde a $t = 0$, pelo que o valor de R correspondente é:

$$R(0) = A \times e^{-B \times 0} = A \times e^0 = A \times 1 = A$$

Desta forma, metade do valor inicial é $\frac{A}{2}$ e o valor de t correspondente é a solução da equação:

$$\begin{aligned} R(t) = \frac{A}{2} &\Leftrightarrow A \times e^{-Bt} = \frac{A}{2} \Leftrightarrow e^{-Bt} = \frac{A}{A \times 2} \Leftrightarrow e^{-Bt} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow -Bt = \ln\left(\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow -Bt = \ln 1 - \ln 2 \Leftrightarrow -Bt = 0 - \ln 2 \Leftrightarrow t = \frac{-\ln 2}{-B} \Leftrightarrow t = \frac{\ln 2}{B} \end{aligned}$$

131.2. Pelo cálculo do item anterior, sabemos que o valor inicial da atividade é o valor de A , pelo que, para esta substância temos que:

$$A = 28$$

Substituindo os valores de $A = 28$, $t = 1$ e $R = 26$, na expressão dada, determinamos o valor de B :

$$\begin{aligned} 26 = 28 \times e^{-B \times 1} &\Leftrightarrow \frac{26}{28} = e^{-B} \Leftrightarrow \frac{13}{14} = e^{-B} \Leftrightarrow -B = \ln\left(\frac{13}{14}\right) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow -B = \ln 13 - \ln 14 \Leftrightarrow B = \ln 14 - \ln 13 \end{aligned}$$

Exame – 1997, 2.ª fase (cód. 135)

