

Funções (12.º ano)  
**Funções trigonométricas**

Exercícios de Provas Nacionais e Testes Intermédios - Propostas de resolução



1.

1.1. Para averiguar se a função  $f$  é contínua em  $x = 0$ , temos que verificar se  $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$

- $f(0) = \frac{4 \cos 0}{\sin 0 - 2} = \frac{4 \times 1}{0 - 2} = \frac{4}{-2} = -2$
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{4 \cos x}{\sin x - 2} = \frac{4 \cos 0^+}{\sin 0^+ - 2} = -2$
- $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1 - e^{6x}}{3x} = \frac{1 - e^{6 \times 0^-}}{3 \times 0^-} = \frac{1 - 1}{0} = \frac{0}{0}$  (Indeterminação)

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1 - e^{6x}}{3x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1 - e^{6x}}{3x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left( \frac{-(-1 + e^{6x})}{3x} \times \frac{2}{2} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left( -2 \times \frac{e^{6x} - 1}{6x} \right) =$$

(considerando  $y = 6x$ , temos que se  $x \rightarrow 0^-$ , então  $y \rightarrow 0^-$ )

$$= \lim_{y \rightarrow 0^-} -2 \times \underbrace{\lim_{y \rightarrow 0^-} \frac{e^y - 1}{y}}_{\text{Lim. Notável}} = -2 \times 1 = -2$$

Como  $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$ , então a função  $f$  é contínua em  $x = 0$ .

1.2. Começamos por determinar a expressão da derivada da função  $f$ , para  $x \in ]0, 2\pi[$ :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left( \frac{4 \cos x}{\operatorname{sen} x - 2} \right)' = \frac{(4 \cos x)' (\operatorname{sen} x - 2) - (4 \cos x) (\operatorname{sen} x - 2)'}{(\operatorname{sen} x - 2)^2} = \\ &= \frac{4 (\cos x)' (\operatorname{sen} x - 2) - (4 \cos x) ((\operatorname{sen} x)' - (2)')}{(\operatorname{sen} x - 2)^2} = \frac{4 (-\operatorname{sen} x) (\operatorname{sen} x - 2) - (4 \cos x) (\cos x - 0)}{(\operatorname{sen} x - 2)^2} = \\ &= \frac{-4 \operatorname{sen}^2 x + 8 \operatorname{sen} x - 4 \cos^2 x}{(\operatorname{sen} x - 2)^2} = \frac{-4 (\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x - 2 \operatorname{sen} x)}{(\operatorname{sen} x - 2)^2} = \frac{-4}{(\operatorname{sen} x - 2)^2} \times (1 - 2 \operatorname{sen} x) \end{aligned}$$

Calculando os zeros da derivada da função  $f$ , em  $x \in ]0, 2\pi[$ :

$$\begin{aligned} f'(x) = 0 &\Leftrightarrow \underbrace{\frac{-4}{(\operatorname{sen} x - 2)^2}}_{\text{Cond. impossível}} = 0 \vee 1 - 2 \operatorname{sen} x = 0 \Leftrightarrow -2 \operatorname{sen} x = -1 \Leftrightarrow \operatorname{sen} x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \operatorname{sen} x = \operatorname{sen} \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee x = \pi - \frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Assim, como  $x \in ]0, 2\pi[$ , as únicas soluções da equação são  $x = \frac{\pi}{6} \vee x = \frac{5\pi}{6}, (k = 0)$ .

Estudando a variação do sinal da derivada e relacionando com a monotonia da função, vem:

$x$	0		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{5\pi}{6}$		$2\pi$
$\frac{-4}{(\operatorname{sen} x - 2)^2}$	n.d.	-	-	-	-	-	-
$1 - 2 \operatorname{sen} x$	n.d.	+	0	-	0	+	+
$f'$	n.d.	-	0	+	0	-	-
$f$	n.d.	$\searrow$	min.	$\nearrow$	Máx.	$\searrow$	min.

Assim, podemos concluir que a função  $f$ :

- é crescente no intervalo  $\left[ \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6} \right]$ ;
- é decrescente no intervalo  $\left] 0, \frac{\pi}{6} \right]$  e no intervalo  $\left[ \frac{5\pi}{6}, 2\pi \right]$ ;
- tem extremos relativos para:  $x = \frac{\pi}{6}$ ;  $x = \frac{5\pi}{6}$  e  $x = 2\pi$ .

Exame – 2024, Ép. especial

2.

2.1. Como o declive da reta tangente ao gráfico de  $g$ , em cada ponto é dado por  $g'(x)$ , o declive da reta  $r$ , tangente no ponto de abcissa 0, é:

$$m_r = g'(0) = \cos(2 \times 0) + 2 \operatorname{sen}(0) = 1 + 2 \times 0 = 1$$

Como retas paralelas têm declives iguais, o declive da reta  $s$  é  $m_s = m_r = 1$ , pelo que a equação da reta  $s$  é da forma  $s: y = x + b$ .

Como a reta intersecta o eixo  $Ox$  no ponto de abcissa 4, contém o ponto de coordenadas  $(4, 0)$ . Assim, substituindo as coordenadas na equação anterior, podemos determinar o valor da ordenada na origem:

$$0 = 4 + b \Leftrightarrow -4 = b$$

Desta forma temos que a equação reduzida da reta  $s$ , é  $y = x - 4$ .





2.2. Para estudar o sentido das concavidades e a existência de pontos de inflexão, começamos por determinar a expressão da segunda derivada:

$$\begin{aligned} g''(x) &= (g'(x))' = (\cos(2x) + 2\sin x)' = (\cos(2x))' + (2\sin x)' = -(2x)' \sin(2x) + 2\cos x = \\ &= -2\sin(2x) + 2\cos x = -2(2\sin x \cos x) + 2\cos x = -4\sin x \cos x + 2\cos x = 2\cos x(-2\sin x + 1) \end{aligned}$$

Determinando os zeros da segunda derivada, vem:

$$\begin{aligned} g''(x) = 0 &\Leftrightarrow 2\cos x(-2\sin x + 1) = 0 \Leftrightarrow 2\cos x = 0 \vee -2\sin x + 1 = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \cos x = 0 \vee -2\sin x = -1 \Leftrightarrow \cos x = 0 \vee \sin x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi \vee x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Como  $x \in ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ ,  $g''(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6}$ . Desta forma, estudando a variação de sinal de  $g''$  e relacionando com o sentido das concavidades do gráfico de  $g$ , vem:

$x$	$-\frac{\pi}{2}$		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{2}$
$2\cos x$	n.d.	+	+	+	n.d.
$-2\sin x + 1$	n.d.	+	0	-	n.d.
$g''$	n.d.	+	0	-	n.d.
$g$	n.d.		Pt. I.		n.d.

Logo, podemos concluir que o gráfico de  $g$ :

- tem a concavidade voltada para baixo no intervalo  $[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}[$
- tem a concavidade voltada para cima no intervalo  $] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{6}]$
- tem um único ponto de inflexão, cuja abscissa é  $x = \frac{\pi}{6}$ .

Exame – 2024, 2.<sup>a</sup> Fase

3. Como a função é contínua em  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$  (porque resulta de operações entre funções contínuas e  $x = 0$  é o único valor que anula o denominador), a reta de equação  $x = 0$  é a única reta vertical que pode ser assíntota do gráfico de  $f$ .

Desta forma, temos que:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \cos x}{x^4} = \frac{1 - \cos 0}{0} = \frac{1 - 1}{0} = \frac{0}{0} \text{ (Indeterminação)} \\ \lim_{x \rightarrow 0} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}{x^4(1 + \cos x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1^2 - \cos^2 x}{x^4(1 + \cos x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x}{x^4(1 + \cos x)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x^4(1 + \cos x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\sin x}{x} \times \frac{\sin x}{x} \times \frac{1}{x^2(1 + \cos x)} \right) = \\ &= \underbrace{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}}_{\text{Lim. Notável}} \times \underbrace{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}}_{\text{Lim. Notável}} \times \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2(1 + \cos x)} = 1 \times 1 \times \frac{1}{0^2(1 + \cos 0)} = \frac{1}{0^+} = +\infty \end{aligned}$$

Logo, podemos concluir que a reta de equação  $x = 0$  é a única assíntota vertical do gráfico de  $f$ .

Exame – 2024, 1.<sup>a</sup> Fase



4. Como o domínio de  $f$  é  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ , para que exista  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ , então tem que se verificar  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$

Assim, temos que:

- $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (\ln(2 - e^{-x}) + x + 2) = \ln(2 - e^0) + 0 + 2 = \ln(2 - 1) + 2 = \ln 1 + 2 = 0 + 2 = 2$
- $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\text{sen}(ax)}{e^x - 1} = \frac{\text{sen}(a \times 0)}{e^0 - 1} = \frac{\text{sen } 0}{1 - 1} = \frac{0}{0}$  (Indeterminação)

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\text{sen}(ax)}{e^x - 1} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left( \frac{\text{sen}(ax)}{e^x - 1} \times \frac{ax}{ax} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left( \frac{\text{sen}(ax)}{ax} \times \frac{ax}{e^x - 1} \right) =$$

(considerando  $y = ax$ , temos que se  $x \rightarrow 0^-$ , então  $y \rightarrow 0^-$ , porque  $a > 0$ )

$$= \underbrace{\lim_{y \rightarrow 0^-} \frac{\text{sen } y}{y}}_{\text{Lim. Notável}} \times \lim_{x \rightarrow 0^-} \left( a \times \frac{x}{e^x - 1} \right) = 1 \times \lim_{x \rightarrow 0^-} a \times \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{e^x - 1} = a \times \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{\frac{e^x - 1}{x}} =$$

$$= a \times \frac{\lim_{x \rightarrow 0^-} 1}{\underbrace{\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^x - 1}{x}}_{\text{Lim. Notável}}} = a \times \frac{1}{1} = a$$

Logo, determinando o valor de  $a$ , vem:  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) \Leftrightarrow 2 = a$

Exame – 2023, Ép. especial



5.

5.1. Começamos por determinar a expressão da derivada da função  $g$ :

$$g'(x) = (e^x \cos x)' = (e^x)' \times \cos x + e^x \times (\cos x)' = e^x \cos x + e^x (-\sin x) = e^x (\cos x - \sin x)$$

Calculando os zeros da derivada da função  $g$ , temos:

$$\begin{aligned} g'(x) = 0 &\Leftrightarrow e^x (\cos x - \sin x) = 0 \Leftrightarrow \underbrace{e^x = 0}_{\text{Cond. impossível}} \vee \cos x = \sin x \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \cos x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} - x + 2k\pi \vee x = -\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x + x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \vee x = -\frac{\pi}{2} + x + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \vee \underbrace{0x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi}_{\text{Cond. impossível}}, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Assim, como o domínio de  $g$  é  $[0, \pi[$ , a única solução da equação é  $x = \frac{\pi}{4}$ , ( $k = 0$ ).

Estudando a variação do sinal da derivada e relacionando com a monotonia da função, vem:

$x$	0		$\frac{\pi}{4}$		$\pi$
$e^x$	+	+	+	+	n.d.
$\cos x - \sin x$	+	+	0	-	n.d.
$g'$	+	+	0	-	n.d.
$g$	min.	$\longrightarrow$	Máx.	$\longrightarrow$	n.d.

Assim, podemos concluir que a função  $f$ :

- é crescente no intervalo  $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ ;
- é decrescente no intervalo  $\left[\frac{\pi}{4}, \pi\right]$ ;
- tem um mínimo relativo que é:  $g(0) = e^0 (\cos(0)) = 1 \times 1 = 1$ ;
- tem um máximo relativo que é:  $g\left(\frac{\pi}{4}\right) = e^{\frac{\pi}{4}} \left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = e^{\frac{\pi}{4}} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{e^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{2}}{2}$ .

5.2. A abscissa dos pontos do gráfico da função  $g$  com a ordenada igual à abscissa são soluções da equação

$$g(x) = x \Leftrightarrow g(x) - x = 0$$

Assim vamos mostrar que a função  $h(x) = g(x) - x$  tem pelo menos um zero no intervalo  $\left]\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right[$ .Como a função  $g$ , e também a função  $h$  resultam de operações sucessivas de funções contínuas em  $[0, \pi[$ , são contínuas neste intervalo, e em particular no intervalo  $\left]\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right[$ .Como  $h\left(\frac{\pi}{2}\right) < 0 < h\left(\frac{\pi}{3}\right)$ , então, podemos concluir, pelo Teorema de Bolzano, que existe  $c \in \left]\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right[$  tal que  $h(c) = 0$ , ou seja, que existe, pelo menos, uma solução da equação  $h(x) = g(x) - x$  no intervalo  $\left]\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right[$ , isto é, que existe, pelo menos, um ponto do gráfico de  $g$  cuja ordenada é igual à abscissa, neste intervalo.

C.A.

$$h\left(\frac{\pi}{3}\right) = e^{\frac{\pi}{3}} \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - \frac{\pi}{3} \approx 0,38$$

$$h\left(\frac{\pi}{2}\right) = e^{\frac{\pi}{2}} \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - \frac{\pi}{2} \approx -1,57$$



6. Calculando o valor do limite, temos:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}(2x)}{x} = \frac{\operatorname{sen} 0}{0} = \frac{0}{0} \text{ (Indeterminação)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}(2x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \times \operatorname{sen}(2x)}{2x} = 2 \times \underbrace{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}(2x)}{2x}}_{\text{Lim. Notável}} = 2 \times 1 = 2$$

Resposta: **Opção D**

Exame – 2023, 2.<sup>a</sup> Fase

7. Como a reta  $AB$  é tangente à semicircunferência no ponto  $T$ , e o segmento de reta  $[OT]$  é um raio, então as retas  $AB$  e  $OT$  são perpendiculares, pelo que os triângulos  $[OTA]$  e  $[OTB]$  são retângulos em  $T$ , cujas hipotenusas são, respectivamente, os lados  $[OA]$  e  $[OB]$ .

Como  $\overline{OT} = 2$  e  $T\hat{O}B = \frac{\pi}{2} - \alpha$ , recorrendo à definição de cosseno, temos:

$$\begin{aligned} \bullet \cos \alpha &= \frac{\overline{OT}}{\overline{OA}} \Leftrightarrow \cos \alpha = \frac{2}{\overline{OA}} \Leftrightarrow \overline{OA} = \frac{2}{\cos \alpha} \\ \bullet \cos T\hat{O}B &= \frac{\overline{OT}}{\overline{OB}} \Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \frac{2}{\overline{OB}} \Leftrightarrow \overline{OB} = \frac{2}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)} = \frac{2}{\operatorname{sen} \alpha} \end{aligned}$$

Assim, determinando a área do triângulo, vem:

$$A_{[ABC]} = \frac{2 \times \overline{OA} \times \overline{OB}}{2} = \overline{OA} \times \overline{OB} = \frac{2}{\cos \alpha} \times \frac{2}{\operatorname{sen} \alpha} = \frac{4}{\operatorname{sen} \alpha \cdot \cos \alpha} = \frac{2 \times 4}{2 \times \operatorname{sen} \alpha \cdot \cos \alpha} = \frac{8}{\operatorname{sen}(2\alpha)}$$

Exame – 2023, 2.<sup>a</sup> Fase

8. Identificando as coordenadas dos pontos  $Q$  e  $P$ , temos:

- como o ponto  $Q$  pertence à circunferência de centro na origem e raio 2 e a semirreta  $\hat{O}Q$  define com o semieixo positivo  $Ox$  um ângulo de amplitude  $\alpha$ , as suas coordenadas são  $(2 \cos \alpha, 2 \operatorname{sen} \alpha)$ , pelo que  $\overrightarrow{OQ} = Q - O = (2 \cos \alpha, 2 \operatorname{sen} \alpha)$ ,
- como o ponto  $P$  pertence à mesma circunferência e tem a mesma abcissa do ponto  $Q$  então a sua ordenada é simétrica da do ponto  $Q$ , pelo que as suas coordenadas são  $(2 \cos \alpha, -2 \operatorname{sen} \alpha)$ , e de forma análoga, se tem que  $\overrightarrow{OP} = P - O = (2 \cos \alpha, -2 \operatorname{sen} \alpha)$ .

Assim, como  $\cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha = \cos(2\alpha)$ , vem que:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ} = 3 &\Leftrightarrow (2 \cos \alpha, -2 \operatorname{sen} \alpha) \cdot (2 \cos \alpha, 2 \operatorname{sen} \alpha) = 3 \Leftrightarrow (2 \cos \alpha)^2 + (-2 \operatorname{sen} \alpha) \times (2 \operatorname{sen} \alpha) = 3 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 4 \cos^2 \alpha - 4 \operatorname{sen}^2 \alpha = 3 \Leftrightarrow 4(\cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha) = 3 \Leftrightarrow \cos(2\alpha) = \frac{3}{4} \end{aligned}$$

Exame – 2023, 1.<sup>a</sup> Fase

9.

9.1. Determinando a expressão da função derivada, temos:

$$\begin{aligned} f'(x) &= (\operatorname{sen}(2x + x))' = (\operatorname{sen}(2x))' + (x)' = (2x)' \cos(2x) + 1 = 2 \cos(2x) + 1 = 2(\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x) + 1 = \\ &= 2(1 - \operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen}^2 x) + 1 = 2(1 - 2 \operatorname{sen}^2 x) + 1 = 2 - 4 \operatorname{sen}^2 x + 1 = 3 - 4 \operatorname{sen}^2 x \end{aligned}$$

Resposta: **Opção D**



9.2. As abscissas dos pontos de interseção da reta  $r$  com o gráfico da função  $f$  são soluções da equação

$$f(x) = -x + 2 \Leftrightarrow f(x) + x - 2 = 0$$

Assim vamos mostrar que a função  $g(x) = f(x) + x - 2$  tem pelo menos um zero no intervalo  $\left] \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3} \right[$ .

Como a função  $f$ , e também a função  $g$  resultam de operações sucessivas de funções contínuas em  $[0, \pi]$ , são contínuas neste intervalo, e em particular no intervalo  $\left[ \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3} \right]$ .

Como  $g\left(\frac{\pi}{6}\right) < 0 < g\left(\frac{\pi}{3}\right)$ , então, podemos concluir, pelo Teorema de Bolzano, que existe  $c \in \left] \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3} \right[$  tal que  $g(c) = 0$ , ou seja, que existe, pelo menos, uma solução da equação  $g(x) = f(x) + x - 2$  no intervalo  $\left] \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3} \right[$ , isto é, que a reta  $r$  intersecta o gráfico da função  $f$  em pelo menos um ponto, cuja abscissa(s) pertencem a este intervalo.

C.A.

$$g\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(2 \times \frac{\pi}{6}\right) + \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6} - 2 \approx \approx -0,09$$

$$g\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(2 \times \frac{\pi}{3}\right) + \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3} - 2 \approx \approx 0,96$$

Exame – 2023, 1.ª Fase

10. Para averiguar se a função  $f$  é contínua em  $x = 0$ , temos que verificar se  $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ :

- $f(0) = \ln \sqrt{e+0} = \ln \sqrt{e} = \ln \left(e^{\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{2} \ln e = \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{2}$
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (\ln \sqrt{e+x}) = \ln \sqrt{e+0^+} = \frac{1}{2}$
- $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1 - \cos x}{x} = \frac{1 - \cos 0^-}{0^-} = \frac{1 - 1}{0} = \frac{0}{0}$  (Indeterminação)

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1 - \cos x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}{x(1 + \cos x)} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1^2 - \cos^2 x}{x(1 + \cos x)} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1 - \cos^2 x}{x(1 + \cos x)} =$$

(como  $\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \Leftrightarrow \sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ )

$$= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin^2 x}{x(1 + \cos x)} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left( \frac{\sin x}{x} \times \frac{\sin x}{1 + \cos x} \right) = \underbrace{\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin x}{x}}_{\text{Lim. Notável}} \times \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin x}{1 + \cos x} =$$

$$= 1 \times \frac{\sin 0}{1 + \cos 0} = 1 \times \frac{0}{2} = 1 \times 0 = 0$$

Como  $f(0) \neq \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$ , então a função  $f$  não é contínua em  $x = 0$ .

Exame – 2022, 2.ª Fase



11. Para estudar o sentido das concavidades e a existência de pontos de inflexão, começamos por determinar a expressão da segunda derivada no intervalo  $]0, \pi[$  :

$$\begin{aligned} g''(x) &= (g'(x))' = (x + 2 \cos^2 x)' = (x)' + 2(\cos x \cos x)' = 1 + 2((\cos x)' \cos x + \cos x(\cos x)') = \\ &= 1 + 2(-\operatorname{sen} x \times \cos x + \cos x(-\operatorname{sen} x)) = 1 + 2 \times 2(-\operatorname{sen} x \cdot \cos x) = \\ &= 1 - 2 \times \underbrace{2 \operatorname{sen} x \cdot \cos x}_{\operatorname{sen}(2x)} = 1 - 2 \operatorname{sen}(2x) \end{aligned}$$




Determinando os zeros da segunda derivada, temos:

$$\begin{aligned} g''(x) = 0 &\Leftrightarrow 1 - 2 \operatorname{sen}(2x) = 0 \Leftrightarrow 2 \operatorname{sen}(2x) = 1 \Leftrightarrow \operatorname{sen}(2x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \operatorname{sen}(2x) = \operatorname{sen} \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee 2x = \pi - \frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{12} + \frac{2k\pi}{2} \vee 2x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{12} + k\pi \vee x = \frac{5\pi}{12} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Como se pretende identificar as soluções do intervalo  $]0, \pi[$ , atribuindo valores inteiros a  $k$  para identificar as soluções no intervalo definido, temos:

- $k = -1 \rightarrow x = \frac{\pi}{12} - \pi = -\frac{11\pi}{12} \vee x = \frac{5\pi}{12} - \pi = -\frac{7\pi}{12} \quad \left( -\frac{11\pi}{12} \notin ]0, \pi[ \text{ e } -\frac{7\pi}{12} \notin ]0, \pi[ \right)$
- $k = 0 \rightarrow x = \frac{\pi}{12} \vee x = \frac{5\pi}{12}$
- $k = 1 \rightarrow x = \frac{\pi}{12} + \pi = \frac{13\pi}{12} \vee x = \frac{5\pi}{12} + \pi = \frac{17\pi}{12} \quad \left( \frac{13\pi}{12} \notin ]0, \pi[ \text{ e } \frac{17\pi}{12} \notin ]0, \pi[ \right)$

Assim, estudando a variação de sinal de  $g''$  e relacionando com o sentido das concavidades do gráfico de  $g$ , vem:

$x$	0		$\frac{\pi}{12}$		$\frac{5\pi}{12}$		$\pi$
$g''$	n.d.	+	0	-	0	+	n.d.
$g$	n.d.		Pt. I.		Pt. I.		n.d.

Logo, podemos concluir que o gráfico de  $g$ :

- tem dois pontos de inflexão (de abcissas  $\frac{\pi}{12}$  e  $\frac{5\pi}{12}$ )
- tem a concavidade voltada para cima no intervalo  $]0, \frac{\pi}{12}[$  e no intervalo  $]\frac{5\pi}{12}, \pi[$
- tem a concavidade voltada para baixo no intervalo  $]\frac{\pi}{12}, \frac{5\pi}{12}[$

Exame – 2022, 2.<sup>a</sup> Fase





12. Para averiguar se a função  $f$  é contínua em  $x = 2$ , temos que verificar se  $f(2) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$

$$\bullet f(2) = \frac{e^{2-2}}{2+2} = \frac{e^0}{4} = \frac{1}{4}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \left( \frac{e^{2-x}}{x+2} \right) = \frac{e^{2-2}}{2+2} = \frac{e^0}{4} = \frac{1}{4}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{\text{sen}(x-2)}{x^2-4} = \frac{\text{sen}(2-2)}{2^2-4} = \frac{\text{sen}(0)}{4-4} = \frac{0}{0} \text{ (Indeterminação)}$$

(como  $x^2 - 4 = (x-2)(x+2)$ )

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{\text{sen}(x-2)}{x^2-4} = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{\text{sen}(x-2)}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \left( \frac{\text{sen}(x-2)}{(x-2)} \times \frac{1}{(x+2)} \right) =$$

(considerando  $y = x - 2$ , temos  $x = y + 2$  e se  $x \rightarrow 2^-$ , então  $y \rightarrow 0^-$ )

$$= \underbrace{\lim_{y \rightarrow 0^-} \frac{\text{sen } y}{y}}_{\text{Lim. Notável}} \times \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1}{(x+2)} = 1 \times \frac{1}{2+2} = 1 \times \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

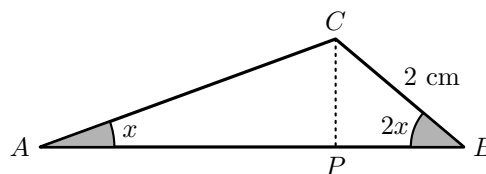
Como  $f(2) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$ , então a função  $f$  é contínua em  $x = 2$ .

Exame – 2022, 1.ª Fase

13. Designado por  $P$  o pé da altura do triângulo relativo ao lado  $[AB]$ , temos que:

$$\bullet \text{sen}(2x) = \frac{\overline{CP}}{2} \Leftrightarrow \overline{CP} = 2 \text{sen}(2x)$$

$$\bullet \cos(2x) = \frac{\overline{BP}}{2} \Leftrightarrow \overline{BP} = 2 \cos(2x)$$



Logo, temos que:

$$\text{tg } x = \frac{\overline{CP}}{\overline{AP}} \Leftrightarrow \overline{AP} = \frac{2 \text{sen}(2x)}{\text{tg } x} \Leftrightarrow \overline{AP} = \frac{2 \times 2 \text{sen } x \cos x}{\frac{\text{sen } x}{\cos x}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \overline{AP} = \frac{4 \text{sen } x \cos x \times \cos x}{\text{sen } x} \Leftrightarrow \overline{AP} = 4 \cos^2 x$$

E assim, vem que:

$$\begin{aligned} \overline{AB} &= \overline{AP} + \overline{BP} = 4 \cos^2 x + 2 \cos(2x) = 4 \cos^2 x + 2(\cos^2 x - \text{sen}^2 x) = 4 \cos^2 x + 2(\cos^2 x - (1 - \cos^2 x)) = \\ &= 4 \cos^2 x + 2(\cos^2 x - 1 + \cos^2 x) = 4 \cos^2 x + 2(2 \cos^2 x - 1) = 4 \cos^2 x + 4 \cos^2 x - 2 = 8 \cos^2 x - 2 \end{aligned}$$

Exame – 2022, 1.ª Fase



14. Como a função  $f$  é contínua em  $x = 1$ , temos que:

$$f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$$

Assim, temos que:

- $f(1) = 1 - 2 + \ln(3 - 2(1)) = 1 - 2 + \ln(1) = -1 + 0 = -1$
- $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left( \frac{\text{sen}(x-1)}{1-x^2} + k \right) = \frac{\text{sen}(1-1)}{1-1^2} + k = \frac{0}{0} + k$  (Indeterminação)

(fazendo  $y = x - 1$ , se  $x \rightarrow 1$ , então  $y \rightarrow 0$ , e observando que  $1 - x^2 = 1^2 - x^2 = (1-x)(1+x) = -(x-1)(x+1)$ )

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^+} \left( \frac{\text{sen}(x-1)}{1-x^2} + k \right) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \left( \frac{\text{sen}(x-1)}{-(x-1)(x+1)} + k \right) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left( \frac{\text{sen}(x-1)}{x-1} \times \frac{1}{-(x+1)} + k \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\text{sen}(x-1)}{x-1} \times \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{-(x+1)} + \lim_{x \rightarrow 1^+} k = \underbrace{\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\text{sen } y}{y}}_{\text{Lim. Notável}} \times \frac{1}{-(1+1)} + k = 1 \times \left( -\frac{1}{2} \right) + k = -\frac{1}{2} + k \end{aligned}$$

Como a função é contínua em  $x = 1$ , podemos determinar o valor de  $k$ :

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1) \Leftrightarrow -\frac{1}{2} + k = -1 \Leftrightarrow k = -1 + \frac{1}{2} \Leftrightarrow k = -\frac{2}{2} + \frac{1}{2} \Leftrightarrow k = -\frac{1}{2}$$

Exame - 2021, Ép. especial



15. Começamos por determinar a expressão da derivada da função  $h$ :

$$\begin{aligned} h'(x) &= (\sin x + \cos^2 x)' = (\sin x)' + (\cos x \times \cos x)' = \cos x + (\cos x)' \times \cos x + \cos(x) \times (\cos x)' = \\ &= \cos x + (-\sin x) \times \cos x + \cos(x) \times (-\sin x) = \cos x - 2 \sin x \cos x = \cos x(1 - 2 \sin x) \end{aligned}$$

Calculando os zeros da derivada, no domínio da função  $\left(0, \frac{\pi}{2}\right]$ , vem:

$$\begin{aligned} h'(x) = 0 &\Leftrightarrow \cos x(1 - 2 \sin x) = 0 \Leftrightarrow \cos x = 0 \vee 1 - 2 \sin x = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \cos x = 0 \vee -2 \sin x = -1 \Leftrightarrow \cos x = 0 \vee \sin x = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Como  $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ , temos:

- $\cos x > 0$ , pelo que  $\cos x = 0$  é uma condição impossível
- $\sin x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{6}$

Assim, temos que  $h'(x)$  tem um zero em  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$  e estudando a variação do sinal da derivada e relacionando com a monotonia da função, vem:

$x$	0		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{2}$
$\cos x$	+	+	+	+	n.d.
$1 - 2 \sin x$	+	+	0	-	n.d.
$h'$	+	+	0	-	n.d.
$h$	min.	$\rightarrow$	Máx	$\rightarrow$	n.d.

Assim, podemos concluir que a função  $h$ :

- é crescente no intervalo  $\left[0, \frac{\pi}{6}\right]$ ;
- é decrescente no intervalo  $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right]$ ;
- tem um mínimo relativo para  $x = 0$ , cujo valor é:

$$h(0) = \sin 0 + \cos^2 0 = 0 + (1)^2 = 0 + 1 = 1$$

- tem um máximo relativo para  $x = \frac{\pi}{6}$ , cujo valor é:

$$h\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sin \frac{\pi}{6} + \cos^2 \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} + \frac{3}{4} = \frac{2}{4} + \frac{3}{4} = \frac{5}{4}$$

Exame – 2021, 2.ª Fase

16. Recorrendo às regras operatórias de logaritmos, e observando que  $\sin(2x) = 2 \sin x \cdot \cos x$ , temos:

$$\begin{aligned} g(x) &= \log_2(1 - \cos x) + \log_2(1 + \cos x) + 2 \log_2(2 \cos x) = \log_2((1 - \cos x)(1 + \cos x)) + \log_2(2 \cos x)^2 = \\ &= \log_2(1 + \cos x - \cos x - \cos^2 x) + \log_2(4 \cos^2 x) = \log_2(1 - \cos^2 x) + \log_2(4 \cos^2 x) = \\ &= \log_2(\sin^2 x) + \log_2(4 \cos^2 x) = \log_2(2^2 \sin^2 x \cdot \cos^2 x) = \log_2(2 \sin x \cdot \cos x)^2 = \\ &= \log_2(\sin(2x))^2 = 2 \log_2(\sin(2x)) \end{aligned}$$

Exame – 2021, Ép. especial

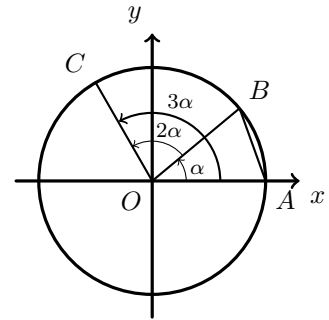


17. Designado a amplitude do ângulo  $AOB$  por  $\alpha$ , temos que:

- $A\hat{O}B = \alpha$
- $B\hat{O}C = 2 \times A\hat{O}B = 2\alpha$
- $A\hat{O}C = A\hat{O}B + B\hat{O}C = \alpha + 2\alpha = 3\alpha$

Como o triângulo  $[AOB]$  tem área  $k$ , considerando o lado  $[OA]$  como a base, temos que a altura é  $\text{sen } \alpha$ , pelo que:

$$A_{[AOB]} = k \Leftrightarrow \frac{\overline{OA} \times \text{sen } \alpha}{2} = k \Leftrightarrow 1 \times \text{sen } \alpha = 2k \Leftrightarrow \text{sen } \alpha = 2k$$



E assim, vem que:

$$\text{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Leftrightarrow (2k)^2 + \cos^2 \alpha = 1 \Leftrightarrow \cos^2 \alpha = 1 - 4k^2$$

Como a ordenada do ponto  $C$  é  $\text{sen}(3\alpha)$ , e como:

- $\text{sen}(3\alpha) = \text{sen}(2\alpha + \alpha)$
- $\text{sen}(\alpha + \beta) = \text{sen } \alpha \cos \beta + \text{sen } \beta \cos \alpha$
- $\text{sen}(2\alpha) = 2 \text{sen } \alpha \cos \alpha$
- $\cos(2\alpha) = \cos^2 \alpha - \text{sen}^2 \alpha$

Então, vem que:

$$\begin{aligned} y_C &= \text{sen}(3\alpha) = \text{sen}(2\alpha + \alpha) = \text{sen}(2\alpha) \cos \alpha + \text{sen } \alpha \cos(2\alpha) = 2 \text{sen } \alpha \cos \alpha \times \cos \alpha + \text{sen } \alpha (\cos^2 \alpha - \text{sen}^2 \alpha) = \\ &= 2 \text{sen } \alpha \cos^2 \alpha + 2k \times (1 - 4k^2 - (2k)^2) = 2 \times 2k \times (1 - 4k^2) + 2k(1 - 4k^2 - 4k^2) = 4k(1 - 4k^2) + 2k(1 - 8k^2) = \\ &= 4k - 16k^3 + 2k - 16k^3 = 6k - 32k^3 \end{aligned}$$

Exame – 2021, 2.ª Fase

18. Começamos por determinar a expressão da derivada da função  $g$ :

$$\begin{aligned} g'(x) &= (x \cos x + \text{sen } x)' = (x \cos x)' + (\text{sen } x)' = (x)' \cos x + x(\cos x)' + \cos x = \\ &= \cos x + x(-\text{sen } x) + \cos x = 2 \cos x - x \text{sen } x \end{aligned}$$

Como o declive da reta tangente ao gráfico num ponto corresponde ao valor da função derivada nesse ponto, mostrar, que existe pelo menos um ponto pertencente ao gráfico da função  $g$  tal que a reta tangente ao gráfico da função nesse ponto tem declive  $-\frac{1}{2}$  é equivalente a mostrar que a equação  $g'(x) = -\frac{1}{2}$  tem pelo menos uma solução.

Como  $g'(x)$  resulta da soma e de produtos de funções contínuas, então é contínua no domínio, ou seja, é contínua em  $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$

Como  $-\frac{\pi}{2} < -\frac{1}{2} < \frac{3\pi}{2}$ , ou seja,  $g'\left(\frac{\pi}{2}\right) < -\frac{1}{2} < g'\left(\frac{3\pi}{2}\right)$ , então, podemos concluir, pelo Teorema de Bolzano, que existe  $c \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$  tal que  $g'(c) = -\frac{1}{2}$ , ou seja, que existe pelo menos um ponto pertencente ao gráfico da função  $g$  tal que a reta tangente ao gráfico da função nesse ponto tem declive  $-\frac{1}{2}$

C.A.

$$\begin{aligned} g'\left(\frac{\pi}{2}\right) &= 2 \cos \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} \times \text{sen } \frac{\pi}{2} = \\ &= 2 \times 0 - \frac{\pi}{2} \times 1 = 0 - \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g'\left(\frac{3\pi}{2}\right) &= 2 \cos \frac{3\pi}{2} - \frac{3\pi}{2} \times \text{sen } \frac{3\pi}{2} = \\ &= 2 \times 0 - \frac{3\pi}{2} \times (-1) = 0 + \frac{3\pi}{2} = \frac{3\pi}{2} \end{aligned}$$

Exame – 2021, 1.ª Fase



19. Determinando as abscissas dos pontos de interseção temos:

$$\begin{aligned} f(x) = g(x) &\Leftrightarrow k \operatorname{sen}(2x) = k \cos x \Leftrightarrow k \operatorname{sen}(2x) = k \cos x \Leftrightarrow 2 \operatorname{sen} x \cos x = \frac{k \cos x}{k} \Leftrightarrow_{k \neq 0} \\ &\Leftrightarrow 2 \operatorname{sen} x \cos x = \cos x \Leftrightarrow 2 \operatorname{sen} x \cos x - \cos x = 0 \Leftrightarrow \cos x(2 \operatorname{sen} x - 1) = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \cos x = 0 \vee 2 \operatorname{sen} x - 1 = 0 \Leftrightarrow \cos x = 0 \vee \operatorname{sen} x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi \vee x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee x = \pi - \frac{\pi}{6} + 2k, \quad k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Atribuindo os valores  $-1$  e  $0$  obtemos as três soluções da equação que pertencem ao domínio das funções  $\left( \left[ -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right] \right)$ :

$$x = -\frac{\pi}{2} \vee x = \frac{\pi}{6} \vee x = \frac{\pi}{2}$$

Assim, podemos determinar as ordenadas dos pontos de interseção:

- $g\left(-\frac{\pi}{2}\right) = k \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = k \times 0 = 0 \quad \left( A\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right) \right)$
- $g\left(\frac{\pi}{6}\right) = k \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = k \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{k\sqrt{3}}{2} \quad \left( B\left(\frac{\pi}{6}, \frac{k\sqrt{3}}{2}\right) \right)$
- $g\left(\frac{\pi}{2}\right) = k \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = k \times 0 = 0 \quad \left( C\left(\frac{\pi}{2}, 0\right) \right)$

Como o triângulo  $[ABC]$  é retângulo em  $B$ , temos que  $\vec{BA} \cdot \vec{BC} = 0$

Calculando as coordenadas dos vetores indicados, temos:

- $\vec{BA} = A - B = \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right) - \left(\frac{\pi}{6}, \frac{k\sqrt{3}}{2}\right) = \left(-\frac{3\pi}{6} - \frac{\pi}{6}, -\frac{k\sqrt{3}}{2}\right) = \left(-\frac{4\pi}{6}, -\frac{k\sqrt{3}}{2}\right) = \left(-\frac{2\pi}{3}, -\frac{k\sqrt{3}}{2}\right)$
- $\vec{BC} = C - B = \left(\frac{\pi}{2}, 0\right) - \left(\frac{\pi}{6}, \frac{k\sqrt{3}}{2}\right) = \left(\frac{3\pi}{6} - \frac{\pi}{6}, -\frac{k\sqrt{3}}{2}\right) = \left(\frac{2\pi}{6}, -\frac{k\sqrt{3}}{2}\right) = \left(\frac{\pi}{3}, -\frac{k\sqrt{3}}{2}\right)$

E assim, calculamos o valor de  $k$ :

$$\begin{aligned} \vec{BA} \cdot \vec{BC} = 0 &\Leftrightarrow \left(-\frac{2\pi}{3}, -\frac{k\sqrt{3}}{2}\right) \cdot \left(\frac{\pi}{3}, -\frac{k\sqrt{3}}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow -\frac{2\pi}{3} \times \frac{\pi}{3} + \left(-\frac{k\sqrt{3}}{2}\right) \times \left(-\frac{k\sqrt{3}}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow -\frac{2\pi^2}{9} + \left(-\frac{k\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow -\frac{2\pi^2}{9} + \frac{k^2 \times 3}{4} = 0 \Leftrightarrow \frac{3k^2}{4} = \frac{2\pi^2}{9} \Leftrightarrow k^2 = \frac{2\pi^2 \times 4}{9 \times 3} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow k^2 = \frac{8\pi^2}{27} \Leftrightarrow_{k > 0} k = \sqrt{\frac{8\pi^2}{27}} \Leftrightarrow k = \sqrt{\frac{8}{27}}\pi \end{aligned}$$

Exame – 2021, 1.ª Fase



20. Como o domínio da função é  $]0, \frac{\pi}{2}[$ , não existem assíntotas não verticais.

E como a função resulta de operações com funções contínuas em, as retas  $]0, \frac{\pi}{2}[$ , as retas definida por  $x = 0$  e  $x = \frac{\pi}{2}$  são as únicas retas que podem ser assíntotas do gráfico de  $f$

Assim temos que:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{2x} - 1}{\operatorname{tg} x} = \frac{e^{2 \times 0} - 1}{\operatorname{tg} 0} = \frac{0}{0} \text{ (Indeterminação)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{e^{2x} - 1}{2x}}{\frac{\operatorname{tg} x}{2x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{e^{2x} - 1}{2x}}{\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{e^{2x} - 1}{2x}}{\frac{\operatorname{sen} x}{2x \cos x}} = \frac{\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{2x} - 1}{2x}}{\lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{\operatorname{sen} x}{x} \times \frac{1}{2 \cos x} \right)} =$$

(fazendo  $y = 2x$ , temos que se  $x \rightarrow 0^+$ , então  $y \rightarrow 0^+$ )

$$= \frac{\lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{e^y - 1}{y}}{\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\operatorname{sen} x}{x} \times \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{2 \cos x}} = \frac{\text{Lim. Notável}}{1 \times \frac{1}{2 \times \cos 0}} = \frac{1}{2 \times 1} = \frac{1}{2} = 2$$

Pelo que a reta  $x = 0$  não é uma assíntota vertical do gráfico de  $f$

Da mesma forma, temos que:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{e^{2x} - 1}{\operatorname{tg} x} = \frac{e^{2 \times \frac{\pi}{2}} - 1}{\operatorname{tg} \frac{\pi}{2}^-} = \frac{e^\pi - 1}{+\infty} = 0$$

Pelo que a reta  $x = \frac{\pi}{2}$  também não é uma assíntota vertical do gráfico de  $f$  e assim podemos concluir que o gráfico de  $f$  não tem qualquer assíntota.

Exame – 2020, Ép. especial



21.

21.1. Como:

$$\begin{aligned} \bullet h\left(\frac{\pi}{6}\right) &= \frac{5}{4 + 3 \cos\left(2 \times \frac{\pi}{6}\right)} = \frac{5}{4 + 3 \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)} = \frac{5}{4 + 3 \times \frac{1}{2}} = \frac{5}{4 + \frac{3}{2}} = \frac{10}{11} \\ \bullet h\left(\frac{7\pi}{6}\right) &= \frac{5}{4 + 3 \cos\left(2 \times \frac{7\pi}{6}\right)} = \frac{5}{4 + 3 \cos\left(\frac{14\pi}{6}\right)} = \frac{5}{4 + 3 \cos\left(\frac{14\pi}{6} - 2\pi\right)} = \frac{5}{4 + 3 \cos\left(\frac{2\pi}{6}\right)} = \\ &= \frac{5}{4 + 3 \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)} = \frac{5}{4 + 3 \times \frac{1}{2}} = \frac{5}{4 + \frac{3}{2}} = \frac{10}{11} \end{aligned}$$

Calculando a taxa média de variação da função  $h$  no intervalo  $\left[\frac{\pi}{6}; \frac{7\pi}{6}\right]$ , temos:

$$\text{TVM}_{\left[\frac{\pi}{6}; \frac{7\pi}{6}\right]} = \frac{h\left(\frac{7\pi}{6}\right) - h\left(\frac{\pi}{6}\right)}{\frac{7\pi}{6} - \frac{\pi}{6}} = \frac{\frac{10}{11} - \frac{10}{11}}{\frac{6\pi}{6}} = \frac{0}{\pi} = 0$$

Resposta: **Opção C**

21.2. As abscissas dos pontos do gráfico da função  $h$ , pertencentes ao intervalo  $]-\pi, \pi[$ , cuja ordenada é 2 são as soluções da equação  $h(x) = 2$  que pertencem ao intervalo.

Assim, resolvendo a equação, temos:

$$\begin{aligned} h(x) = 2 &\Leftrightarrow \frac{5}{4 + 3 \cos(2x)} = 2 \Leftrightarrow_{4+3 \cos(2x) \neq 0} 5 = 2(4 + 3 \cos(2x)) \Leftrightarrow 5 = 8 + 6 \cos(2x) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 5 - 8 = 6 \cos(2x) \Leftrightarrow -\frac{3}{6} = \cos(2x) \Leftrightarrow \cos(2x) = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos(2x) = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \cos(2x) = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) \Leftrightarrow 2x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \vee 2x = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x = \frac{2\pi}{2 \times 3} + \frac{2k\pi}{2} \vee x = -\frac{2\pi}{2 \times 3} + \frac{2k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + k\pi \vee x = -\frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Como se pretende identificar as soluções do intervalo  $]-\pi, \pi[$ , atribuindo valores inteiros a  $k$  para identificar as soluções no intervalo definido, temos:

$$\begin{aligned} \bullet k = -1 &\rightarrow x = \frac{\pi}{3} - \pi = -\frac{2\pi}{3} \vee x = -\frac{\pi}{3} - \pi = -\frac{4\pi}{3} \quad \left(-\frac{4\pi}{3} \notin ]-\pi, \pi[\right) \\ \bullet k = 0 &\rightarrow x = \frac{\pi}{3} \vee x = -\frac{\pi}{3} \\ \bullet k = 1 &\rightarrow x = \frac{\pi}{3} + \pi = \frac{4\pi}{3} \vee x = -\frac{\pi}{3} + \pi = \frac{2\pi}{3} \quad \left(\frac{4\pi}{3} \notin ]-\pi, \pi[\right) \end{aligned}$$

Assim, existem quatro pontos no intervalo dado cuja ordenada 2, ou seja, os pontos cujas abscissas são:

$$-\frac{2\pi}{3}; -\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3} \text{ e } \frac{2\pi}{3}$$

Exame – 2020, Ép. especial



22.

22.1. Temos que:  $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\cos(x)) = (\cos(x))^2 = \cos^2 x$

Como o declive da reta tangente num ponto é dado pelo valor da função derivada nesse ponto, determinamos a derivada da função  $f \circ g$ :

$$\begin{aligned}(f \circ g)'(x) &= (\cos^2 x)' = ((\cos x)(\cos x))' = (\cos x)'(\cos x) + (\cos x)(\cos x)' = 2(\cos x)'(\cos x) = \\ &= 2(-\operatorname{sen} x)(\cos x) = -2 \operatorname{sen} x \cos x\end{aligned}$$

E assim, o declive da reta tangente no ponto de abcissa  $\frac{\pi}{4}$  é:

$$(f \circ g)'\left(\frac{\pi}{4}\right) = -2 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = -2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = -2 \times \frac{2}{4} = -\frac{4}{4} = -1$$

Resposta: **Opção B**

22.2.

Como  $f(x) = g(x) \Leftrightarrow f(x) - g(x) = 0$  e as funções  $f$  e  $g$  são ambas contínuas em  $\mathbb{R}$ , então a função  $f - g$  também é contínua em  $\mathbb{R}$ , e em particular é contínua em  $\left[0, \frac{\pi}{3}\right]$ .

Como  $-1 < 0 < 0,6$ , ou seja,  $f(0) - g(0) < 0 < f\left(\frac{\pi}{3}\right) - g\left(\frac{\pi}{3}\right)$ , então, podemos concluir, pelo Teorema de Bolzano, que existe  $c \in \left]0, \frac{\pi}{3}\right[$  tal que  $f(c) - g(c) = 0$ , ou seja, que a equação  $f(x) - g(x) = 0$  e também a equação  $f(x) = g(x)$  têm, pelo menos, uma solução em  $\left]0, \frac{\pi}{3}\right[$

C.A.

$$f(0) - g(0) = 0^2 - \cos 0 = 0 - 1 = -1$$

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right) - g\left(\frac{\pi}{3}\right) = \left(\frac{\pi}{3}\right)^2 - \cos \frac{\pi}{3} \approx 0,6$$

Exame – 2020, 1.ª Fase





23. Para averiguar se a função  $h$  é contínua em  $x = 1$ , temos que verificar se  $h(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} h(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} h(x)$

- $h(1) = 1 + 1 \times e^{1-1} = 1 + e^0 = 1 + 1 = 2$
- $\lim_{x \rightarrow 1^-} h(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (1 + xe^{x-1}) = 1 + 1 \times e^{1-1} = 1 + e^0 = 1 + 1 = 2$
- $\lim_{x \rightarrow 1^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{x} - 1}{\text{sen}(x-1)} = \frac{\sqrt{1} - 1}{\text{sen}(1-1)} = \frac{1-1}{\text{sen } 0} = \frac{0}{0}$  (Indeterminação)

(fazendo  $y = x - 1$ , temos  $x = y + 1$  e se  $x \rightarrow 1^+$ , então  $y \rightarrow 0^+$ )

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^+} h(x) &= \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{y+1} - 1}{\text{sen } y} = \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{y+1} - 1}{\frac{y}{\text{sen } y}} = \frac{\lim_{y \rightarrow 0^+} (\sqrt{y+1} - 1)(\sqrt{y+1} + 1)}{\lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{y(\sqrt{y+1} + 1)}{\text{sen } y}} = \\ &= \frac{\lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{(\sqrt{y+1})^2 - 1^2}{y(\sqrt{y+1} + 1)}}{\lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{\text{sen } y}{y}} = \frac{\lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{y+1-1}{y(\sqrt{y+1} + 1)}}{\lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{\text{sen } y}{y}} = \frac{\lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{y}{y(\sqrt{y+1} + 1)}}{\lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{\text{sen } y}{y}} = \frac{\lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{y+1} + 1}}{\lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{\text{sen } y}{y}} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{0+1} + 1} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Assim, temos que, como  $\lim_{x \rightarrow 1^-} h(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1^+} h(x)$ , a função  $h$  não é contínua em  $x = 1$

Exame - 2020, 1.ª Fase

24. Para averiguar se a função  $g$  é contínua em  $x = 0$ , temos que verificar se  $g(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)$

- $g(0) = 0$
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2 \ln x) = 0 \times (-\infty)$  (Indeterminação)

(fazendo  $y = \frac{1}{x}$ , temos  $x = \frac{1}{y}$  e se  $x \rightarrow 0^+$ , então  $y \rightarrow +\infty$ )

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2 \ln x) &= \lim_{y \rightarrow +\infty} \left( \left( \frac{1}{y} \right)^2 \times \ln \frac{1}{y} \right) = \lim_{y \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{y^2} \times (\ln 1 - \ln y) \right) = \lim_{y \rightarrow +\infty} \left( -\frac{\ln y}{y^2} \right) = \\ &= - \lim_{y \rightarrow +\infty} \left( \frac{\ln y}{y^2} \right) = - \lim_{y \rightarrow +\infty} \left( \frac{\ln y}{y} \times \frac{1}{y} \right) = - \underbrace{\lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{\ln y}{y}}_{\text{Lim. Notável}} \times \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{1}{y} = -0 \times \frac{1}{+\infty} = 0 \times 0^+ = 0 \end{aligned}$$

- $\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left( 1 + \frac{\text{sen } x}{1 - e^x} \right) = 1 + \frac{\text{sen } 0}{1 - e^0} = 1 + \frac{0}{0}$  (Indeterminação)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \left( 1 + \frac{\text{sen } x}{1 - e^x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^-} 1 + \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\text{sen } x}{1 - e^x} = 1 + \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\text{sen } x}{-(-1 + e^x)} = \\ &= 1 + \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\text{sen } x}{-\frac{e^x - 1}{x}} = 1 + \frac{\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\text{sen } x}{x}}{\lim_{x \rightarrow 0^-} \left( -\frac{e^x - 1}{x} \right)} = 1 + \frac{\underbrace{\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\text{sen } x}{x}}_{\text{Lim. Notável}}}{-\underbrace{\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^x - 1}{x}}_{\text{Lim. Notável}}} = 1 + \frac{1}{-1} = 1 - 1 = 0 \end{aligned}$$

Como  $g(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} g(x)$ , a função  $g$  é contínua em  $x = 0$

Exame - 2020, 1.ª Fase



25.

25.1. Como  $\sin(\pi - x) = \sin x$  e  $\cos(\pi - x) = -\cos x$ , calculando o valor do limite, temos:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(\pi - x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin(\pi - x)}{2 + \cos(\pi - x)}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin x}{2 - \cos x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x(2 - \cos x)} = \frac{\sin 0^+}{0(2 - \cos 0)} = \frac{0}{0} \text{ (Indet.)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x(2 - \cos x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\sin x}{x} \times \frac{1}{2 - \cos x} \right) = \underbrace{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}}_{\text{Lim. Notável}} \times \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2 - \cos x} = \\ &= 1 \times \frac{1}{2 - \cos 0} = 1 \times \frac{1}{2 - 1} = 1 \times \frac{1}{1} = 1 \end{aligned}$$



25.2. Começamos por determinar a expressão da derivada da função  $f$ , no intervalo  $]0, \pi[$ :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left( \frac{\operatorname{sen} x}{2 + \cos x} \right)' = \frac{(\operatorname{sen} x)'(2 + \cos x) - \operatorname{sen} x(2 + \cos x)'}{(2 + \cos x)^2} = \\ &= \frac{\cos x(2 + \cos x) - \operatorname{sen} x((2)'+(\cos x)')}{(2 + \cos x)^2} = \frac{2 \cos x + \cos^2 x - \operatorname{sen} x(0 - \operatorname{sen} x)}{(2 + \cos x)^2} = \\ &= \frac{2 \cos x + \cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x}{(2 + \cos x)^2} = \frac{2 \cos x + 1}{(2 + \cos x)^2} \end{aligned}$$

Calculando os zeros da derivada, no domínio da função ( $]0, \pi[$ ), vem:

$$\begin{aligned} f'(x) = 0 &\Leftrightarrow \frac{2 \cos x + 1}{(2 + \cos x)^2} = 0 \Leftrightarrow 2 \cos x + 1 = 0 \wedge \underbrace{(2 + \cos x)^2 \neq 0}_{\text{condição universal}} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 2 \cos x = -1 \Leftrightarrow \cos x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos x = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow \cos x = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) \Leftrightarrow \\ &x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \vee x = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Como se pretende identificar os valores de  $x \in ]0, \pi[$ , atribuindo valores inteiros a  $k$  para identificar as soluções no intervalo definido, temos:

- $k = 0 \rightarrow x = \frac{2\pi}{3} \vee x = -\frac{2\pi}{3} \quad \left(-\frac{2\pi}{3} \notin ]0, \pi[ \right)$
- $k = 1 \rightarrow x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi \vee x = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi = -\frac{2\pi}{3} + \frac{6\pi}{3} = \frac{4\pi}{3} \quad \left(\frac{2\pi}{3} + 2\pi \notin ]0, \pi[ \text{ e } \frac{4\pi}{3} \notin ]0, \pi[ \right)$

Assim, temos que  $f'(x)$  tem um zero em  $]0, \pi[$  e estudando a variação do sinal da derivada e relacionando com a monotonia da função, vem:

$x$	0		$\frac{2\pi}{3}$		$\pi$
$2 \cos x + 1$	n.d.	+	0	-	n.d.
$(2 + \cos x)^2$	n.d.	+	+	+	n.d.
$f'$	n.d.	+	0	-	n.d.
$f$	n.d.	$\nearrow$	Máx	$\searrow$	n.d.

Cálculos auxiliares:

$$\begin{aligned} f'\left(\frac{\pi}{2}\right) &= \frac{2 \cos \frac{\pi}{2} + 1}{(2 + \cos \frac{\pi}{2})^2} = \frac{2 \times 0 + 1}{(2 + 0)^2} = \\ &= \frac{1}{4} > 0 \\ f'\left(\frac{5\pi}{6}\right) &= \frac{2 \cos \frac{5\pi}{6} + 1}{(2 + \cos \frac{5\pi}{6})^2} = \\ &= \frac{2 \times \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 1}{(2 + \frac{\sqrt{3}}{2})^2} = \frac{-\sqrt{3} + 1}{\left(\frac{4 + \sqrt{3}}{2}\right)^2} < 0 \end{aligned}$$

Assim, podemos concluir que a função  $f$ , no intervalo  $]0, \pi[$ :

- é crescente no intervalo  $]0, \frac{2\pi}{3}];$
- é decrescente no intervalo  $[\frac{2\pi}{3}, \pi[;$
- tem um máximo relativo para  $x = \frac{2\pi}{3}$ , cujo valor é:

$$f\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{\operatorname{sen} \frac{2\pi}{3}}{2 + \cos \frac{2\pi}{3}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{2 - \frac{1}{2}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{3}{2}} = \frac{2\sqrt{3}}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$



26.

26.1. Para estudar o sentido das concavidades do gráfico e a existência de pontos de inflexão, vamos determinar a expressão da segunda derivada, pelo que começamos por determinar  $g'$ :

$$\begin{aligned} g'(x) &= \left( \frac{1}{4} \cos(2x) - \cos x \right)' = \left( \frac{1}{4} \cos(2x) \right)' - (\cos x)' = \frac{1}{4} (\cos(2x))' - (-\sin x) = \\ &= \frac{1}{4} (-(2x)'\sin(2x)) + \sin x = \frac{1}{4} \times (-2) \times \sin(2x) + \sin x = -\frac{1}{2} \sin(2x) + \sin x \end{aligned}$$

Assim, determinando  $g''$ , temos que:



$$\begin{aligned} g''(x) &= (g'(x))' = \left( -\frac{1}{2} \sin(2x) + \sin x \right)' = \left( -\frac{1}{2} \sin(2x) \right)' + (\sin x)' = -\frac{1}{2} (\sin(2x))' + \cos x = \\ &= -\frac{1}{2} ((2x)'\cos(2x)) + \cos x = -\frac{1}{2} \times 2 \times \cos(2x) + \cos x = -\cos(2x) + \cos x \end{aligned}$$

Como os pontos de inflexão são zeros da segunda derivada, vamos determiná-los:

$$\begin{aligned} g''(x) = 0 &\Leftrightarrow -\cos(2x) + \cos x = 0 \Leftrightarrow \cos x = \cos(2x) \Leftrightarrow x = 2x + 2k\pi \vee x = -2x + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x - 2x = 2k\pi \vee x + 2x = 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow -x = 2k\pi \vee 3x = 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x = -2k\pi \vee x = \frac{2k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Para  $k = 1$ , vem  $x = -2\pi \vee x = \frac{2\pi}{3}$ , e como  $x \in ]0, \pi[$ , podemos verificar que a única solução da equação é  $x = \frac{2\pi}{3}$

Assim, estudando o sinal da segunda derivada para relacionar com o sentido das concavidades, vem:

$x$	0		$\frac{2\pi}{3}$		$\pi$
$g''(x)$	n.d.	+	0	-	n.d.
$g(x)$	n.d.		Pt. I.		n.d.

Cálculos auxiliares:

$$\begin{aligned} g''\left(\frac{\pi}{2}\right) &= -\cos\left(2 \times \frac{\pi}{2}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = \\ &= -\cos \pi + 0 = -(-1) + 0 = 1 > 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g''\left(\frac{3\pi}{4}\right) &= -\cos\left(2 \times \frac{3\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \\ &= -\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) - \frac{\sqrt{2}}{2} = -0 - \frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{\sqrt{2}}{2} < 0 \end{aligned}$$

Logo, podemos concluir que o gráfico de  $g$ :

- tem a concavidade voltada para baixo no intervalo  $[\frac{2\pi}{3}, \pi[$
- tem a concavidade voltada para cima no intervalo  $]0, \frac{2\pi}{3}]$
- tem um ponto de inflexão de abcissa  $\frac{2\pi}{3}$  e cuja ordenada é:

$$\begin{aligned} g\left(\frac{2\pi}{3}\right) &= \frac{1}{4} \cos\left(2 \times \frac{2\pi}{3}\right) - \cos \frac{2\pi}{3} = \frac{1}{4} \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) - \left(-\cos \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{4} \left(-\cos \frac{\pi}{3}\right) + \frac{1}{2} = \\ &= \frac{1}{4} \left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} = -\frac{1}{8} + \frac{1}{2} = -\frac{1}{8} + \frac{4}{8} = \frac{3}{8} \end{aligned}$$

Ou seja, o ponto de inflexão do gráfico da função tem coordenadas  $\left(\frac{2\pi}{3}, \frac{3}{8}\right)$



26.2. Simplificando a expressão da função  $f$ , como  $\cos(-\alpha) = \cos \alpha$ ,  $\cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha$  e  $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha$ , temos:

$$\begin{aligned} f(x) &= g(-x) + g\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{1}{4} \cos(2(-x)) - \cos(-x) + \frac{1}{4} \cos\left(2\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right) - \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \\ &= \frac{1}{4} \cos(-2x) - \cos(-x) + \frac{1}{4} \cos(\pi - 2x) - \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{1}{4} \cos(2x) - \cos x + \frac{1}{4} (-\cos(2x)) - \sin x = \\ &= \frac{1}{4} \cos(2x) - \cos x - \frac{1}{4} \cos(2x) - \sin x = -\cos x - \sin x = -\sin x - \cos x \end{aligned}$$

Resposta: **Opção B**

Exame – 2019, 2.ª Fase

27. Para mostrar que a função  $f$  é contínua em  $x = 0$ , temos que verificar que  $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ :

- $f(0) = 0$
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{x}{x - \ln x}\right) = \frac{0^+}{0^+ - \ln 0^+} = \frac{0^+}{0^+ - (-\infty)} = \frac{0^+}{+\infty} = 0$
- $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{1 - \cos x}{x}\right) = \frac{1 - \cos(0^-)}{0^-} = \frac{0}{0^-}$  (Indeterminação)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1 - \cos x}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{1 - \cos x}{x} \times \frac{1 + \cos x}{1 + \cos x}\right) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1^2 - \cos^2 x}{x(1 + \cos x)} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin^2 x}{x(1 + \cos x)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{\sin x \times \sin x}{x \times (1 + \cos x)}\right) = \underbrace{\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin x}{x}}_{\text{Lim. Notável}} \times \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin x}{1 + \cos x} = 1 \times \frac{\sin 0^+}{1 + \cos 0^+} = 1 \times \frac{0}{1 + 1} = 1 \times 0 = 0 \end{aligned}$$

Assim, temos que, como  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0)$ , a função  $f$  é contínua em  $x = 0$

Exame – 2019, 1.ª Fase

28. Para mostrar que a função  $h$  é contínua em  $x = 0$ , temos que verificar que  $h(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} h(x)$ :

- $h(0) = \frac{e^0}{0+1} = \frac{1}{1} = 1$
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{e^x}{x+1}\right) = \frac{e^0}{0+1} = \frac{1}{1} = 1$
- $\lim_{x \rightarrow 0^-} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{\sin^2 x}{\sin(x^2)}\right) = \frac{\sin^2(0)}{\sin(0^2)} = \frac{0}{0}$  (Indeterminação)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{\sin^2 x}{\sin(x^2)}\right) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{\sin x \times \sin x}{\sin(x^2)} \times \frac{x^2}{x^2}\right) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{\sin x}{x} \times \frac{\sin x}{x} \times \frac{x^2}{\sin(x^2)}\right) = \\ &= \underbrace{\lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{\sin x}{x}\right)}_{\text{Lim. Notável}} \times \underbrace{\lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{\sin x}{x}\right)}_{\text{Lim. Notável}} \times \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{x^2}{\sin(x^2)}\right) = 1 \times 1 \times \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{x^2}{\sin(x^2)}\right) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{x^2}{\sin(x^2)}\right) = \end{aligned}$$

(fazendo  $y = x^2$ , temos que se  $x \rightarrow 0^-$ , então  $y \rightarrow 0^+$ )

$$= \lim_{y \rightarrow 0^+} \left(\frac{y}{\sin y}\right) = \lim_{y \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{\frac{\sin y}{y}}\right) = \frac{\lim_{y \rightarrow 0^+} 1}{\underbrace{\lim_{y \rightarrow 0^+} \left(\frac{\sin y}{y}\right)}_{\text{Lim. Notável}}} = \frac{1}{1} = 1$$

Assim, temos que, como  $\lim_{x \rightarrow 0^-} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = h(0)$ , a função  $h$  é contínua em  $x = 0$

Exame – 2018, Ép. especial



29. Como o declive da reta tangente ao gráfico de  $g$  em cada ponto é dado pela função derivada, começamos por determinar a expressão de  $g'$ :

$$\begin{aligned} g'(x) &= (2 \operatorname{sen} x + \operatorname{sen}^2 x)' = (2 \operatorname{sen} x)' + (\operatorname{sen}^2 x)' = 2 \cos x + (\operatorname{sen} x \times \operatorname{sen} x)' = \\ &= 2 \cos x + (\operatorname{sen} x)' \times \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} x \times (\operatorname{sen} x)' = 2 \cos x + \cos x \times \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} x \times \cos x = \\ &= 2 \cos x + 2 \times \operatorname{sen} x \times \cos x = 2 \cos x + \operatorname{sen}(2x) \end{aligned}$$

Como o máximo de uma função corresponde a um zero da função derivada, vamos determinar a expressão da função derivada da função  $g'$ , ou seja  $g''$ , para determinar o declive máximo:

$$\begin{aligned} g''(x) &= (g'(x))' = (2 \cos x + \operatorname{sen}(2x))' = (2 \cos x)' + (\operatorname{sen}(2x))' = 2 \times (-\operatorname{sen} x) + (2x)' \times \cos(2x) = \\ &= -2 \operatorname{sen} x + 2 \cos(2x) \end{aligned}$$

Calculando os zeros da derivada, no domínio da função  $([0, \pi])$ , vem:

$$\begin{aligned} -2 \operatorname{sen} x + 2 \cos(2x) = 0 &\Leftrightarrow 2 \cos(2x) = 2 \operatorname{sen} x \Leftrightarrow \cos(2x) = \operatorname{sen} x \Leftrightarrow \operatorname{sen} x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \\ &\Leftrightarrow \cos(2x) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} - x + 2k\pi \vee 2x = -\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 2x + x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \vee 2x = -\frac{\pi}{2} + x + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow 3x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \vee 2x - x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3} \vee x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Como se pretende identificar os valores de  $x \in [0, \pi]$ , atribuindo valores inteiros a  $k$  para identificar as soluções no intervalo definido, temos:

- $k = 0 \rightarrow x = \frac{\pi}{6} \vee x = -\frac{\pi}{2}$   $\left(-\frac{\pi}{2} \notin [0, \pi]\right)$
- $k = 1 \rightarrow x = \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{6} + \frac{4\pi}{6} = \frac{5\pi}{6} \vee x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi = -\frac{\pi}{2} + \frac{4\pi}{2} = \frac{3\pi}{2}$   $\left(\frac{3\pi}{2} \notin [0, \pi]\right)$
- $k = 2 \rightarrow x = \frac{\pi}{6} + \frac{4\pi}{3} = \frac{\pi}{6} + \frac{8\pi}{6} = \frac{9\pi}{6} = \frac{3\pi}{2} \vee x = -\frac{\pi}{2} + 4\pi$   $\left(\frac{3\pi}{2} \notin [0, \pi] \text{ e } 4\pi - \frac{\pi}{2} \notin [0, \pi]\right)$

Assim, as soluções da equação  $g''(x) = 0$ , que pertencem ao domínio da função, são  $\frac{\pi}{6}$  e  $\frac{5\pi}{6}$ , pelo que Estudando a variação do sinal da derivada de  $g'$ , e relacionando com a monotonia do declive, vem:

$x$	0		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{5\pi}{6}$		$\pi$
$g''$	+	+	0	-	0	+	+
$g'$	min	$\nearrow$	Máx	$\searrow$	min	$\nearrow$	Máx

Assim temos que os valores máximos do declive são:

- $g'\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2 \cos \frac{\pi}{6} + \operatorname{sen}\left(2 \times \frac{\pi}{6}\right) = 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{2\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$
- $g'(\pi) = 2 \cos \pi + \operatorname{sen}(2\pi) = 2 \times (-1) + 0 = -2$

Como  $g'\left(\frac{\pi}{6}\right) > g'(\pi)$  então  $g'\left(\frac{\pi}{6}\right)$  é o máximo absoluto e o valor máximo do declive das retas tangentes ao gráfico de  $g$ , ou seja, o declive da reta  $r$  é:

$$m_r = g'\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$



30.

30.1. Resolvendo a equação  $g(x) = 0$  vem:

- considerando  $x < 0$

$$\begin{aligned} g(x) = 0 &\Leftrightarrow \frac{e^{2x} - 1}{4x} = 0 \Leftrightarrow e^{2x} - 1 = 0 \wedge 4x \neq 0 \Leftrightarrow e^{2x} = 1 \wedge x \neq 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 2x = \ln 1 \wedge x \neq 0 \Leftrightarrow 2x = 0 \wedge x \neq 0 \Leftrightarrow \underbrace{x = 0 \wedge x \neq 0}_{\text{Cond. Imp.}} \end{aligned}$$

Ou seja, se  $x < 0$  então  $g(x) = 0$  é uma equação impossível (não tem soluções).

- considerando  $0 \leq x \leq \pi$

$$g(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2 - \sin(2x)} = 0 \Leftrightarrow \underbrace{1 = 0}_{\text{Cond. Imp.}} \wedge 2 - \sin(2x) \neq 0$$

Logo, se  $0 \leq x \leq \pi$  então  $g(x) = 0$  também é uma equação impossível (não tem soluções).

Assim podemos concluir que a função  $g$  não tem zeros.

Resposta: **Opção A**

30.2. Para averiguar se a função  $g$  é contínua em  $x = 0$ , temos que verificar se  $g(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)$ 

- $g(0) = \frac{1}{2 - \sin(2 \times 0)} = \frac{1}{2 - \sin 0} = \frac{1}{2 - 0} = \frac{1}{2}$
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{1}{2 - \sin(2x)} \right) = \frac{1}{2 - \sin(2 \times 0)} = \frac{1}{2 - \sin 0} = \frac{1}{2 - 0} = \frac{1}{2}$
- $\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left( \frac{e^{2x} - 1}{4x} \right) = \frac{e^{2 \times 0} - 1}{4 \times 0} = \frac{e^0 - 1}{0} = \frac{1 - 1}{0} = \frac{0}{0}$  (Indeterminação)

(fazendo  $y = 2x$ , temos que  $4x = 2y$  e se  $x \rightarrow 0^-$ , então  $y \rightarrow 0^-$ )

$$= \lim_{y \rightarrow 0^-} \left( \frac{e^y - 1}{2y} \right) = \lim_{y \rightarrow 0^-} \left( \frac{1}{2} \times \frac{e^y - 1}{y} \right) = \lim_{y \rightarrow 0^-} \frac{1}{2} \times \underbrace{\lim_{y \rightarrow 0^-} \frac{e^y - 1}{y}}_{\text{Lim. Notável}} = \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{2}$$

Como  $g(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} g(x)$ , então a função  $g$  é contínua em  $x = 0$



30.3. Começamos por determinar a expressão da derivada da função  $g$ , no intervalo  $]0, \pi]$ :

$$\begin{aligned} g'(x) &= \left( \frac{1}{2 - \operatorname{sen}(2x)} \right)' = \frac{(1)' \times (2 - \operatorname{sen}(2x)) - 1 \times (2 - \operatorname{sen}(2x))'}{(2 - \operatorname{sen}(2x))^2} = \\ &= \frac{0 \times (2 - \operatorname{sen}(2x)) - ((2)' - (\operatorname{sen}(2x))')}{(2 - \operatorname{sen}(2x))^2} = \frac{0 - (0 - (2x)' \cos(2x))}{(2 - \operatorname{sen}(2x))^2} = \\ &= \frac{-(-2 \cos(2x))}{(2 - \operatorname{sen}(2x))^2} = \frac{2 \cos(2x)}{(2 - \operatorname{sen}(2x))^2} \end{aligned}$$

Calculando os zeros da derivada, para  $x \in ]0, \pi]$ , vem:

$$\begin{aligned} \frac{2 \cos(2x)}{(2 - \operatorname{sen}(2x))^2} = 0 &\Leftrightarrow 2 \cos(2x) = 0 \wedge \underbrace{(2 - \operatorname{sen}(2x))^2 \neq 0}_{\text{Condição universal}} \Leftrightarrow \cos(2x) = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Assim, temos que:

- para  $k = -1$ ,  $x = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4} - \frac{2\pi}{4} = -\frac{\pi}{4}$  ( $-\frac{\pi}{4} \notin ]0, \pi]$ )
- para  $k = 0$ ,  $x = \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{4}$  ( $\frac{\pi}{4} \in ]0, \pi]$ )
- para  $k = 1$ ,  $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$  ( $\frac{3\pi}{4} \in ]0, \pi]$ )
- para  $k = 2$ ,  $x = \frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{2} = \frac{\pi}{4} + \frac{4\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}$  ( $\frac{5\pi}{4} \notin ]0, \pi]$ )

Assim, temos que  $g'(x)$  tem dois zeros em  $]0, \pi]$  e estudando a variação do sinal da derivada e relacionando com a monotonia da função, vem:

$x$	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{3\pi}{4}$		$\pi$
$2 \cos(2x)$	n.d.	+	0	-	0	+	+
$(2 - \operatorname{sen}(2x))^2$	n.d.	+	+	+	+	+	+
$g'$	n.d.	+	0	-	0	+	+
$g$	n.d.	$\longrightarrow$	Máx	$\longrightarrow$	min	$\longrightarrow$	Máx

Assim, podemos concluir que a função  $g$ , no intervalo  $]0, \pi]$ :

- é crescente no intervalo  $]0, \frac{\pi}{4}]$  e no intervalo  $[\frac{3\pi}{4}, \pi]$ ;
- é decrescente no intervalo  $[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}]$ ;
- tem um mínimo relativo para  $x = \frac{3\pi}{4}$ , cujo valor é:

$$g\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{1}{2 - \operatorname{sen}\left(2 \times \frac{3\pi}{4}\right)} = \frac{1}{2 - \operatorname{sen}\frac{6\pi}{4}} = \frac{1}{2 - \operatorname{sen}\frac{3\pi}{2}} = \frac{1}{2 - (-1)} = \frac{1}{3}$$

- tem dois máximos relativos, para  $x = \frac{\pi}{4}$  e para  $x = \pi$ , cujos valores são respetivamente:

$$g\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2 - \operatorname{sen}\left(2 \times \frac{\pi}{4}\right)} = \frac{1}{2 - \operatorname{sen}\frac{2\pi}{4}} = \frac{1}{2 - \operatorname{sen}\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2 - 1} = \frac{1}{1} = 1$$

$$g(\pi) = \frac{1}{2 - \operatorname{sen}(2 \times \pi)} = \frac{1}{2 - \operatorname{sen}(2\pi)} = \frac{1}{2 - 0} = \frac{1}{2}$$





31. Sendo  $D_f = ]0, \pi[$ , e a função  $f$  é contínua (porque é o quociente de funções contínuas), então como  $1 \in D_f$  e  $\frac{\pi}{2} \in D_f$ , logo  $x = 1$  e  $x = \frac{\pi}{2}$  não são assíntotas verticais do gráfico de  $f$

Averiguando se  $x = 0$  e  $x = \pi$  são assíntotas verticais do gráfico de  $f$ , temos:

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{x}{\operatorname{sen} x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\frac{\operatorname{sen} x}{x}} = \frac{\lim_{x \rightarrow 0^+} 1}{\underbrace{\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\operatorname{sen} x}{x}}_{\text{Lim. Notável}}} = \frac{1}{1} = 1$$

Logo, a reta definida pela equação  $x = 0$  não é uma assíntota vertical do gráfico de  $f$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow \pi^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pi^-} \left( \frac{x}{\operatorname{sen} x} \right) = \frac{\pi}{\operatorname{sen} \pi^-} = \frac{\pi}{0^+} = +\infty$$

Logo, a reta definida pela equação  $x = \pi$  é uma assíntota vertical do gráfico de  $f$

Resposta: **Opção B**

Exame – 2018, 1ª Fase

32.

- 32.1. Para averiguar se a função  $f$  é contínua à esquerda no ponto de abscissa 1, temos que verificar se  $f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$  e para averiguar se a função é contínua à direita no mesmo ponto, temos que verificar se  $f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$

$$\bullet f(1) = 2$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x - 2}{\operatorname{sen}(x - 1)} = \frac{2(1^-) - 2}{\operatorname{sen}(1^- - 1)} = \frac{2 - 2}{\operatorname{sen} 0} = \frac{0}{0} \quad (\text{Indeterminação})$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x - 2}{\operatorname{sen}(x - 1)} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2(x - 1)}{\operatorname{sen}(x - 1)} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2}{\frac{\operatorname{sen}(x - 1)}{x - 1}} = \frac{\lim_{x \rightarrow 1^-} 2}{\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\operatorname{sen}(x - 1)}{x - 1}} =$$

(fazendo  $y = x - 1$ , se  $x \rightarrow 1^-$ , então  $y \rightarrow 0^-$ )

$$= \frac{2}{\underbrace{\lim_{y \rightarrow 0^-} \frac{\operatorname{sen} y}{y}}_{\text{Lim. Notável}}} = \frac{2}{1} = 2$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (e^{-2x+4} + \ln(x - 1)) = e^{-2(1^+)+4} + \ln((1^+) - 1) = e^2 + \ln(0^+) = e^2 + (-\infty) = -\infty$$

A afirmação é verdadeira porque como  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1)$ , a função é contínua à esquerda do ponto de abscissa 1, e como  $f(1) \neq \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$  a função não é contínua à direita do mesmo ponto.



32.2. Para calcular o declive da reta tangente, começamos por determinar a expressão da derivada da função, para  $x < 1$ :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left( \frac{2x-2}{\operatorname{sen}(x-1)} \right)' = \frac{(2x-2)'\operatorname{sen}(x-1) - (2x-2)(\operatorname{sen}(x-1))'}{(\operatorname{sen}(x-1))^2} = \\ &= \frac{2\operatorname{sen}(x-1) - (2x-2)(x-1)'\cos(x-1)}{\operatorname{sen}^2(x-1)} = \frac{2\operatorname{sen}(x-1) - (2x-2)\cos(x-1)}{\operatorname{sen}^2(x-1)} \end{aligned}$$

Assim, temos que o declive da reta tangente no ponto de abcissa  $1 - \frac{\pi}{2}$  é:

$$\begin{aligned} m &= f' \left( 1 - \frac{\pi}{2} \right) = \frac{2\operatorname{sen} \left( 1 - \frac{\pi}{2} - 1 \right) - \left( 2 \left( 1 - \frac{\pi}{2} \right) - 2 \right) \cos \left( 1 - \frac{\pi}{2} - 1 \right)}{\operatorname{sen}^2 \left( 1 - \frac{\pi}{2} - 1 \right)} = \\ &= \frac{2\operatorname{sen} \left( -\frac{\pi}{2} \right) - \left( 2 - \frac{2\pi}{2} - 2 \right) \cos \left( -\frac{\pi}{2} \right)}{\operatorname{sen}^2 \left( -\frac{\pi}{2} \right)} = \frac{2(-1) - (-2) \times 0}{(-1)^2} = \frac{-2 - 0}{1} = -2 \end{aligned}$$

Logo a equação da reta tangente é da forma  $y = -2x + b$

Como  $f \left( 1 - \frac{\pi}{2} \right) = \frac{2 \left( 1 - \frac{\pi}{2} \right) - 2}{\operatorname{sen} \left( 1 - \frac{\pi}{2} - 1 \right)} = \frac{2 - \pi - 2}{\operatorname{sen} \left( -\frac{\pi}{2} \right)} = \frac{-\pi}{-1} = \pi$ , sabemos que o ponto  $P \left( 1 - \frac{\pi}{2}, \pi \right)$  pertence ao gráfico da função e também à reta tangente.

Assim, substituindo as coordenadas do ponto de tangência na equação da reta, podemos calcular o valor de  $b$ :

$$\pi = -2 \left( 1 - \frac{\pi}{2} \right) + b \Leftrightarrow \pi = -2 + \pi + b \Leftrightarrow \pi - \pi + 2 = b \Leftrightarrow 2 = b$$

Assim, a equação da reta tangente é:

$$y = -2x + 2$$

Exame – 2017, Ép. especial



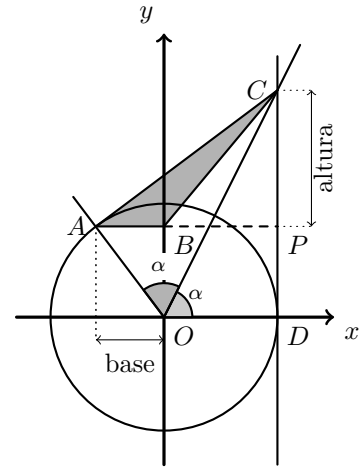
33. Como se trata de um círculo trigonométrico, o ponto  $A$  tem coordenadas  $(\cos(2\alpha), \sin(2\alpha))$ , porque o segmento  $[OA]$ , define com o semieixo positivo  $Ox$  um ângulo de  $\alpha + \alpha = 2\alpha$

Considerando o ponto  $P$  como o ponto da reta  $CD$  com ordenada igual à do ponto  $A$ , temos que:

- a base do triângulo é:  $\overline{AB} = -\cos(2\alpha)$
- a altura do triângulo é:  $\overline{PC} = \overline{CD} - \overline{PD} = \operatorname{tg} \alpha - \sin(2\alpha)$

Assim, calculando a área do triângulo vem:

$$\begin{aligned}
 A_{[ABC]} &= \frac{\overline{AB} \times \overline{PC}}{2} = \frac{-\cos(2\alpha) \times (\operatorname{tg} \alpha - \sin(2\alpha))}{2} = \\
 &= \frac{-\cos(2\alpha) \times \left( \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} - 2 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha \right)}{2} = \\
 &= \frac{-\cos(2\alpha) \times \left( \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} - \frac{2 \operatorname{sen} \alpha \cos^2 \alpha}{\cos \alpha} \right)}{2} = \\
 &= \frac{-\cos(2\alpha) \times \left( \frac{\operatorname{sen} \alpha (1 - 2 \cos^2 \alpha)}{\cos \alpha} \right)}{2} = \frac{-\cos(2\alpha) \times \operatorname{tg} \alpha (1 - 2 \cos^2 \alpha)}{2} = \\
 &= \frac{\cos(2\alpha) \times \operatorname{tg} \alpha (-(1 - 2 \cos^2 \alpha))}{2} = \frac{\cos(2\alpha) \times \operatorname{tg} \alpha (2 \cos^2 \alpha - 1)}{2} = \\
 &= \frac{\cos(2\alpha) \times \operatorname{tg} \alpha (2 \cos^2 \alpha - (\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha))}{2} = \frac{\cos(2\alpha) \times \operatorname{tg} \alpha (\cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha)}{2} = \\
 &= \frac{\cos(2\alpha) \times \operatorname{tg} \alpha (\cos(2\alpha))}{2} = \frac{\operatorname{tg} \alpha \cos^2(2\alpha)}{2}
 \end{aligned}$$



Exame – 2017, Ép. especial

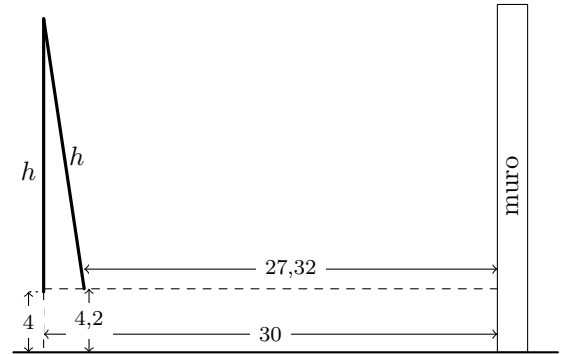


34. No instante inicial as hastes estão na vertical e a distância ao chão é de 4 dm, e, no mesmo instante a distância ao muro é dada por:

$$d(0) = 30 + 0 \times \text{sen } \pi \times 0 = 30 + 0 = 30 \text{ dm}$$

Passados treze segundos e meio a distância ao chão é de 4,2 dm e a distância ao muro é dada por:

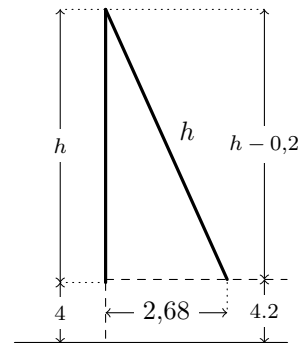
$$\begin{aligned} d(13,5) &= 30 + 12e^{12-13,5} \text{sen}(\pi \times 13,5) = \\ &= 30 + 12e^{-1,5} \text{sen}(\pi \times 13,5) \approx 27,32 \text{ dm} \end{aligned}$$



Assim, podemos considerar um triângulo retângulo, cuja hipotenusa tem o comprimento da haste ( $h$ ), o cateto maior mede  $h + 4 - 4,2 = h - 0,2$  e o cateto menor mede  $d(0) - d(13,5) \approx 30 - 27,32 \approx 2,68$

E assim, recorrendo ao teorema de Pitágoras, um valor aproximado do comprimento da haste é dado por:

$$\begin{aligned} h^2 &= (h - 0,2)^2 + 2,68^2 \Leftrightarrow h^2 = h^2 - 0,4h + 0,2^2 + 2,68^2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 0,4h = 0,2^2 + 2,68^2 \Leftrightarrow h = \frac{0,2^2 + 2,68^2}{0,4} \end{aligned}$$



Como  $\frac{0,2^2 + 2,68^2}{0,4} \approx 18$ , o valor do comprimento da haste, arredondado às unidades, é 18 dm

Exame – 2017, 2.ª Fase

35. Calculando o desenvolvimento do quadrado da soma, temos:

$$\begin{aligned} \left(2x \text{sen } \alpha + \frac{\cos \alpha}{x}\right)^2 &= (2x \text{sen } \alpha)^2 + 2(2x \text{sen } \alpha) \left(\frac{\cos \alpha}{x}\right) + \left(\frac{\cos \alpha}{x}\right)^2 = \\ &= 4x^2 \text{sen}^2 \alpha + \frac{4x \text{sen } \alpha \cos \alpha}{x} + \frac{\cos^2 \alpha}{x^2} = 4x^2 \text{sen}^2 \alpha + 4 \text{sen } \alpha \cos \alpha + \frac{\cos^2 \alpha}{x^2} \end{aligned}$$

Assim, nos três termos do desenvolvimento o termo independente é  $4 \text{sen } \alpha \cos \alpha$ , pelo que, como sabemos que o termo independente é igual a 1, calculando os valores de  $\alpha$  pertencentes ao intervalo  $] \pi, 2\pi[$ , vem:

$$4 \text{sen } \alpha \cos \alpha = 1 \Leftrightarrow 2 \times 2 \text{sen } \alpha \cos \alpha = 1 \Leftrightarrow 2 \times \text{sen}(2\alpha) = 1 \Leftrightarrow \text{sen}(2\alpha) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \text{sen}(2\alpha) = \text{sen} \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\alpha = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee 2\alpha = \pi - \frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{12} + k\pi \vee \alpha = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{12} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Como se pretende identificar os valores de  $\alpha \in ] \pi, 2\pi[$ , atribuindo valores inteiros a  $k$  para identificar as soluções no intervalo definido, temos:

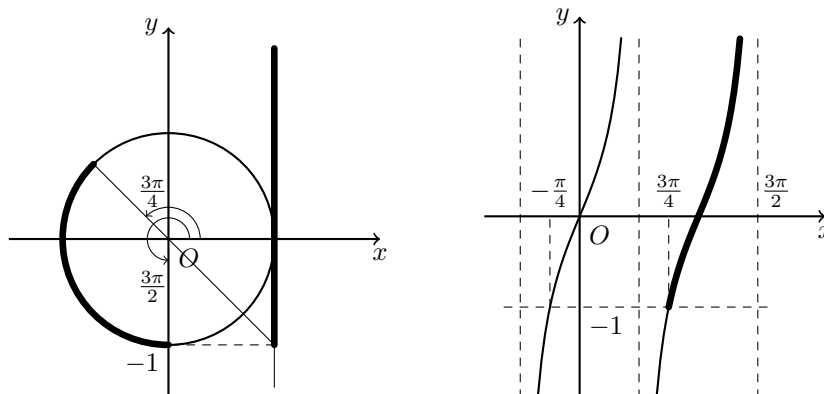
- $k = 0 \rightarrow \alpha = \frac{\pi}{12} \vee \alpha = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{12} = \frac{5\pi}{12}$   $\left(\frac{\pi}{12} \notin ] \pi, 2\pi[ \text{ e } \frac{5\pi}{12} \notin ] \pi, 2\pi[ \right)$
- $k = 1 \rightarrow \alpha = \frac{\pi}{12} + \pi = \frac{13\pi}{12} \vee \alpha = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{12} + \pi = \frac{17\pi}{12}$
- $k = 2 \rightarrow \alpha = \frac{\pi}{12} + 2\pi = \frac{25\pi}{12} \vee \alpha = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{12} + 2\pi = \frac{29\pi}{12}$   $\left(\frac{25\pi}{12} \notin ] \pi, 2\pi[ \text{ e } \frac{29\pi}{12} \notin ] \pi, 2\pi[ \right)$

Assim, os valores de  $\alpha$  nas condições do enunciado são  $\frac{13\pi}{12}$  e  $\frac{17\pi}{12}$

Exame – 2017, 2.ª Fase



36. Identificando no círculo trigonométrico os valores da tangente do intervalo  $[-1, +\infty[$ , e as amplitudes dos arcos correspondentes, (como na figura seguinte, à esquerda) temos, de entre os conjuntos apresentados, o único conjunto de valores cuja tangente pertence ao intervalo é  $\left] \frac{3\pi}{4}, \frac{3\pi}{2} \right[$



Na figura anterior, à direita podemos ver uma representação gráfica da função  $\text{tg}(x)$  com a restrição ao domínio  $\left] \frac{3\pi}{4}, \frac{3\pi}{2} \right[$  assinalada, para verificar que o respetivo contradomínio é  $[-1, +\infty[$

Resposta: **Opção B**

Exame – 2017, 1.<sup>a</sup> Fase



37.

37.1. Para averiguar se a função  $g$  é contínua em  $x = 1$ , temos que verificar se  $g(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} g(x)$

- $g(1) = 2$

- $\lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1 - x^2}{1 - e^{x-1}} = \frac{1 - (1^-)^2}{1 - e^{1-1^-}} = \frac{1 - 1}{1 - e^0} = \frac{0}{0}$  (Indeterminação)

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1 - x^2}{1 - e^{x-1}} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-(x^2 - 1)}{-(e^{x-1} - 1)} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(x-1)(x+1)}{e^{x-1} - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \left( \frac{x-1}{e^{x-1} - 1} \times (x+1) \right) =$$

(fazendo  $y = x - 1$  temos que se  $x \rightarrow 1^-$ , então  $y \rightarrow 0^-$ )

$$= \lim_{y \rightarrow 0^-} \frac{y}{e^y - 1} \times \lim_{x \rightarrow 1^-} (x+1) = \lim_{y \rightarrow 0^-} \frac{1}{\frac{e^y - 1}{y}} \times (1^- + 1) = \frac{1}{\underbrace{\lim_{y \rightarrow 0^-} \left( \frac{e^y - 1}{y} \right)}_{\text{Lim. Notável}}} \times 2 = \frac{1}{1} \times 2 = 2$$

- $\lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left( 3 + \frac{\text{sen}(x-1)}{1-x} \right) = 3 + \frac{\text{sen}(1-1)}{1-1} = 3 - \frac{0}{0}$  (Indeterminação)

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \left( 3 + \frac{\text{sen}(x-1)}{1-x} \right) = \lim_{x \rightarrow 1^+} 3 + \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\text{sen}(x-1)}{-(x-1)} = 3 - \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\text{sen}(x-1)}{x-1} =$$

(fazendo  $y = x - 1$ , temos que se  $x \rightarrow 1^+$ , então  $y \rightarrow 0^+$ )

$$= 3 - \underbrace{\lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{\text{sen } y}{y}}_{\text{Lim. Notável}} = 3 - 1 = 2$$

Como  $g(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} g(x)$ , então a função  $g$  é contínua em  $x = 1$

37.2. Resolvendo a equação  $g(x) = 3$ , no intervalo  $[4,5]$ , ou seja, para  $x > 1$ , vem:

$$3 + \frac{\text{sen}(x-1)}{1-x} = 3 \Leftrightarrow \frac{\text{sen}(x-1)}{1-x} = 3 - 3 \Leftrightarrow \frac{\text{sen}(x-1)}{1-x} = 0 \Leftrightarrow \text{sen}(x-1) = 0 \times (1-x) \Leftrightarrow \text{sen}(x-1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \text{sen}(x-1) = \text{sen } 0 \Leftrightarrow x-1 = 0 + k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = 1 + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Assim, como  $\pi \notin [4,5]$ ;  $1 + \pi \in [4,5]$  e  $1 + 2\pi \notin [4,5]$  a única solução da equação  $g(x) = 3$ , no intervalo  $[4,5]$  é  $1 + \pi$

Exame - 2017, 1.ª Fase



38. Como a função  $f$  é contínua em  $\mathbb{R}$ , em particular é contínua em  $x = -1$ , pelo que:

$$f(-1) = \lim_{x \rightarrow -1} f(x)$$

Assim, temos que:

- $f(-1) = k + 2$
- $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\text{sen}(3x + 3)}{4x + 4} = \frac{\text{sen}(3(-1) + 3)}{4(-1) + 4} = \frac{\text{sen}(0)}{0} = \frac{0}{0}$  (Indeterminação)  
(fazendo  $y = x + 1$ , se  $x \rightarrow -1$ , então  $y \rightarrow 0$ , e  $3y \rightarrow 0$ )

$$\begin{aligned} &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\text{sen}(3(x + 1))}{4(x + 1)} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(3y)}{4y} = \lim_{y \rightarrow 0} \left( \frac{1}{4} \times \frac{\text{sen}(3y)}{y} \right) = \lim_{y \rightarrow 0} \left( \frac{3}{4} \times \frac{\text{sen}(3y)}{3y} \right) = \\ &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{3}{4} \times \underbrace{\lim_{3y \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(3y)}{3y}}_{\text{Lim. Notável}} = \frac{3}{4} \times 1 = \frac{3}{4} \end{aligned}$$

Como a função é contínua em  $x = -1$ , podemos determinar o valor de  $k$ :

$$f(-1) = \lim_{x \rightarrow -1} f(x) \Leftrightarrow k + 2 = \frac{3}{4} \Leftrightarrow k = \frac{3}{4} - 2 \Leftrightarrow k = \frac{3}{4} - \frac{8}{4} \Leftrightarrow k = -\frac{5}{4}$$

Resposta: **Opção B**

Exame – 2016, Ép. especial



39. Para estudar o sentido das concavidades do gráfico e a existência de pontos de inflexão no intervalo  $\left] -\frac{3\pi}{2}, 0 \right[$ , vamos determinar a expressão da segunda derivada, pelo que começamos por determinar  $f'$  em  $\left] -\frac{3\pi}{2}, 0 \right[$ :

$$f'(x) = \left( \frac{1}{4}x^2 + \cos x \right)' = \left( \frac{1}{4}x^2 \right)' + (\cos x)' = \frac{1}{4}(x^2)' + (-\operatorname{sen} x) = \frac{1}{4} \times 2x - \operatorname{sen} x = \frac{1}{2}x - \operatorname{sen} x$$

Assim, determinando  $f''$  em  $\left] -\frac{3\pi}{2}, 0 \right[$ , temos que:



$$f''(x) = (f'(x))' = \left( \frac{1}{2}x - \operatorname{sen} x \right)' = \left( \frac{1}{2}x \right)' - (\operatorname{sen} x)' = \frac{1}{2} - \cos x$$

Como os pontos de inflexão são zeros da segunda derivada, vamos determiná-los:

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} - \cos x = 0 \Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos x = \cos \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \vee x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Para  $k = 0$ , vem  $x = \frac{\pi}{3} \vee x = -\frac{\pi}{3}$ , e como  $x \in \left] -\frac{3\pi}{2}, 0 \right[$ , podemos verificar que a única solução da equação é  $x = -\frac{\pi}{3}$

Assim, estudando o sinal da segunda derivada para relacionar com o sentido das concavidades, vem:

$x$	$-\frac{3\pi}{2}$		$-\frac{\pi}{3}$		0
$f''$	n.d.	+	0	-	n.d.
$f$	n.d.		Pt. I.		n.d.

Logo, podemos concluir que o gráfico de  $f$ :

- tem a concavidade voltada para baixo no intervalo  $\left] -\frac{\pi}{3}, 0 \right[$
- tem a concavidade voltada para cima no intervalo  $\left] -\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{3} \right]$
- tem um ponto de inflexão cuja abcissa é  $-\frac{\pi}{3}$

Exame – 2016, Ép. especial

40. Observando que os ângulos  $AOP$  e  $RQO$  têm a mesma amplitude (porque são ângulos de lados paralelos), relativamente ao triângulo  $[PQR]$ , vem que:

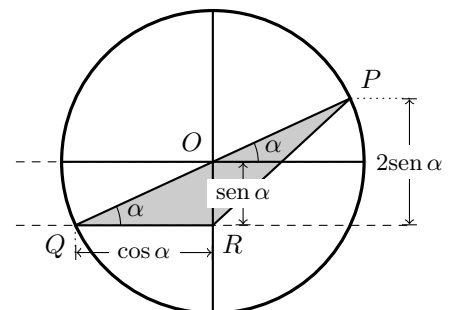
- $\overline{QR} = \cos \alpha$
- $\overline{OR} = \operatorname{sen} \alpha$
- a altura do triângulo, relativa ao lado  $[QR]$  é

$$h = 2 \times \overline{OR} = 2 \operatorname{sen} \alpha$$

Desta forma, a área do triângulo é:

$$A_{[PQR]} = \frac{\overline{QR} \times h}{2} = \frac{\cos \alpha \times 2 \operatorname{sen} \alpha}{2} = \frac{2 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha}{2} = \frac{\operatorname{sen}(2\alpha)}{2}$$

Resposta: **Opção D**



Exame – 2016, 2.ª Fase





41. Começamos por determinar a expressão da derivada da função  $f$ , para  $x \in ]-\frac{\pi}{2}, 0[$ :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left( \frac{2 + \operatorname{sen} x}{\cos x} \right)' = \frac{(2 + \operatorname{sen} x)' \cos x - (2 + \operatorname{sen} x)(\cos x)'}{(\cos x)^2} = \\ &= \frac{(0 + \cos x) \cos x - (2 + \operatorname{sen} x)(-\operatorname{sen} x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + 2 \operatorname{sen} x + \operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} = \\ &= \frac{\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x + 2 \operatorname{sen} x}{\cos^2 x} = \frac{1 + 2 \operatorname{sen} x}{\cos^2 x} \end{aligned}$$

Calculando os zeros da derivada, para  $x \in ]-\frac{\pi}{2}, 0[$ , vem:

$$\frac{1 + 2 \operatorname{sen} x}{\cos^2 x} = 0 \Leftrightarrow 1 + 2 \operatorname{sen} x = 0 \wedge \underbrace{\cos^2 x \neq 0}_{(1)} \Leftrightarrow 2 \operatorname{sen} x = -1 \Leftrightarrow \operatorname{sen} x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{sen} x = \operatorname{sen} \left( -\frac{\pi}{6} \right) \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee x = \pi - \left( -\frac{\pi}{6} \right) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Para  $k = 0$ , vem  $x = -\frac{\pi}{6} \vee x = \pi + \frac{\pi}{6}$ , e como  $x \in ]-\frac{\pi}{2}, 0[$  podemos verificar que a única solução da equação é  $x = -\frac{\pi}{6}$

(1) Como  $\cos x > 0, \forall x \in ]-\frac{\pi}{2}, 0[$ , então  $\cos^2 x \neq 0, \forall x \in ]-\frac{\pi}{2}, 0[$

Estudando a variação do sinal da derivada e relacionando com a monotonia da função, vem:

$x$	$-\frac{\pi}{2}$		$-\frac{\pi}{6}$		0
$1 + 2 \operatorname{sen} x$		-	0	+	
$\cos^2 x$		+	+	+	
$f'$	n.d.	-	0	+	n.d.
$f$	n.d.	$\searrow$	min	$\nearrow$	n.d.

Assim, podemos concluir que a função  $f$ :

- é decrescente no intervalo  $]-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{6}[$ ;
- é crescente no intervalo  $[-\frac{\pi}{6}, 0[$ ;
- tem um mínimo relativo para  $x = -\frac{\pi}{6}$

Exame – 2016, 2.ª Fase

42. Identificando as medidas relevantes para o cálculo da área do trapézio, temos que:

- a base menor é a ordenada o ponto  $P$ , ou seja,  $\overline{OP} = 1$
- como  $R$  é um ponto do quarto quadrante, então temos que  $\cos \alpha > 0$ , pelo que a altura do trapézio  $[OPQR]$  é:  $\overline{PQ} = \cos \alpha$
- como  $R$  é um ponto do quarto quadrante, então temos que  $\operatorname{sen} \alpha < 0$ , pelo que a base maior do trapézio  $[OPQR]$  é:  $\overline{QR} = 1 + (-\operatorname{sen} \alpha) = 1 - \operatorname{sen} \alpha$

Desta forma, a área do trapézio é:

$$\begin{aligned} A_{[OPQR]} &= \frac{\overline{OP} + \overline{QR}}{2} \times \overline{PQ} = \frac{1 + 1 - \operatorname{sen} \alpha}{2} \times \cos \alpha = \frac{2 - \operatorname{sen} \alpha}{2} \times \cos \alpha = \\ &= \frac{2 \cos \alpha - \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha}{2} = \cos \alpha - \frac{\operatorname{sen} \alpha \cos \alpha}{2} \end{aligned}$$

Resposta: **Opção D**

Exame – 2016, 1.ª Fase



43. Começamos por determinar a expressão da derivada da função  $h$ , para calcular os extremos da função:

$$\begin{aligned} h'(t) &= \left(20 + \frac{1}{2\pi} \cos(2\pi t) + t \operatorname{sen}(2\pi t)\right)' = (20)' + \left(\frac{1}{2\pi} \cos(2\pi t)\right)' + (t \operatorname{sen}(2\pi t))' = \\ &= 0 + \frac{1}{2\pi} (\cos(2\pi t))' + (t)' \operatorname{sen}(2\pi t) + t (\operatorname{sen}(2\pi t))' = \\ &= \frac{1}{2\pi} (-(2\pi t)') \operatorname{sen}(2\pi t) + 1 \times \operatorname{sen}(2\pi t) + t(2\pi t)' \cos(2\pi t) = \\ &= \frac{1}{2\pi} (-2\pi) \operatorname{sen}(2\pi t) + \operatorname{sen}(2\pi t) + t(2\pi) \cos(2\pi t) = \\ &= -\operatorname{sen}(2\pi t) + \operatorname{sen}(2\pi t) + t(2\pi) \cos(2\pi t) = \\ &= 2\pi t \cos(2\pi t) \end{aligned}$$

Calculando os zeros da derivada, no domínio da função  $([0,1])$ , vem:

$$\begin{aligned} 2\pi t \cos(2\pi t) = 0 &\Leftrightarrow 2\pi t = 0 \vee \cos(2\pi t) = 0 \Leftrightarrow t = 0 \vee \cos(2\pi t) = \cos \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow t = 0 \vee 2\pi t = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow t = 0 \vee t = \frac{\pi}{2 \times 2\pi} + \frac{k\pi}{2\pi}, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow t = 0 \vee t = \frac{1}{4} + \frac{k}{2}, k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Atribuindo valores a  $k$ , calculamos os valores de  $t$  compatíveis com o domínio da função:

- Se  $k = 0$ , então  $t = \frac{1}{4}$
- Se  $k = 1$ , então  $t = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{1}{4} + \frac{2}{4} = \frac{3}{4}$

Pelo que o conjunto dos zeros da função é  $\left\{0, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right\}$ , e assim estudando a variação do sinal da derivada e relacionando com a monotonia da função, vem:

$t$	0		$\frac{1}{4}$		$\frac{3}{4}$		1
$h'$	0	+	0	-	0	+	+
$h$	min	$\longrightarrow$	Máx	$\longleftarrow$	min	$\longrightarrow$	Máx

Assim, calculando o valor dos mínimos relativos e máximos relativos, temos que:

- $h(0) = 20 + \frac{1}{2\pi} \cos(2\pi \times 0) + 0 \times \operatorname{sen}(2\pi \times 0) = 20 + \frac{1}{2\pi} \cos(0) + 0 = 20 + \frac{1}{2\pi}$
- $h\left(\frac{1}{4}\right) = 20 + \frac{1}{2\pi} \cos\left(2\pi \times \left(\frac{1}{4}\right)\right) + \frac{1}{4} \times \operatorname{sen}\left(2\pi \times \left(\frac{1}{4}\right)\right) =$   
 $= 20 + \frac{1}{2\pi} \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{4} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 20 + \frac{1}{2\pi} \times 0 + \frac{1}{4} \times 1 = 20 + \frac{1}{4}$
- $h\left(\frac{3}{4}\right) = 20 + \frac{1}{2\pi} \cos\left(2\pi \times \left(\frac{3}{4}\right)\right) + \frac{3}{4} \times \operatorname{sen}\left(2\pi \times \left(\frac{3}{4}\right)\right) =$   
 $= 20 + \frac{1}{2\pi} \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) + \frac{3}{4} \operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 20 + \frac{1}{2\pi} \times 0 + \frac{3}{4} \times (-1) = 20 - \frac{3}{4}$
- $h(1) = 20 + \frac{1}{2\pi} \cos(2\pi \times 1) + 1 \times \operatorname{sen}(2\pi \times 1) = 20 + \frac{1}{2\pi} \times 1 + 0 = 20 + \frac{1}{2\pi}$



Como  $h\left(\frac{3}{4}\right) < h(0)$ , temos que o mínimo absoluto é  $m = h\left(\frac{3}{4}\right) = 20 - \frac{3}{4} = \frac{77}{4}$

Como  $h\left(\frac{1}{4}\right) > h(1)$ , temos que o máximo absoluto é  $M = h\left(\frac{1}{4}\right) = 20 + \frac{1}{4} = \frac{81}{4}$

E assim, o valor da amplitude de oscilação é:

$$A = M - m = \frac{81}{4} - \frac{77}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

Exame – 2016, 1.ª Fase

44. como a reta  $r$  é tangente ao gráfico da função  $f$  no ponto de abscissa  $\frac{2\pi}{3}$ , o declive da reta  $r$  é o valor da função derivada no ponto de abscissa  $\frac{2\pi}{3}$   $\left(m_r = f'\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)$

Assim, temos

$$f'(x) = (a \operatorname{sen} x)' = (a)'(\operatorname{sen} x) + a(\operatorname{sen} x)' = 0 + a \cos x = a \cos x$$

pelo que

$$m_r = f'\left(\frac{2\pi}{3}\right) = a \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = a \left(-\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) = a \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{a}{2}$$

Como o declive de uma reta é a tangente da inclinação, temos também que

$$m_r = \operatorname{tg} \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

E assim, igualando as duas expressões para o declive da reta  $r$ , podemos calcular o valor de  $a$ :

$$-\frac{a}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow a = -\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

Exame – 2015, Ép. especial

45. Determinando a expressão da primeira derivada,  $f'$ , vem:

$$\begin{aligned} f'(x) &= (f(x))' = (3 \operatorname{sen}^2(x))' = (3 \operatorname{sen}(x) \operatorname{sen}(x))' = 3(\operatorname{sen}(x) \operatorname{sen}(x))' = \\ &= 3\left((\operatorname{sen}(x))' \operatorname{sen}(x) + \operatorname{sen}(x)(\operatorname{sen}(x))'\right) = 3 \times 2(\operatorname{sen}(x))' \operatorname{sen}(x) = 3 \times 2(\cos(x) \operatorname{sen}(x)) = \\ &= 3 \times 2 \underbrace{\operatorname{sen}(x) \cos(x)}_{\operatorname{sen}(2x)} = 3 \operatorname{sen}(2x) \end{aligned}$$

Determinando a expressão da segunda derivada,  $f''$ , temos que:

$$f''(x) = (f'(x))' = (3 \operatorname{sen}(2x))' = 3((2x)'\cos(2x)) = 3(2 \cos(2x)) = 6 \cos(2x)$$

Resposta: **Opção C**

Exame – 2015, 2.ª Fase



46.

- 46.1. Como no instante em que se iniciou a contagem do tempo, o ponto  $P$  coincidia com o ponto  $A$ , a distância inicial ( $t = 0$ ), em metros, do ponto  $A$  ao ponto  $O$  é dada por  $d(0)$

Assim, os instantes em que o ponto  $P$  passou pelo ponto  $A$ , nos primeiros três segundos do movimento, são as soluções da equação  $d(t) = d(0)$ , com  $t \in ]0,3]$

$$\begin{aligned} d(t) = d(0) &\Leftrightarrow 1 + \frac{1}{2} \operatorname{sen} \left( \pi t + \frac{\pi}{6} \right) = 1 + \frac{1}{2} \operatorname{sen} \left( \pi \times 0 + \frac{\pi}{6} \right) \Leftrightarrow \frac{1}{2} \operatorname{sen} \left( \pi t + \frac{\pi}{6} \right) = \frac{1}{2} \operatorname{sen} \left( \frac{\pi}{6} \right) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \operatorname{sen} \left( \pi t + \frac{\pi}{6} \right) = \operatorname{sen} \left( \frac{\pi}{6} \right) \Leftrightarrow \pi t + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee \pi t + \frac{\pi}{6} = \pi - \frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \pi t = 2k\pi \vee \pi t = \pi - 2 \times \frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow t = 2k \vee \pi t = \pi - \frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow t = 2k \vee \pi t = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow t = 2k \vee t = \frac{2}{3} + 2k, k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Como  $t \in ]0,3]$ , atribuindo valores inteiros a  $k$  para identificar as soluções no intervalo definido, temos

- $k = 0 \rightarrow t = 0 \vee t = \frac{2}{3}$  ( $0 \notin ]0,3]$ )
- $k = 1 \rightarrow t = 2 \vee t = \frac{2}{3} + 2 \Leftrightarrow t = 2 \vee t = \frac{8}{3}$
- $k = 2 \rightarrow t = 4 \vee t = \frac{2}{3} + 4 \Leftrightarrow t = 4 \vee t = \frac{14}{3}$  ( $4 \notin ]0,3]$   $\wedge$   $\frac{14}{3} \notin ]0,3]$ )

Assim temos, durante os primeiros três segundos do movimento, o ponto  $P$  passou pelo ponto  $A$  por três vezes, nos instantes  $t_1 = \frac{2}{3}$  s,  $t_2 = 2$  s e  $t_3 = \frac{8}{3}$  s.

46.2.

Como a função  $d$  resulta de operações sucessivas de funções contínuas em  $[0, +\infty[$ , é uma função contínua, e, por isso, também é contínua em  $[3, 4]$ .

Como  $0,75 < 1,1 < 1,25$ , ou seja,  $d(3) < 1,1 < d(4)$ , então, podemos concluir, pelo Teorema de Bolzano, que existe  $t_0 \in ]3, 4[$  tal que  $d(t_0) = 1,1$ , ou seja, que houve, pelo menos, um instante, entre os três segundos e os quatro segundos após o início da contagem do tempo, em que a distância do ponto  $P$  ao ponto  $O$  foi igual a 1,1 metros.

C.A.

$$\begin{aligned} d(3) &= 1 + \frac{1}{2} \operatorname{sen} \left( 3\pi + \frac{\pi}{6} \right) = 1 + \frac{1}{2} \operatorname{sen} \left( \pi + \frac{\pi}{6} \right) = \\ &= 1 + \frac{1}{2} \times \left( -\operatorname{sen} \left( \frac{\pi}{6} \right) \right) = 1 + \frac{1}{2} \times \left( -\frac{1}{2} \right) = \\ &= 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} = 0,75 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d(4) &= 1 + \frac{1}{2} \operatorname{sen} \left( 4\pi + \frac{\pi}{6} \right) = 1 + \frac{1}{2} \operatorname{sen} \left( \frac{\pi}{6} \right) = \\ &= 1 + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4} = 1,25 \end{aligned}$$

Exame – 2015, 2.ª Fase

47. Como na figura está representado o círculo trigonométrico, temos que:

$$\overline{OC} = 1\alpha, \overline{AB} = \operatorname{sen} \alpha, \overline{OB} = \cos \alpha \text{ e } \operatorname{tg} \alpha = \overline{CD}$$

Temos que a área do quadrilátero  $[ABCD]$  pode ser obtida pela diferença das áreas dos triângulos  $[OCD]$  e  $[OAB]$ ,

$$A_{[ABCD]} = A_{[OAB]} - A_{[OCD]} = \frac{\overline{OC} \times \overline{CD}}{2} - \frac{\overline{OB} \times \overline{AB}}{2}$$

Assim, vem que:

$$A_{[ABCD]} = \frac{1 \times \operatorname{tg} \alpha}{2} - \frac{\cos \alpha \times \operatorname{sen} \alpha}{2} = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{2} - \frac{\overbrace{2 \times \operatorname{sen} \alpha \times \cos \alpha}^{\operatorname{sen}(2\alpha)}}{2 \times 2} = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{2} - \frac{\operatorname{sen}(2\alpha)}{4}$$

Resposta: **Opção B**

Exame – 2015, 1.ª Fase



48. Temos que:

- como a reta  $r$  é tangente ao gráfico da função  $f$  no ponto de abscissa  $a$ , o declive da reta  $r$  é o valor da função derivada no ponto de abscissa  $a$  ( $m_r = f'(a)$ )

Assim, temos

$$f'(x) = (1 - \cos(3x))' = (1)' - (\cos(3x))' = 0 - (-(3x)'\sin(3x)) = 3 \sin(3x)$$

pelo que  $m_r = f'(a) = 3 \sin(3a)$

- como a reta  $s$  é tangente ao gráfico da função  $g$  no ponto de abscissa  $a + \frac{\pi}{6}$ , o declive da reta  $s$  é o valor da função derivada no ponto de abscissa  $a + \frac{\pi}{6}$  ( $m_s = g'(a + \frac{\pi}{6})$ ) Assim, temos

$$g'(x) = (\sin(3x))' = ((3x)'\cos(3x)) = 3 \cos(3x)$$

pelo que

$$m_s = g'(a + \frac{\pi}{6}) = 3 \cos(3(a + \frac{\pi}{6})) = 3 \cos(3a + \frac{3\pi}{6}) = 3 \underbrace{\cos(3a + \frac{\pi}{2})}_{-\sin(3a)} = -3 \sin(3a)$$

- como as retas  $r$  e  $s$  são perpendiculares, o declive de uma delas é o simétrico do inverso do declive da outra ( $m_r = -\frac{1}{m_s}$ )

$$m_r = -\frac{1}{m_s} \Leftrightarrow 3 \sin(3a) = -\frac{1}{-3 \sin(3a)} \Leftrightarrow -3 \sin(3a) \times 3 \sin(3a) = -1 \Leftrightarrow -9 \sin^2(3a) = -1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 9 \sin^2(3a) = 1 \Leftrightarrow \sin^2(3a) = \frac{1}{9} \Leftrightarrow \sin(3a) = \pm \sqrt{\frac{1}{9}} \Leftrightarrow \sin(3a) = \pm \frac{1}{3}$$

- como  $a$  é número real pertencente ao intervalo  $]\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}[$ , ou seja  $\frac{\pi}{3} < a < \frac{\pi}{2}$  então

$$3 \times \frac{\pi}{3} < 3a < 3 \times \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \pi < 3a < \frac{3\pi}{2}$$

ou seja,  $3a$  é a amplitude de um ângulo do 3º quadrante, pelo que  $\sin(3a) < 0$ , logo

$$\sin(3a) = -\frac{1}{3}, \text{ q.e.d}$$

Exame – 2015, 1.ª Fase



49. Para que a função seja contínua em  $x = 2$ , temos que garantir que  $f(2) = \lim_{x \rightarrow 2} f(x)$

Temos que

$$\begin{aligned}
 & \bullet f(2) = 2e^{2-2} = 2e^0 = 2 \times 1 = 2 \\
 & \bullet \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (xe^{x-2}) = 2e^{2^- - 2} = 2e^{0^-} = 2 \times 1 = 2 \\
 & \bullet \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \left( \frac{\sin(2-x)}{x^2+x-6} + k \right) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \left( \frac{\sin(2-x)}{x^2+x-6} \right) + \lim_{x \rightarrow 2^+} k = \lim_{x \rightarrow 2^+} \left( \frac{\sin(2-x)}{x^2+x-6} \right) + \lim_{x \rightarrow 2^+} k = \\
 & = \frac{\sin(2-2^+)}{(2^+)^2 + 2^+ - 6} + k = \frac{0}{0} + k \text{ (indeterminação)} \quad \text{(fazendo } y = x - 2, \text{ temos } x = y + 2 \text{ e } -y = 2 - x; \\
 & \text{ e se } x \rightarrow 2^+, \text{ então } y \rightarrow 0^+) \\
 & = \lim_{y \rightarrow 0^+} \left( \frac{\sin(-y)}{(y+2)^2 + y + 2 - 6} \right) + k = \lim_{y \rightarrow 0^+} \left( \frac{\sin(-y)}{y^2 + 4y + 4 + y - 4} \right) + k = \lim_{y \rightarrow 0^+} \left( \frac{\sin(-y)}{y^2 + 5y} \right) + k = \\
 & = \lim_{y \rightarrow 0^+} \left( \frac{-\sin y}{y(y+5)} \right) + k = \lim_{y \rightarrow 0^+} \left( \frac{\sin y}{y} \times \frac{-1}{y+5} \right) + k = \underbrace{\lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{\sin y}{y}}_{\text{Lim. Notável}} \times \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{-1}{y+5} + k = \\
 & = 1 \times \frac{-1}{0^+ + 5} + k = -\frac{1}{5} + k
 \end{aligned}$$

Como se pretende que a função seja contínua em  $x = 2$ , e verificamos que  $f(2) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$ , podemos determinar o valor de  $k$  garantindo que  $f(2) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$

$$f(2) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) \Leftrightarrow 2 = -\frac{1}{5} + k \Leftrightarrow 2 + \frac{1}{5} = k \Leftrightarrow \frac{10}{5} + \frac{1}{5} = k \Leftrightarrow \frac{11}{5} = k$$

Exame – 2014, Ép. especial

50. O triângulo  $[OBC]$  é retângulo em  $B$ ,  $\overline{OB} = 1$ , e  $[BC]$  é o cateto oposto ao ângulo  $\alpha$ , temos que:

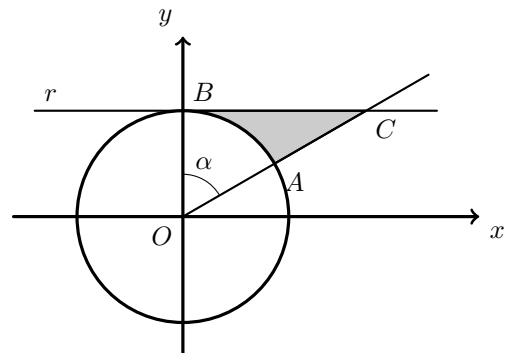
$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\overline{BC}}{\overline{OB}} \Leftrightarrow \operatorname{tg} \alpha = \frac{\overline{BC}}{1} \Leftrightarrow \operatorname{tg} \alpha = \overline{BC}$$

Logo,

$$A_{[OBC]} = \frac{\overline{OB} \times \overline{BC}}{2} = \frac{1 \times \operatorname{tg} \alpha}{2} = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{2}$$

A área do setor circular de centro  $O$ , raio 1 e amplitude  $\alpha$  (delimitado pelo arco  $AB$ ) é

$$A = \frac{\alpha \times 1^2}{2} = \frac{\alpha}{2}$$



Como a área da zona sombreada ( $A_S$ ) pode ser calculada como a diferença entre as áreas do triângulo  $[OBC]$  e o setor circular de centro  $O$  e delimitado pelo arco  $AB$ , temos que

$$A_S = A_{[OBC]} - A = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{2} - \frac{\alpha}{2} = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \alpha}{2}$$

Resposta: **Opção B**

Exame – 2014, Ép. especial



51. Como a função é contínua no intervalo fechado, temos que  $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} f(x)$

Temos que  $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = k - 3$

E calculando  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} f(x)$ , vem

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{\cos x}{x - \frac{\pi}{2}} = \left( \begin{array}{l} \text{Se } y = x - \frac{\pi}{2}, \text{ então } x = y + \frac{\pi}{2} \\ x \rightarrow \frac{\pi}{2}^- \Rightarrow y \rightarrow 0^- \end{array} \right) \\ &= \lim_{y \rightarrow 0^-} \frac{\cos\left(y + \frac{\pi}{2}\right)}{y} = \left( \cos\left(y + \frac{\pi}{2}\right) = -\text{sen } y \right) \\ &= \lim_{y \rightarrow 0^-} \frac{-\text{sen } y}{y} = - \underbrace{\lim_{y \rightarrow 0^-} \frac{\text{sen } y}{y}}_{\text{Lim. Notável}} = -1 \end{aligned}$$

Assim, temos que

$$k - 3 = -1 \Leftrightarrow k = -1 + 3 \Leftrightarrow k = 2$$

Resposta: **Opção C**

Exame – 2014, 2.ª Fase

52. Como a soma dos ângulos externos de um polígono é  $2\pi$ , o ângulo externo em A tem de amplitude  $\frac{2\pi}{5}$  e assim, podemos calcular a amplitude do ângulo BAE:

$$B\hat{A}E = \pi - \frac{2\pi}{5} = \frac{5\pi}{5} - \frac{2\pi}{5} = \frac{3\pi}{5}$$

Como  $E\hat{A}D = E\hat{D}A$  (porque se opõem a lados iguais),  $E\hat{A}D + E\hat{D}A + A\hat{E}D = \pi$  (porque são os ângulos internos de um triângulo) e  $A\hat{E}D = B\hat{A}E$ , temos que

$$E\hat{A}D + E\hat{A}D + \frac{3\pi}{5} = \pi \Leftrightarrow 2E\hat{A}D = \pi - \frac{3\pi}{5} \Leftrightarrow 2E\hat{A}D = \frac{2\pi}{5} \Leftrightarrow E\hat{A}D = \frac{2\pi}{2 \times 5} \Leftrightarrow E\hat{A}D = \frac{\pi}{5}$$

Como  $B\hat{A}E = B\hat{A}D + E\hat{A}D \Leftrightarrow B\hat{A}D = B\hat{A}E - E\hat{A}D$  vem que

$$B\hat{A}D = \frac{3\pi}{5} - \frac{\pi}{5} = \frac{2\pi}{5}$$

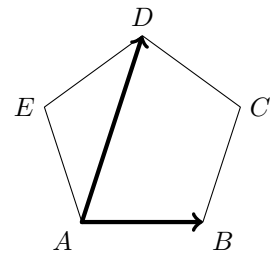
Assim, vem que,

$$\frac{\vec{AB} \cdot \vec{AD}}{\|\vec{AD}\|} = \frac{\|\vec{AB}\| \times \|\vec{AD}\| \times \cos(\vec{AB} \wedge \vec{AD})}{\|\vec{AD}\|} = \|\vec{AB}\| \times \cos(B\hat{A}D) \stackrel{AB=1}{=} \cos(B\hat{A}D) = \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$$

Como  $\cos(2\alpha) = \cos^2 \alpha - \text{sen}^2 \alpha$  e  $\text{sen}^2(\alpha) + \cos^2 \alpha = 1 \Leftrightarrow \cos^2 \alpha = 1 - \text{sen}^2 \alpha$  vem que

$$\frac{\vec{AB} \cdot \vec{AD}}{\|\vec{AD}\|} = \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \cos^2\left(\frac{\pi}{5}\right) - \text{sen}^2\left(\frac{\pi}{5}\right) = 1 - \text{sen}^2\left(\frac{\pi}{5}\right) - \text{sen}^2\left(\frac{\pi}{5}\right) = 1 - 2\text{sen}^2\left(\frac{\pi}{5}\right)$$

Exame – 2014, 2.ª Fase



53. Como o lado  $[PR]$  do triângulo  $[PQR]$  é um diâmetro da circunferência e o vértice  $Q$  pertence à mesma circunferência, podemos garantir que o triângulo  $[PQR]$  é retângulo, sendo  $[PR]$  a hipotenusa. Como a circunferência tem raio 2, vem que  $\overline{PR} = 2 \times 2 = 4$ , e assim, recorrendo à definição de seno e cosseno temos:

$$\begin{aligned}\sin \alpha &= \frac{\overline{QR}}{\overline{PR}} \Leftrightarrow \sin \alpha = \frac{\overline{QR}}{4} \Leftrightarrow \overline{QR} = 4 \sin \alpha \\ \cos \alpha &= \frac{\overline{PQ}}{\overline{PR}} \Leftrightarrow \cos \alpha = \frac{\overline{PQ}}{4} \Leftrightarrow \overline{PQ} = 4 \cos \alpha\end{aligned}$$

Como os lados  $[QR]$  e  $[PQ]$  são perpendiculares, temos que:

$$A_{[PQR]} = \frac{\overline{QR} \times \overline{PQ}}{2} = \frac{4 \sin \alpha \times 4 \cos \alpha}{2} = 8 \sin \alpha \cos \alpha$$

Como o triângulo  $[PSR]$  é congruente com o triângulo  $[PQR]$  (ambos têm 1 ângulo reto e dois lados iguais), vem que:

$$A(\alpha) = A_{[PQRS]} = A_{[PQR]} + A_{[PSR]} = 2 \times A_{[PQR]} = 2 \times 8 \sin \alpha \cos \alpha = 16 \sin \alpha \cos \alpha$$

Como  $\operatorname{tg} \theta = 2\sqrt{2}$  e  $\operatorname{tg}^2 \theta + 1 = \frac{1}{\cos^2 \theta}$ , temos que:

$$\begin{aligned}(2\sqrt{2})^2 + 1 &= \frac{1}{\cos^2 \theta} \Leftrightarrow 4 \times 2 + 1 = \frac{1}{\cos^2 \theta} \Leftrightarrow 9 = \frac{1}{\cos^2 \theta} \Leftrightarrow \cos^2 \theta = \frac{1}{9} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \cos \theta = \pm \sqrt{\frac{1}{9}} \Leftrightarrow \cos \theta = \pm \frac{1}{3} \quad \theta \in ]0, \frac{\pi}{2}[ \Leftrightarrow \cos \theta = \frac{1}{3}\end{aligned}$$

E, pela fórmula fundamental da trigonometria, vem:

$$\sin^2 \theta + \frac{1}{9} = 1 \Leftrightarrow \sin^2 \theta = 1 - \frac{1}{9} \Leftrightarrow \sin^2 \theta = \frac{8}{9} \Leftrightarrow \sin \theta = \pm \sqrt{\frac{8}{9}} \Leftrightarrow \sin \theta = \pm \frac{2\sqrt{2}}{3} \quad \theta \in ]0, \frac{\pi}{2}[ \Leftrightarrow \sin \theta = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

Finalmente, recorrendo à fórmula de  $A(\alpha)$ , deduzida antes, temos que:

$$A(\theta) = 16 \times \frac{2\sqrt{2}}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{32\sqrt{2}}{9}$$

Exame – 2014, 2.ª Fase

54. Como

- $\overline{BC} = \sin \alpha$
- $\overline{OC} = \cos \alpha$

Temos que  $\overline{DC} = \overline{OD} - \overline{OC} = 3 - |\cos \alpha|$

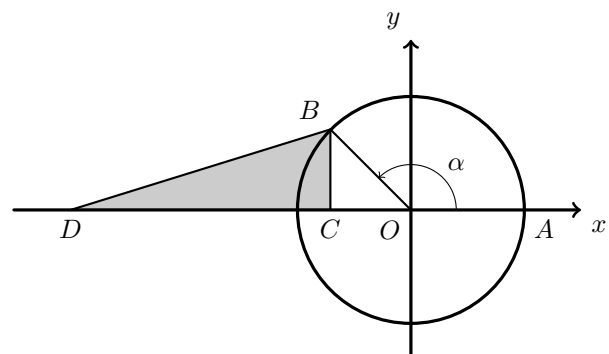
Como  $\alpha \in ]\frac{\pi}{2}, \pi[$ , logo  $\cos \alpha < 0$ , pelo que  $|\cos \alpha| = -\cos \alpha$

Assim,  $\overline{DC} = 3 - |\cos \alpha| = 3 - (-\cos \alpha) = 3 + \cos \alpha$

Desta forma, temos que:

$$A_{[BCD]} = \frac{\overline{DC} \times \overline{BC}}{2} = \frac{\sin \alpha (3 + \cos \alpha)}{2} = \frac{1}{2} (3 + \cos \alpha) \sin \alpha$$

Resposta: **Opção C**



Exame – 2014, 1.ª Fase





55.

$$55.1. \text{ Como } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{f(x) - f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{x - \frac{\pi}{2}} = f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{sen}\left(2 \times \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{sen}(\pi) = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}$$

temos que:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{f(x) - f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{2x - \pi} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{f(x) - f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{2\left(x - \frac{\pi}{2}\right)} = \frac{1}{2} \times \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{f(x) - f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{x - \frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}$$

55.2. Começando por determinar  $f''$  temos:




$$f''(x) = (f'(x))' = (x - \operatorname{sen}(2x))' = (x)' - (\operatorname{sen}(2x))' = 1 - (2x)' \cos(2x) = 1 - 2 \cos(2x)$$

Para determinar o sentido das concavidades, vamos estudar o sinal de  $f''$ :

$$\begin{aligned} f''(x) = 0 &\Leftrightarrow 1 - 2 \cos(2x) = 0 \Leftrightarrow 1 = 2 \cos(2x) \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \cos(2x) \Leftrightarrow \cos(2x) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \vee 2x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + k\pi \vee x = -\frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Logo, as únicas soluções da equação  $f''(x) = 0$  que pertencem ao intervalo  $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}[$ , são  $x = \frac{\pi}{6}$  e  $x = -\frac{\pi}{6}$  (obtidas com  $k = 0$ ).

Assim, estudando a variação de sinal de  $f''$  e relacionando com o sentido das concavidades do gráfico de  $f$ , vem:

$x$	$-\frac{\pi}{2}$		$-\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{4}$
$f''$	n.d.	+	0	-	0	+	n.d.
$f$	n.d.		Pt. I.		Pt. I.		n.d.

Logo, podemos concluir que o gráfico de  $f$ :

- tem a concavidade voltada para cima no intervalo  $]-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{6}[$  e no intervalo  $[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}[$
- tem a concavidade voltada para baixo no intervalo  $[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}]$
- tem dois pontos de inflexão de abcissas, cujas abcissas são  $-\frac{\pi}{6}$  e  $\frac{\pi}{6}$

Exame – 2014, 1.ª Fase

56. Como  $\cos(a + b) = \cos a \cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b$ , então  $\cos(2a) = \cos(a + a) = \cos^2 a - \operatorname{sen}^2 a$ 

$$\text{Assim, para cada valor de } x \in \mathbb{R}, g(x) = \cos^2\left(\frac{x}{12}\right) - \operatorname{sen}^2\left(\frac{x}{12}\right) = \cos\left(2 \times \frac{x}{12}\right) = \cos\left(\frac{x}{6}\right)$$

Resposta: **Opção D**

Teste Intermédio 12.º ano – 30.04.2014



57. Considerando  $\beta$  como o ângulo  $FSP$  e sendo  $M$  o ponto médio do lado  $[SP]$ , como o triângulo  $[SMF]$  é retângulo, recorrendo à definição de seno e cosseno temos:

$$\operatorname{sen} \beta = \frac{\overline{FM}}{\overline{FS}} \Leftrightarrow \operatorname{sen} \beta = \frac{\overline{FM}}{4} \Leftrightarrow \overline{FM} = 4 \operatorname{sen} \beta$$

$$\operatorname{cos} \beta = \frac{\overline{SM}}{\overline{FS}} \Leftrightarrow \operatorname{cos} \beta = \frac{\overline{SM}}{4} \Leftrightarrow \overline{SM} = 4 \operatorname{cos} \beta$$

Como  $M$  é o ponto médio de  $[SP]$ , temos que

$$\overline{SP} = 2 \times \overline{SM} = 2 \times 4 \operatorname{cos} \beta = 8 \operatorname{cos} \beta$$

Assim, a área do triângulo  $[PSF]$  pode ser calculada como:

$$A_{[PSF]} = \frac{\overline{SP} \times \overline{FM}}{2} = \frac{8 \operatorname{cos} \beta \times 4 \operatorname{sen} \beta}{2} = \frac{32 \operatorname{sen} \beta \operatorname{cos} \beta}{2} = 16 \operatorname{sen} \beta \operatorname{cos} \beta = 8 \times 2 \operatorname{sen} \beta \operatorname{cos} \beta = 8 \operatorname{sen} (2\beta)$$

(porque  $\operatorname{sen} (a + b) = \operatorname{sen} a \operatorname{cos} b + \operatorname{cos} a \operatorname{sen} b$ ,  
então  $\operatorname{sen} (2a) = \operatorname{sen} (a + a) = 2 \operatorname{sen} a \operatorname{cos} a$ )

Como o ângulo  $RSP$  é um ângulo reto, podemos relacionar o ângulo  $\alpha$  com o ângulo  $\beta$ :

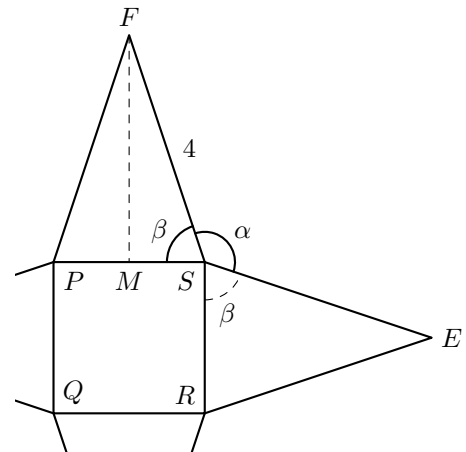
$$\frac{\pi}{2} + \beta + \alpha + \beta = 2\pi \Leftrightarrow 2\beta + \alpha = 2\pi - \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow 2\beta + \alpha = \frac{3\pi}{2} \Leftrightarrow 2\beta = \frac{3\pi}{2} - \alpha$$

Logo a área do triângulo  $[PSF]$  é

$$A_{[PSF]} = 8 \operatorname{sen} (2\beta) = 8 \operatorname{sen} \left( \frac{3\pi}{2} - \alpha \right) = 8 (-\operatorname{cos} \alpha) = -8 \operatorname{cos} \alpha$$

Assim, temos que a área lateral é:

$$A_L = 4 \times A_{[PSF]} = 4 \times (-8 \operatorname{cos} \alpha) = -32 \operatorname{cos} \alpha$$

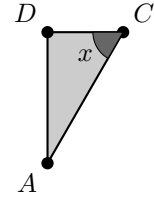


58.

58.1. Vamos considerar  $\overline{DA}$  a medida da altura do triângulo e  $\overline{EC}$  a medida da base. Sabemos que  $\overline{CA} = 1$ , porque é a medida do raio da circunferência.

Como  $[CA]$  é a hipotenusa do triângulo e  $[DA]$  o cateto oposto ao ângulo  $x$ , usando o seno do ângulo temos que:

$$\sin x = \frac{\overline{DA}}{\overline{CA}} \Leftrightarrow \sin x = \frac{\overline{DA}}{1} \Leftrightarrow \overline{DA} = \sin x$$



Por outro lado, como  $[DC]$  é o cateto adjacente, usando a definição de cosseno, temos:

$$\cos x = \frac{\overline{DC}}{\overline{CA}} \Leftrightarrow \cos x = \frac{\overline{DC}}{1} \Leftrightarrow \overline{DC} = \cos x$$

Como  $\overline{ED} = 6$  temos que:

$$\overline{EC} = \overline{ED} + \overline{DC} \Leftrightarrow \overline{EC} = 6 + \cos x$$

Logo, calculando a área do triângulo, obtemos:

$$A_{[AEC]} = \frac{\overline{EC} \times \overline{DA}}{2} = \frac{(6 + \cos x)(\sin x)}{2} = \frac{6 \sin x + \sin x \cos x}{2} = 3 \sin x + \frac{\sin x \cos x}{2}$$

Como  $\sin(2x) = 2 \sin x \cos x$ , podemos escrever:

$$A_{[AEC]} = 3 \sin x + \frac{\sin x \cos x}{2} = 3 \sin x + \frac{2 \sin x \cos x}{4} = 3 \sin x + \frac{\sin(2x)}{4} = 3 \sin x + \frac{1}{4} \sin(2x)$$

58.2. Como a função  $f$  resulta de operações sucessivas de funções contínuas em  $\mathbb{R}$ , é uma função contínua, e, por isso, também é contínua em  $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right]$ .

Como  $1,72 < 2 < 2,37$ , ou seja,  $f\left(\frac{\pi}{6}\right) < 2 < f\left(\frac{\pi}{4}\right)$ , então, podemos concluir, pelo Teorema de Bolzano, que existe  $c \in \left]\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right[$  tal que  $f(c) = 2$ , ou seja, que a equação  $f(x) = 2$  tem, pelo menos, uma solução em  $\left]\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right[$ .

C.A.

$$f\left(\frac{\pi}{6}\right) = 3 \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) + \frac{1}{4} \sin\left(2 \times \frac{\pi}{6}\right) =$$

$$= 3 \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) + \frac{1}{4} \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) =$$

$$\approx 1,72$$

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 3 \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{4} \sin\left(2 \times \frac{\pi}{4}\right) =$$

$$= 3 \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{4} \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) =$$

$$\approx 2,37$$

Exame – 2013, Ép. especial



59. Para averiguar se a função  $f$  é contínua em  $x = 1$ , temos que verificar se  $f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$

- $f(1) = 1 \times e^{3+1} + 2 \times 1 = e^4 + 2$
- $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (xe^{3+x} + 2x) = 1 \times e^{3+1} + 2 \times 1 = e^4 + 2$
- $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left( \frac{1 - \sqrt{x} + \text{sen}(x-1)}{1-x} \right) = \frac{1 - \sqrt{1^+} + \text{sen}(1^+ - 1)}{1 - 1^+} = \frac{0^- + \text{sen}(0^+)}{0^-} = \frac{0}{0}$  (ind.)
 
$$= \lim_{x \rightarrow 1^+} \left( \frac{1 - \sqrt{x}}{1-x} + \frac{\text{sen}(x-1)}{1-x} \right) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left( \frac{1 - \sqrt{x}}{1-x} \right) + \lim_{x \rightarrow 1^+} \left( \frac{\text{sen}(x-1)}{1-x} \right) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^+} \left( \frac{(1 - \sqrt{x})(1 + \sqrt{x})}{(1-x)(1 + \sqrt{x})} \right) + \lim_{x \rightarrow 1^+} \left( \frac{\text{sen}(x-1)}{-(x-1)} \right) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^+} \left( \frac{1^2 - (\sqrt{x})^2}{(1-x)(1 + \sqrt{x})} \right) - \lim_{x \rightarrow 1^+} \left( \frac{\text{sen}(x-1)}{x-1} \right) =$$

(fazendo  $y = x - 1$ , temos que se  $x \rightarrow 1^+$ , então  $y \rightarrow 0^+$ )

$$= \lim_{x \rightarrow 1^+} \left( \frac{1-x}{(1-x)(1 + \sqrt{x})} \right) - \underbrace{\lim_{y \rightarrow 0^+} \left( \frac{\text{sen } y}{y} \right)}_{\text{Lim. Notável}} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left( \frac{1}{1 + \sqrt{x}} \right) - 1 =$$

$$= \frac{1}{1 + \sqrt{1^+}} - 1 = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}$$

Como  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ , não existe  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ ; logo a função  $f$  não é contínua em  $x = 1$

Exame – 2013, 2.ª Fase

60.

60.1. Começamos por definir o ponto  $P(-3,0)$  e o ângulo  $AOP$ , cuja amplitude é  $\pi - \alpha$ .

Assim, como sabemos que  $\overline{OP} = 3$ , podemos usar a definição de cosseno podemos calcular  $\overline{OA}$ :

$$\cos(\pi - \alpha) = \frac{\overline{OP}}{\overline{OA}} \Leftrightarrow \cos(\pi - \alpha) = \frac{3}{\overline{OA}} \Leftrightarrow \overline{OA} = \frac{3}{\cos(\pi - \alpha)}$$

Como  $\cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha$ , temos que:

$$\overline{OA} = \frac{3}{\cos(\pi - \alpha)} \Leftrightarrow \overline{OA} = \frac{3}{-\cos \alpha} \Leftrightarrow \overline{OA} = -\frac{3}{\cos \alpha}$$

Depois, calculamos  $\overline{AP}$  recorrendo à definição de tangente:

$$\text{tg}(\pi - \alpha) = \frac{\overline{AP}}{\overline{OP}} \Leftrightarrow \text{tg}(\pi - \alpha) = \frac{\overline{AP}}{3} \Leftrightarrow \overline{AP} = 3 \text{tg}(\pi - \alpha)$$

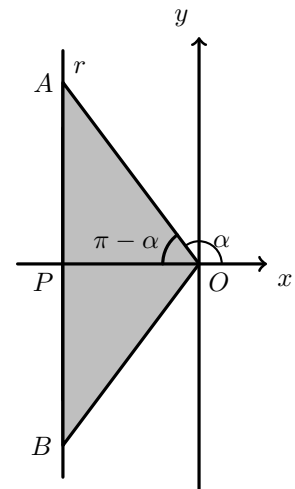
Como  $\text{tg}(\pi - \alpha) = -\text{tg} \alpha$ , temos que:

$$\overline{AP} = 3 \text{tg}(\pi - \alpha) \Leftrightarrow \overline{AP} = -3 \text{tg} \alpha$$

Como  $\overline{AB} = 2 \times \overline{AP}$  e  $\overline{OB} = \overline{OA}$ , calculado a expressão do perímetro vem:

$$P_{\{OAB\}} = \overline{AB} + \overline{OA} + \overline{OB} = 2 \times \overline{AP} + 2 \times \overline{OA} = 2 \times (-3 \text{tg} \alpha) + 2 \times \left( -\frac{3}{\cos \alpha} \right) = -6 \text{tg} \alpha - \frac{6}{\cos \alpha}$$

Logo, para cada  $x \in \left] \frac{\pi}{2}, \pi \right[$ , o perímetro do triângulo é  $P(x) = -6 \text{tg} x - \frac{6}{\cos x}$



60.2. Como o declive da reta tangente num ponto é dado pelo valor da derivada nesse ponto, vamos calcular a derivada da função  $P$ :

$$\begin{aligned} P'(x) &= \left( -6 \operatorname{tg} x - \frac{6}{\cos x} \right)' = (-6 \operatorname{tg} x)' - \left( \frac{6}{\cos x} \right)' = -6 (\operatorname{tg} x)' - \frac{(6)'(\cos x) - 6(\cos x)'}{(\cos x)^2} = \\ &= -6 \left( \frac{1}{(\cos x)^2} \right) - \frac{0 - 6(-\operatorname{sen} x)}{(\cos x)^2} = \frac{-6}{\cos^2 x} - \frac{6 \operatorname{sen} x}{\cos^2 x} = \frac{-6 - 6 \operatorname{sen} x}{\cos^2 x} \end{aligned}$$

Assim, o declive da reta tangente ao gráfico da função  $P$  no ponto de abcissa  $\frac{5\pi}{6}$ , é

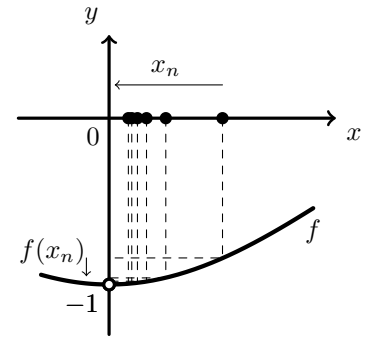
$$m = P' \left( \frac{5\pi}{6} \right) = \frac{-6 - 6 \operatorname{sen} \left( \frac{5\pi}{6} \right)}{\cos^2 \left( \frac{5\pi}{6} \right)} = \frac{-6 - 6 \operatorname{sen} \left( \frac{\pi}{6} \right)}{\left( -\cos \left( \frac{\pi}{6} \right) \right)^2} = \frac{-6 - 6 \left( \frac{1}{2} \right)}{\left( -\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2} = \frac{-6 - 3}{\frac{3}{4}} = \frac{-9}{\frac{3}{4}} = -12$$

Exame – 2013, 2.ª Fase

61. Como  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0^+$ , então  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ , e assim, como  $\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen} x$ :

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\operatorname{sen}(-x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} -\frac{\operatorname{sen} x}{x} = \\ &= - \underbrace{\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\operatorname{sen} x}{x}}_{\text{Lim. Notável}} = -1 \end{aligned}$$

Graficamente, na figura ao lado, estão representados alguns termos de  $(x_n)$  como objetos, e alguns termos da sucessão das imagens  $f(x_n)$ , que se aproximam progressivamente de -1, quando o valor de  $n$  aumenta.



Resposta: **Opção A**

Exame – 2013, 1.ª Fase



62. Como sabemos que a reta tangente no ponto de abscissa  $a$  é paralela à reta  $y = \frac{x}{2} + 1$ , sabemos que o declive, e logo também o valor derivada é  $m = g'(a) = \frac{1}{2}$ .

Logo o valor de  $a$  é a solução da equação  $g'(x) = \frac{1}{2}$ ,  $x \in ]-\frac{\pi}{2}, 0[$

Assim, começamos por determinar a expressão de  $g'$ :

$$g'(x) = (\sin(2x) - \cos x)' = (\sin(2x))' - (\cos x)' = (2x)' \cos(2x) - (-\sin x) = 2 \cos(2x) + \sin x$$

Como  $\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x$  e  $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ , vem:

$$\begin{aligned} g'(x) &= 2 \cos(2x) + \sin x = 2(\cos^2 x - \sin^2 x) + \sin x = 2(1 - \sin^2 x - \sin^2 x) + \sin x = \\ &= 2(1 - 2\sin^2 x) + \sin x = 2 - 4\sin^2 x + \sin x = -4\sin^2 x + \sin x + 2 \end{aligned}$$

Logo, resolvendo a equação  $g'(a) = \frac{1}{2}$  temos:

$$-4\sin^2 a + \sin a + 2 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow -8\sin^2 a + 2\sin a + 4 = 1 \Leftrightarrow -8\sin^2 a + 2\sin a + 3 = 0$$

Considerando  $y = \sin a$ , e resolvendo a equação de grau 2, temos que:

$$-8\sin^2 a + 2\sin a + 3 = 0 \Leftrightarrow -8y^2 + 2y + 3 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4(-8)(3)}}{2(-8)} \Leftrightarrow y = \frac{3}{4} \vee y = -\frac{1}{2}$$

Escrevendo em função de  $a$ , vem:  $\sin a = \frac{3}{4} \vee \sin a = -\frac{1}{2}$

Como  $x \in ]-\frac{\pi}{2}, 0[$ ,  $-1 < \sin x < 0$ , logo a equação  $\sin a = \frac{3}{4}$  é impossível.

$$\sin a = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin a = \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow a = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee a = \pi - \left(-\frac{\pi}{6}\right) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee a = \pi + \frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow a = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee a = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Concretizando valores de  $k$  podemos verificamos que  $a = -\frac{\pi}{6}$  é a única solução da equação que pertence ao domínio da função  $]-\frac{\pi}{2}, 0[$ , pelo que a reta tangente ao gráfico de  $f$  no ponto de abscissa  $a = -\frac{\pi}{6}$  tem declive  $\frac{1}{2}$

Exame - 2013, 1.ª Fase

63.

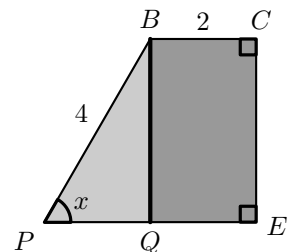
- 63.1. A área do trapézio  $[PBCE]$  pode ser calculada como a soma das áreas do retângulo  $[BCEQ]$  e do triângulo  $[PBQ]$ .

Recorrendo à definição de seno, podemos determinar o comprimento  $\overline{BQ}$ :

$$\sin x = \frac{\overline{BQ}}{4} \Leftrightarrow \overline{BQ} = 4 \sin x$$

De forma análoga, usando a definição de cosseno, podemos determinar  $\overline{PQ}$ :

$$\cos x = \frac{\overline{PQ}}{4} \Leftrightarrow \overline{PQ} = 4 \cos x$$



Assim, temos que:

$$\begin{aligned} A_{[PBCE]} &= A_{[BCEQ]} + A_{[PBQ]} = \overline{BC} \times \overline{BQ} + \frac{\overline{PQ} \times \overline{BQ}}{2} = 2 \times 4 \sin x + \frac{4 \sin x \times 4 \cos x}{2} = \\ &= 8 \sin x + 8 \sin x \cos x = 8 \sin x + 4 \times 2 \sin x \cos x = 8 \sin x + 4 \sin(2x) \end{aligned}$$

Logo, para cada valor de  $x \in ]0, \frac{\pi}{2}[$ , a área do trapézio é dada por  $S(x) = 8 \sin x + 4 \sin(2x)$



63.2. Vamos recorrer à derivada da função  $S$  para estudar a monotonia.

$$S'(x) = (8 \operatorname{sen} x + 4 \operatorname{sen}(2x))' = (8 \operatorname{sen} x)' + (4 \operatorname{sen}(2x))' = 8 \cos x + 4 \times (2x)' \cos(2x) = 8 \cos x + 8 \cos(2x)$$

Determinando os zeros da derivada, vem:

$$\begin{aligned} S'(x) = 0 &\Leftrightarrow 8 \cos x + 8 \cos(2x) = 0 \Leftrightarrow \cos x + \cos(2x) = 0 \Leftrightarrow \cos x = -\cos(2x) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \cos x = \cos(\pi - 2x) \Leftrightarrow x = \pi - 2x + 2k\pi \vee x = -(\pi - 2x) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 3x = \pi + 2k\pi \vee x = -\pi + 2x + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + \frac{2}{3}k\pi \vee x = \pi - 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Como o domínio da função  $S$  é  $]0, \frac{\pi}{2}[$ , a única solução da equação  $S'(x) = 0$  é  $x = \frac{\pi}{3}$

Estudando a variação do sinal e  $S'$  e a correspondente monotonia de  $S$ , vem:

$x$	0		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{\pi}{2}$
$S'$	n.d.	+	0	-	n.d.
$S$	n.d.	$\nearrow$	Máx	$\searrow$	n.d.

Assim podemos concluir que:

- a função  $S$  é crescente em  $]0, \frac{\pi}{3}]$
- a função  $S$  é decrescente em  $[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}[$
- a função  $S$  tem um máximo absoluto para  $x = \frac{\pi}{3}$

Teste Intermédio 12.º ano – 24.05.2013

64.

$$\begin{aligned} f' \left( \frac{\pi}{2} \right) &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{f(x) - f \left( \frac{\pi}{2} \right)}{x - \frac{\pi}{2}} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{x + \cos x - \frac{\pi}{2} - \cos \left( \frac{\pi}{2} \right)}{x - \frac{\pi}{2}} = \\ &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y + \frac{\pi}{2} + \cos \left( y + \frac{\pi}{2} \right) - \frac{\pi}{2} - 0}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y + \cos \left( y + \frac{\pi}{2} \right)}{y} = \\ &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{y} + \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\cos \left( y + \frac{\pi}{2} \right)}{y} = 1 + \lim_{y \rightarrow 0} \frac{-\operatorname{sen} y}{y} = 1 - \underbrace{\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} y}{y}}_{\text{Lim. Notável}} = \\ &= 1 - 1 = 0 \end{aligned}$$

$$\text{Seja } y = x - \frac{\pi}{2}$$

$$\text{logo } x = y + \frac{\pi}{2}$$

$$\text{Se } x \rightarrow \frac{\pi}{2} \\ \text{então, } y \rightarrow 0$$

$$\cos \left( y + \frac{\pi}{2} \right) = -\operatorname{sen} y$$

Teste Intermédio 12.º ano – 24.05.2013



65.

- 65.1. A função  $g$  é contínua em  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$  porque resulta de operações sucessivas entre funções contínuas. Para que a função  $g$  seja contínua em  $\mathbb{R}$ , tem que ser contínua em  $x = 0$ , ou seja, tem que verificar a condição  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x + \operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} -\frac{x}{x} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)}{x} = -1 + \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} y}{2y} = \\ &= -1 + \frac{1}{2} \underbrace{\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} y}{y}}_{\text{Lim. Notável}} = -1 + \frac{1}{2}(1) = -\frac{1}{2} \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \text{Seja } y = \frac{x}{2} \\ \text{logo } x = 2y \\ \text{Se } x \rightarrow 0 \\ \text{então } y \rightarrow 0 \end{array} \right\}$$

Como  $f(0) = e^k - 1$ , para que a função seja contínua, tem que se verificar:

$$e^k - 1 = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow e^k = 1 - \frac{1}{2} \Leftrightarrow e^k = \frac{1}{2} \Leftrightarrow k = \ln\left(\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow k = \ln 1 - \ln 2 \Leftrightarrow k = -\ln 2$$

- 65.2. Para resolver a equação, começamos por determinar a expressão analítica de  $f'$ :

$$f'(x) = \left(-x + \operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)\right)' = (-x)' + \left(\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)\right)' = -1 + \left(\frac{x}{2}\right)' \cos\left(\frac{x}{2}\right) = -1 + \frac{1}{2} \cos\left(\frac{x}{2}\right)$$

Logo,

$$\begin{aligned} 2f'(x) &= (f(x) + x)^2 - 1 \Leftrightarrow 2\left(-1 + \frac{1}{2} \cos\left(\frac{x}{2}\right)\right) = \left(-x + \operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right) + x\right)^2 - 1 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow -2 + \cos\left(\frac{x}{2}\right) = \operatorname{sen}^2\left(\frac{x}{2}\right) - 1 \Leftrightarrow -2 + \cos\left(\frac{x}{2}\right) = -\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) \Leftrightarrow \quad \text{(fórmula} \\ &\Leftrightarrow \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) + \cos\left(\frac{x}{2}\right) - 2 = 0 \Leftrightarrow y^2 + y - 2 = 0 \Leftrightarrow \quad \text{fundamental)} \\ &\Leftrightarrow y = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4(1)(-2)}}{2(1)} \Leftrightarrow y = 1 \vee y = -2 \Leftrightarrow \quad \text{Se } y = \cos\left(\frac{x}{2}\right) \\ &\Leftrightarrow \cos\left(\frac{x}{2}\right) = 1 \vee \cos\left(\frac{x}{2}\right) = -2 \end{aligned}$$

Como  $\cos\left(\frac{x}{2}\right) = -2$  é uma equação impossível, temos:

$$\cos\left(\frac{x}{2}\right) = 1 \Leftrightarrow \frac{x}{2} = 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = 4k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Logo, o conjunto das soluções da equação (em  $] - 2\pi, 5\pi[$ ), é  $\{0, 4\}$

Exame – 2012, Ép. especial





66. Como a função  $f$  é contínua em  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ , porque resulta de operações sucessivas entre funções contínuas, só podem existir assíntotas verticais quando  $x \rightarrow 0^-$  ou quando  $x \rightarrow 0^+$ .

Calculando os limites temos:

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - e^{4x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-(e^{4x} - 1)}{\frac{1}{4} \times 4x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-4(e^{4x} - 1)}{4x} = -4 \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{4x} - 1}{4x} = -4$$

(fazendo  $y = 4x$ , se  $x \rightarrow 0^+$ , então  $y \rightarrow 0^+$ )

$$= -4 \lim_{y \rightarrow 0^+} \underbrace{\frac{e^y - 1}{y}}_{\text{Lim. Notável}} = -4 \times 1 = -4$$

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin x}{1 - \sqrt{1 - x^3}} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{(\sin x)(1 + \sqrt{1 - x^3})}{(1 - \sqrt{1 - x^3})(1 + \sqrt{1 - x^3})} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{(\sin x)(1 + \sqrt{1 - x^3})}{1^2 - (\sqrt{1 - x^3})^2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{(\sin x)(1 + \sqrt{1 - x^3})}{1 - (1 - x^3)} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{(\sin x)(1 + \sqrt{1 - x^3})}{1 - 1 + x^3} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{(\sin x)(1 + \sqrt{1 - x^3})}{x^3} = \\ &= \underbrace{\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin x}{x}}_{\text{Lim. Notável}} \times \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1 + \sqrt{1 - x^3}}{x^2} = 1 \times \frac{1 + \sqrt{1}}{(0^-)^2} = \frac{2}{0^+} = +\infty \end{aligned}$$

Assim podemos concluir que  $x = 0$  é a única assíntota vertical do gráfico de  $f$  (quando  $x \rightarrow 0^-$ ).

Exame – 2012, 2.ª Fase

67.

67.1. Definindo o ponto  $P$ , como o ponto médio do lado  $[AB]$ , a área da região sombreada pode ser calculada como a diferença entre a área do quadrado e a soma das áreas de 8 triângulos retângulos (o triângulo  $[AEP]$  e os restantes 7 semelhantes a este):

$$A_{[AEBFCGDH]} = A_{[ABCD]} - 8 \times A_{[AEP]}$$

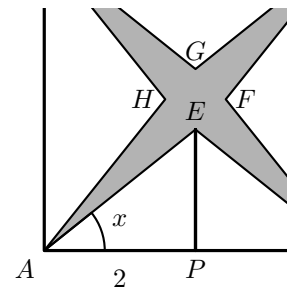
Como  $P$  é o ponto médio de  $[AB]$ , temos que  $\overline{AP} = 2$ , podemos determinar  $\overline{EP}$ , recorrendo à definição de tangente de um ângulo:

$$\operatorname{tg} x = \frac{\overline{EP}}{\overline{AP}} \Leftrightarrow \operatorname{tg} x = \frac{\overline{EP}}{2} \Leftrightarrow \overline{EP} = 2 \operatorname{tg} x$$

Assim, calculando a área da região sombreada, vem:

$$\begin{aligned} A_{[AEBFCGDH]} &= A_{[ABCD]} - 8 \times A_{[AEP]} = \overline{AB}^2 - 8 \times \frac{\overline{AP} \times \overline{EP}}{2} = 4^2 - 8 \times \frac{2 \times 2 \operatorname{tg} x}{2} = \\ &= 16 - 8 \times 2 \operatorname{tg} x = 16 - 16 \operatorname{tg} x = 16(1 - \operatorname{tg} x) \end{aligned}$$

Logo, para cada valor de  $x \in \left]0, \frac{\pi}{4}\right[$ , a área da região sombreada é dada por  $a(x) = 16(1 - \operatorname{tg} x)$



67.2. Como a função  $a$  resulta de operações sucessivas de funções contínuas em  $]0, \frac{\pi}{4}[$ , é uma função contínua, e, por isso, também é contínua em  $[\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{5}]$ .

Como  $4,38 < 5 < 11,71$ , ou seja,  $a(\frac{\pi}{5}) < 5 < a(\frac{\pi}{12})$ , então, podemos concluir, pelo Teorema de Bolzano, que existe  $\alpha \in ]\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{5}[$ , tal que  $a(\alpha) = 5$ , ou seja, que existe um ângulo  $\alpha$  com amplitude compreendida entre  $\frac{\pi}{12} rad$  e  $\frac{\pi}{5} rad$ , que define uma região sombreada com área 5.

C.A.

$$a\left(\frac{\pi}{12}\right) = 16\left(1 - \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{12}\right)\right) \approx 11,71$$

$$a\left(\frac{\pi}{5}\right) = 16\left(1 - \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{5}\right)\right) \approx 4,38$$

Exame – 2012, 2.ª Fase

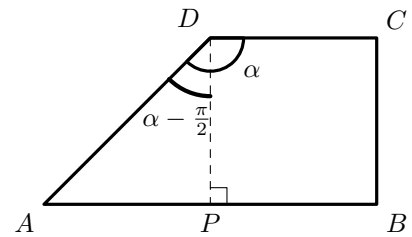
68.

68.1. Considerando um ponto  $P$ , sobre o lado  $[AB]$  do trapézio, tal que o segmento  $[DP]$  seja perpendicular ao lado  $[AB]$ , consideramos o ângulo  $ADP$  com amplitude  $\frac{\pi}{2} - \alpha$

Como  $\overline{DP} = 1$ , recorrendo à definição de cosseno, temos:

$$\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\overline{DP}}{\overline{DA}} \Leftrightarrow \overline{DA} = \frac{1}{\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)}$$

e como  $\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = \operatorname{sen} \alpha$ , temos que:  $\overline{DA} = \frac{1}{\operatorname{sen} \alpha}$



Da definição de tangente de um ângulo, e como  $\operatorname{tg}\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}$  temos:

$$\operatorname{tg}\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\overline{AP}}{\overline{DP}} \Leftrightarrow \operatorname{tg}\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\overline{AP}}{1} \Leftrightarrow \overline{AP} = -\frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}$$

Logo, o perímetro do trapézio é:

$$\begin{aligned} P_{[ABCD]} &= \overline{PB} + \overline{BC} + \overline{CD} + \overline{DA} + \overline{AP} = 1 + 1 + 1 + \frac{1}{\operatorname{sen} \alpha} + \left(-\frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}\right) = \\ &= 3 + \frac{1}{\operatorname{sen} \alpha} - \frac{1}{\frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha}} = 3 + \frac{1}{\operatorname{sen} \alpha} - \frac{\cos \alpha}{\operatorname{sen} \alpha} = 3 + \frac{1 - \cos \alpha}{\operatorname{sen} \alpha} \end{aligned}$$

Ou seja, para cada valor de  $\alpha \in ]\frac{\pi}{2}, \pi[$ , o perímetro do trapézio  $[ABCD]$  é  $P(\alpha) = 3 + \frac{1 - \cos \alpha}{\operatorname{sen} \alpha}$



68.2. Começando por determinar a expressão da derivada, temos:

$$\begin{aligned} P'(\alpha) &= \left(3 + \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha}\right)' = (3)' + \left(\frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha}\right)' = 0 + \frac{(1 - \cos \alpha)'(\sin \alpha) - (1 - \cos \alpha)(\sin \alpha)'}{(\sin \alpha)^2} = \\ &= \frac{0 - (-\sin \alpha)(\sin \alpha) - (1 - \cos \alpha)(\cos \alpha)}{\sin^2 \alpha} = \frac{\sin^2 \alpha - (\cos \alpha - \cos^2 \alpha)}{\sin^2 \alpha} = \\ &= \frac{\sin^2 \alpha - \cos \alpha + \cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} = \frac{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha - \cos \alpha}{\sin^2 \alpha} = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin^2 \alpha} \end{aligned}$$

Como  $\operatorname{tg}^2 \theta + 1 = \frac{1}{\cos^2 \theta}$  e  $\operatorname{tg} \theta = -\sqrt{8}$ , vem:

$$(-\sqrt{8})^2 + 1 = \frac{1}{\cos^2 \theta} \Leftrightarrow 8 + 1 = \frac{1}{\cos^2 \theta} \Leftrightarrow \cos^2 \theta = \frac{1}{9} \Leftrightarrow \cos \theta = \pm \sqrt{\frac{1}{9}} \Leftrightarrow \cos \theta = \pm \frac{1}{3}$$

Como  $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ ,  $\cos \theta < 0$ , logo  $\cos \theta = -\frac{1}{3}$

$$\text{E também: } \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \Leftrightarrow \sin^2 \theta = 1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^2 \Leftrightarrow \sin^2 \theta = 1 - \frac{1}{9} \Leftrightarrow \sin^2 \theta = \frac{8}{9}$$

$$\text{Assim, } P'(\theta) = \frac{1 - \left(-\frac{1}{3}\right)}{\frac{8}{9}} = \frac{1 + \frac{1}{3}}{\frac{8}{9}} = \frac{\frac{4}{3}}{\frac{8}{9}} = \frac{4 \times 9}{3 \times 8} = \frac{3}{2}$$

Exame – 2012, 1.ª Fase

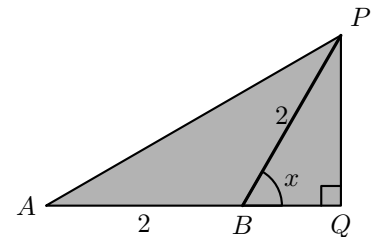
69.

69.1. Usando a definição de seno, temos:

$$\sin x = \frac{\overline{PQ}}{\overline{BP}} \Leftrightarrow \sin x = \frac{\overline{PQ}}{2} \Leftrightarrow \overline{PQ} = 2 \sin x$$

e usando a definição de cosseno, vem:

$$\cos x = \frac{\overline{BQ}}{\overline{BP}} \Leftrightarrow \cos x = \frac{\overline{BQ}}{2} \Leftrightarrow \overline{BQ} = 2 \cos x$$



Calculando a área do triângulo vem:

$$\begin{aligned} A_{[APQ]} &= \frac{(\overline{AB} + \overline{BQ}) \times \overline{PQ}}{2} = \frac{(2 + 2 \cos x)(2 \sin x)}{2} = \frac{4 \sin x + 4 \sin x \cos x}{2} = 2 \sin x + 2 \sin x \cos x = \\ &= 2 \sin x + \sin(2x) \end{aligned}$$

Logo, para cada valor de  $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ , a área do triângulo  $[APQ]$  é  $A(x) = 2 \sin x + \sin(2x)$



69.2. Para estudar a existência de um máximo, começamos por determinar a expressão da derivada:

$$A'(x) = (2 \operatorname{sen} x + \operatorname{sen}(2x))' = (2 \operatorname{sen} x)' + (\operatorname{sen}(2x))' = 2 \cos x + (2x)' \cos(2x) = 2 \cos x + 2 \cos(2x)$$

Depois calculamos os zeros, para estudar o sinal:

$$\begin{aligned} A'(x) = 0 &\Leftrightarrow 2 \cos x + 2 \cos(2x) = 0 \Leftrightarrow 2 \cos x = -2 \cos(2x) \Leftrightarrow \cos x = -\cos(2x) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \cos x = \cos(\pi - 2x) \end{aligned}$$

Como, em  $\mathbb{R}$ ,

$$\cos x = \cos(\pi - 2x) \Leftrightarrow x = \pi - 2x + 2k\pi \vee x = -(\pi - 2x) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3x = \pi + 2k\pi \vee x = -\pi + 2x + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{2} \vee x = \pi - 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Concretizando valores inteiros de  $k$ , verificamos que,  $x = \frac{\pi}{3}$  é a única solução em  $]0, \frac{\pi}{2}[$ , ou seja, a única solução da equação  $A'(x) = 0$

Assim, estudando a variação de sinal de  $A'$  e relacionando com a monotonia da função  $A$ , vem:

$x$	0		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{\pi}{2}$
$A'$	n.d.	+	0	-	n.d.
$A$	n.d.	$\nearrow$	Máx	$\searrow$	n.d.

Logo  $x = \frac{\pi}{3}$  é o maximizante que corresponde ao máximo absoluto da função  $A$ , ou seja existe um valor de  $x \in ]0, \frac{\pi}{2}[$ , para o qual o valor da área do triângulo é máxima.

Teste Intermédio 12.º ano – 24.05.2012



70. Como se pretende determinar os extremos da função, vamos recorrer aos zeros da derivada, e por isso, começamos por derivar a função:

$$g'(x) = (x - 2 \cos x)' = (x)' - (2 \cos x)' = 1 - 2(-\sin x) = 1 + 2 \sin x$$

Depois determinamos os zeros da derivada, ou seja as abcissas dos pontos  $C$  e  $D$ :

$$\begin{aligned} g'(x) = 0 &\Leftrightarrow 1 + 2 \sin x = 0 \Leftrightarrow \sin x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin x = \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee x = \pi - \left(-\frac{\pi}{6}\right) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Atribuindo valores inteiros a  $k$ , podemos encontrar os valores de  $x$  que pertencem ao domínio da função:

$$x = -\frac{\pi}{6} (k = 0) \text{ e } x = -\frac{5\pi}{6} (k = -1, x = \frac{7\pi}{6} - 2\pi)$$

Assim, estudando a variação de sinal de  $g'$  e relacionando com a monotonia da função  $g$ , vem:

$x$	$-\pi$		$-\frac{5\pi}{6}$		$-\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{2}$
$g'$	n.d.	+	0	-	0	+	n.d.
$g$	n.d.	$\longrightarrow$	Máx	$\longrightarrow$	min	$\longrightarrow$	n.d.

Assim, temos que a abcissa do ponto  $C$  é  $x_C = -\frac{5\pi}{6}$ , e a ordenada é

$$g\left(-\frac{5\pi}{6}\right) = -\frac{5\pi}{6} - 2 \cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right) = -\frac{5\pi}{6} - 2 \cos \frac{5\pi}{6} = -\frac{5\pi}{6} - 2\left(-\cos \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{5\pi}{6} - 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \sqrt{3} - \frac{5\pi}{6}$$

Ou seja, o ponto  $C$  tem coordenadas  $C\left(-\frac{5\pi}{6}, \sqrt{3} - \frac{5\pi}{6}\right)$

De forma análoga, temos que a abcissa do ponto  $D$  é  $x_D = -\frac{\pi}{6}$ , e a ordenada é

$$g\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\pi}{6} - 2 \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\pi}{6} - 2 \cos \frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{6} - 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{\pi}{6} - \sqrt{3}$$

Ou seja, o ponto  $D$  tem coordenadas  $D\left(-\frac{\pi}{6}, -\frac{\pi}{6} - \sqrt{3}\right)$

Exame - 2011, Prova especial

71. Como se trata de um círculo trigonométrico, o ponto  $B$  tem coordenadas  $B\left(\cos \frac{5\pi}{3}, \sin \frac{5\pi}{3}\right)$ , porque o segmento  $[OB]$ , define com o semieixo positivo  $Ox$  um ângulo de  $\pi + \frac{2\pi}{3} = \frac{5\pi}{3}$  radianos.

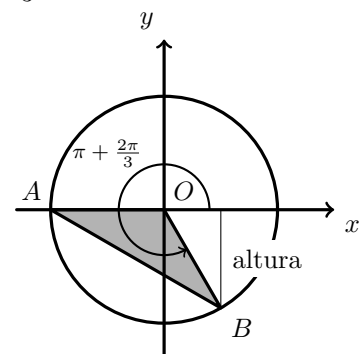
Podemos considerar como a medida da base do triângulo  $\overline{OA} = 1$  e o valor absoluto da ordenada de  $B$  como a medida da altura:

$$|y_B| = \left| \sin \frac{5\pi}{3} \right| = \left| -\sin \frac{\pi}{3} \right| = \left| -\frac{\sqrt{3}}{2} \right| = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Assim, calculando a área do triângulo vem:

$$A_{[OAB]} = \frac{\overline{OA} \times |y_B|}{2} = \frac{1 \times \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

Resposta: **Opção A**



Exame - 2011, Ép. especial



$$\begin{aligned}
72. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{f(x) - \pi} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\pi - 4 \sin(5x) - \pi} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{-4 \sin(5x)} = -\frac{1}{4} \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\sin x}{x} \times \frac{x}{\sin(5x)} \right) = \\
&= -\frac{1}{4} \underbrace{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}}_{\text{Lim. Notável}} \times \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin(5x)} = -\frac{1}{4} \times 1 \times \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{\sin(5x)}{x}} = -\frac{1}{4} \times \frac{1}{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(5x)}{x}} = \\
&\text{(fazendo } y = 5x \text{ temos que } x = \frac{y}{5}, \text{ e se } x \rightarrow 0, \text{ então } y \rightarrow 0) \\
&= -\frac{1}{4} \times \frac{1}{\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin(y)}{\frac{y}{5}}} = -\frac{1}{4} \times \frac{1}{\lim_{y \rightarrow 0} \frac{5 \sin(y)}{y}} = -\frac{1}{4} \times \frac{1}{\lim_{y \rightarrow 0} \frac{5 \sin(y)}{y}} = -\frac{1}{4} \times \frac{1}{5 \underbrace{\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin(y)}{y}}_{\text{Lim. Notável}}} = \\
&= -\frac{1}{4} \times \frac{1}{5 \times 1} = -\frac{1}{20}
\end{aligned}$$

Exame – 2011, Ép. especial

73. Como a função  $g$  é contínua, é contínua em  $x = 0$ , ou seja, verifica a condição:  $g(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)$   
Assim, temos que:

- $g(0) = \ln(k - 0) = \ln k$
- $\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (\ln(k - x)) = \ln k$
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{3x} = \frac{1}{3} \underbrace{\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x}}_{\text{Lim. Notável}} = \frac{1}{3} \times 1 = \frac{1}{3}$

Logo, temos que:  $\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) \Leftrightarrow \ln k = \frac{1}{3} \Leftrightarrow k = e^{\frac{1}{3}} \Leftrightarrow k = \sqrt[3]{e}$

Resposta: **Opção A**

Exame – 2011, 2.ª fase

74. Como  $\overline{OA} = 1$ , usando as definições de seno e cosseno temos:

$$\sin \theta = \frac{\overline{OE}}{\overline{OA}} \Leftrightarrow \sin \theta = \frac{\overline{OE}}{1} \Leftrightarrow \overline{OE} = \sin \theta$$

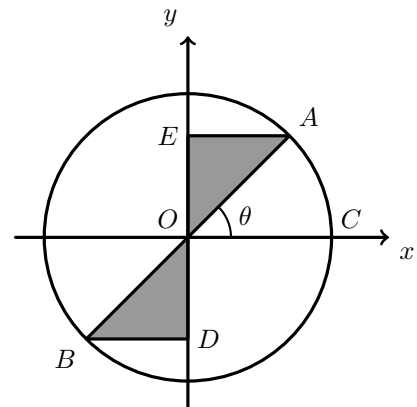
$$\cos \theta = \frac{\overline{EA}}{\overline{OA}} \Leftrightarrow \cos \theta = \frac{\overline{EA}}{1} \Leftrightarrow \overline{EA} = \cos \theta$$

E assim, o perímetro da região sombreada é:

$$P_{[ABDE]} = \overline{AO} + \overline{OB} + \overline{BD} + \overline{DO} + \overline{OE} + \overline{EA}$$

Como  $\overline{AO} = \overline{OB}$ ;  $\overline{BD} = \overline{EA}$  e  $\overline{DO} = \overline{OE}$ , temos:

$$P_{[ABDE]} = 2\overline{AO} + 2\overline{EA} + 2\overline{OE} = 2 \times 1 + 2 \cos \theta + 2 \sin \theta = 2(1 + \cos \theta + \sin \theta)$$

Resposta: **Opção C**

Exame – 2011, 2.ª Fase



75. Começamos por determinar  $f'(x)$ :

$$f'(x) = (a \cos(nx) + b \operatorname{sen}(nx))' = (a \cos(nx))' + (b \operatorname{sen}(nx))' = a(nx)'(-\operatorname{sen}(nx)) + (b(nx))' \cos(nx) = \\ = -an \operatorname{sen}(nx) + bn \cos(nx)$$

Determinamos em seguida  $f''(x)$ :

$$f''(x) = (f'(x))' = (-an \operatorname{sen}(nx) + bn \cos(nx))' = (-an \operatorname{sen}(nx))' + (bn \cos(nx))' = \\ = -an(nx)' \cos(nx) + bn(nx)'(-\operatorname{sen}(nx)) = -an^2 \cos(nx) - bn^2 \operatorname{sen}(nx) = \\ = -n^2 (a \cos(nx) + b \operatorname{sen}(nx)) = \\ = -n^2 (f(x))$$

Assim temos que:  $f''(x) + n^2 f(x) = -n^2 f(x) + n^2 f(x) = 0$ , *q.e.d.*

Exame – 2011, 2.ª Fase

76.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x^2} \operatorname{sen}^2 \left( \frac{x}{2} \right) \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}^2 \left( \frac{x}{2} \right)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}^2 \left( \frac{x}{2} \right)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\operatorname{sen} \left( \frac{x}{2} \right)}{x} \right)^2 = \left( \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} \left( \frac{x}{2} \right)}{x} \right)^2 =$$

(fazendo  $y = \frac{x}{2}$  temos que  $x = 2y$ , e se  $x \rightarrow 0$ , então  $y \rightarrow 0$ )

$$= \left( \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} y}{2y} \right)^2 = \left( \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{2} \times \frac{\operatorname{sen} y}{y} \right) \right)^2 = \left( \frac{1}{2} \underbrace{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} y}{y}}_{\text{Lim. Notável}} \right)^2 = \left( \frac{1}{2} \times 1 \right)^2 = \frac{1}{4}$$

Resposta: **Opção C**

Exame – 2011, 1.ª Fase

77.

77.1. Podemos calcular a área do trapézio como a soma das áreas do retângulo  $[ODCB]$  e do triângulo  $[OAB]$ .

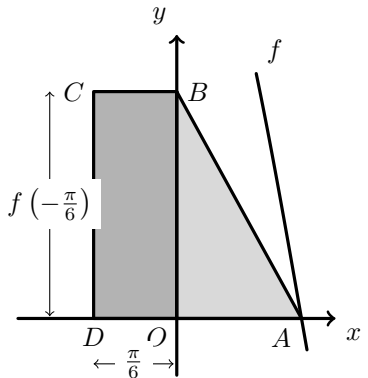
A base do retângulo é dada pela distância do ponto  $D$  à origem:

$$\overline{OD} = |x_D| = \left| -\frac{\pi}{6} \right| = \frac{\pi}{6}$$

e a altura é a ordenada do ponto  $C$ :

$$\overline{DC} = f \left( -\frac{\pi}{6} \right) = 4 \cos \left( 2 \left( -\frac{\pi}{6} \right) \right) = 4 \cos \left( -\frac{\pi}{3} \right) = 4 \cos \frac{\pi}{3} = 4 \times \frac{1}{2} = 2$$

A altura do triângulo também é ordenada do ponto  $C$ ,  $\overline{OB} = \overline{DC}$  e a base é a menor é a abscissa do ponto  $\overline{OA}$ , ou seja, a solução positiva da equação  $f(x) = 0$ .



Assim, resolvendo a equação vem:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow 4 \cos(2x) = 0 \Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Logo, para  $k = 0$ , a menor solução positiva da equação é  $x = \frac{\pi}{4}$

Assim, calculando a área do trapézio, vem:

$$A_{[ABCD]} = A_{[ODCB]} + A_{[OAB]} = \overline{OD} \times \overline{DC} + \frac{\overline{OA} \times \overline{OB}}{2} = \frac{\pi}{6} \times 2 + \frac{\frac{\pi}{4} \times 2}{2} = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4} = \frac{4\pi}{12} + \frac{3\pi}{12} = \frac{7\pi}{12}$$



77.2. Determinando a expressão da primeira derivada de  $f$ , vem:

$$f'(x) = (4 \cos(2x))' = 4(2x)'(-\operatorname{sen}(2x)) = 4 \times 2 \times (-\operatorname{sen}(2x)) = -8 \operatorname{sen}(2x)$$

Depois, determinando a expressão da segunda derivada, vem:

$$f''(x) = (f'(x))' = (-8 \operatorname{sen}(2x))' = -8(2x)' \cos(2x) = -16 \cos(2x)$$

Assim, temos que, para qualquer número real  $x$ ,

$$\begin{aligned} f(x) + f'(x) + f''(x) &= (4 \cos(2x)) + (-8 \operatorname{sen}(2x)) + (-16 \cos(2x)) = 4 \cos(2x) - 16 \cos(2x) - 8 \operatorname{sen}(2x) = \\ &= -12 \cos(2x) - 8 \operatorname{sen}(2x) = -4 \times 3 \cos(2x) - 4 \times 2 \operatorname{sen}(2x) = -4(3 \cos(2x) + 2 \operatorname{sen}(2x)), \text{ q.e.d.} \end{aligned}$$

Exame - 2011, 1.ª Fase

78. Para que a função  $f$  seja contínua em  $x = 1$ , a condição  $f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$  tem que se verificar.

Assim, temos que:

- $f(1) = 1 \times e^{-1} + 2 \times 1 = e^{-1} + 2 = \frac{1}{e} + 2$
- $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (xe^{-x} + 2x) = 1 \times e^{-1} + 2 \times 1 = e^{-1} + 2 = \frac{1}{e} + 2$
- $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \left( 2 + \frac{\operatorname{sen}(x-1)}{ex - e} \right) = \lim_{x \rightarrow 1^-} 2 + \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\operatorname{sen}(x-1)}{e(x-1)} = 2 + \frac{1}{e} \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\operatorname{sen}(x-1)}{(x-1)} =$   
(fazendo  $y = x - 1$ , se  $x \rightarrow 1^-$  então  $y \rightarrow 0^-$ )  
$$= 2 + \frac{1}{e} \underbrace{\lim_{y \rightarrow 0^-} \frac{\operatorname{sen} y}{y}}_{\text{Lim. Notável}} = 2 + \frac{1}{e} \times 1 = 2 + \frac{1}{e}$$

Logo, como  $f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ , a função  $f$  é contínua em  $x = 1$ .

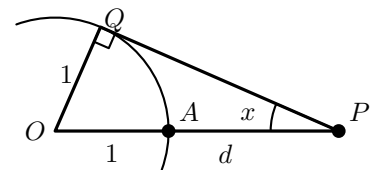
Teste Intermédio 12.º ano - 26.05.2011

79.

79.1. Como  $\overline{OQ} = 1$  (medida do cateto oposto ao ângulo  $x$ ) e  $\overline{OP} = 1 + d$  (medida da hipotenusa do triângulo retângulo), usando a definição de seno de um ângulo, temos que:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} x = \frac{\overline{OQ}}{\overline{OP}} &\Leftrightarrow \operatorname{sen} x = \frac{1}{1+d} \Leftrightarrow 1+d = \frac{1}{\operatorname{sen} x} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow d = \frac{1}{\operatorname{sen} x} - 1 \Leftrightarrow d = \frac{1}{\operatorname{sen} x} - \frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} x} \Leftrightarrow d = \frac{1 - \operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} x} \end{aligned}$$

Logo, para cada valor de  $x \in ]0, \frac{\pi}{2}[$ , temos que  $d = f(x)$ .





79.2. Para estudar a monotonia da função, começamos por determinar a expressão da derivada:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left( \frac{1 - \operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} x} \right)' = \frac{(1 - \operatorname{sen} x)'(\operatorname{sen} x) - (1 - \operatorname{sen} x)(\operatorname{sen} x)'}{\operatorname{sen}^2 x} = \\ &= \frac{((1)' - (\operatorname{sen} x)')(\operatorname{sen} x) - (1 - \operatorname{sen} x)(\cos x)}{\operatorname{sen}^2 x} = \frac{(0 - (\cos x))(\operatorname{sen} x) - (\cos x - \operatorname{sen} x \cos x)}{\operatorname{sen}^2 x} = \\ &= \frac{-\operatorname{sen} x \cos x - \cos x + \operatorname{sen} x \cos x}{\operatorname{sen}^2 x} = \frac{-\cos x}{\operatorname{sen}^2 x} \end{aligned}$$

Assim, para  $x \in ]0, \frac{\pi}{2}[$ , temos que:

- $\cos x > 0$ , logo  $-\cos x < 0$
- $\operatorname{sen}^2 x > 0$
- $\frac{-\cos x}{\operatorname{sen}^2 x} < 0$

Ou seja, como  $f'(x) < 0$ , para  $x \in ]0, \frac{\pi}{2}[$ , a função  $f$  é estritamente decrescente no domínio, pelo que a um aumento do valor de  $x$  corresponde uma diminuição do valor de  $d$ , ou seja, **a afirmação é verdadeira.**

Teste Intermédio 12.º ano – 26.05.2011

80.

80.1. As três horas da tarde desse dia correspondem a  $t = 15$ .

Assim, a profundidade correspondente é dada por:

$$P(15) = 2 \cos \left( \frac{\pi}{6} \times 15 \right) + 8 = 2 \cos \left( \frac{3 \times 5 \times \pi}{3 \times 2} \right) + 8 = 2 \cos \left( \frac{5\pi}{2} \right) + 8 = 2 \cos \left( \frac{\pi}{2} \right) + 8 = 2 \times 0 + 8 = 8$$

Ou seja, às 15 horas, a profundidade da água na marina era de 8 metros.



80.2. Determinando a expressão da derivada, temos:

$$\begin{aligned} P'(t) &= \left(2 \cos\left(\frac{\pi}{6}t\right) + 8\right)' = \left(2 \cos\left(\frac{\pi}{6}t\right)\right)' + (8)' = 2\left(\frac{\pi}{6}t\right)' \left(-\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}t\right)\right) + 0 = \frac{2\pi}{6} \left(-\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}t\right)\right) = \\ &= -\frac{\pi}{3} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}t\right) \end{aligned}$$

Calculando os zeros da derivada, vem:

$$\begin{aligned} P'(t) = 0 &\Leftrightarrow -\frac{\pi}{3} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}t\right) = 0 \Leftrightarrow \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}t\right) = 0 \Leftrightarrow \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}t\right) = \operatorname{sen}0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{\pi}{6}t = 0 + 2k\pi \vee \frac{\pi}{6}t = \pi - 0 + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow t = \frac{6(2k\pi)}{\pi} \vee t = \frac{6(\pi + 2k\pi)}{\pi}, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow t = 12k \vee t = 6 + 12k, k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Como  $t \in [0, 24]$ , atribuindo valores a  $k$  ( $k = 0$ ,  $k = 1$  e  $k = 2$ ), obtemos o conjunto dos zeros da função derivada:  $\{0, 6, 12, 18, 24\}$

Desta forma, estudando a variação de sinal de  $P'$  e relacionando com a monotonia da função  $P$ , vem:

$x$	0		6		12		18		24
$P'$	0	-	0	+	0	-	0	+	0
$P$	Máx	$\searrow$	min	$\nearrow$	Máx	$\searrow$	min	$\nearrow$	Máx

Logo, a profundidade mínima, que ocorreu às 6 horas e depois novamente às 18 horas, pode ser calculada como:

$$P(6) = 2 \cos\left(\frac{\pi}{6} \times 6\right) + 8 = 2 \cos(\pi) + 8 = 2(-1) + 8 = -2 + 8 = 6$$

Ou seja a profundidade mínima na marina, nesse dia, foi de 6 metros.

Exame – 2010, Ép. especial



81.

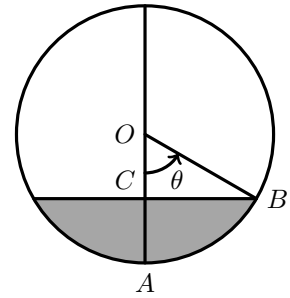
81.1. Analisando as figuras podemos dividir o cálculo da altura em dois casos:

No primeiro caso,  $(\theta \in ]0, \frac{\pi}{2}])$ ,  $h = 3 - \overline{OC}$ Como  $\overline{OB} = 3$ , recorrendo à definição de cosseno de um ângulo, temos:

$$\cos \theta = \frac{\overline{OC}}{3} \Leftrightarrow \overline{OC} = 3 \cos \theta$$

e assim,

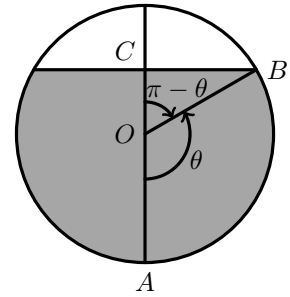
$$h = 3 - \overline{OC} = 3 - 3 \cos \theta$$

No segundo caso,  $(\theta \in ]\frac{\pi}{2}, \pi[)$ ,  $h = 3 + \overline{OC}$ Como  $\overline{OB} = 3$ , recorrendo à definição de cosseno de um ângulo, temos:

$$\begin{aligned} \cos(\pi - \theta) &= \frac{\overline{OC}}{3} \Leftrightarrow \overline{OC} = 3 \cos(\pi - \theta) \Leftrightarrow \overline{OC} = 3(-\cos \theta) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \overline{OC} = -3 \cos \theta \end{aligned}$$

e assim,

$$h = 3 + \overline{OC} = 3 + (-3 \cos \theta) = 3 - 3 \cos \theta$$

Ou seja em ambos os casos, isto é, para qualquer  $\theta \in ]0, \pi[$ , a altura  $h$  pode ser calculada como que  $h(\theta) = 3 - 3 \cos(\theta)$ .81.2. Como  $h(\theta) = 3 - 3 \cos(\theta)$ , temos que:

$$\begin{aligned} h(\theta) = 3 &\Leftrightarrow 3 - 3 \cos(\theta) = 3 \Leftrightarrow -3 \cos(\theta) = 0 \Leftrightarrow \cos(\theta) = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \cos(\theta) = \cos \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Como  $\theta \in ]0, \pi[$ ,  $\theta = \frac{\pi}{2}$  é a única solução da equação.Calcular  $\theta$  tal que  $h(\theta) = 3$ , significa determinar o ângulo associado a uma quantidade de combustível no depósito com 3 metros de altura.Assim a solução calculada significa que, quando o combustível no depósito tiver uma altura de 3 metros, o ângulo  $\theta$  será um ângulo reto  $(\frac{\pi}{2} \text{ rad.})$ .Exame – 2010, 2.<sup>a</sup> Fase

82. Para que a função  $f$  seja contínua em  $x = 0$ , tem que se verificar  $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$

- $f(0) = a(0) + b + e^0 = 0 + b + 1 = b + 1$
  - $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (ax + b + e^x) = a(0) + b + e^0 = 0 + b + 1 = b + 1$
  - $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{x - \operatorname{sen}(2x)}{x} \right) = \frac{0 - \operatorname{sen} 0}{0} = \frac{0}{0}$  (indeterminação)
 
$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{x}{x} - \frac{\operatorname{sen}(2x)}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left( 1 - \frac{2 \times \operatorname{sen}(2x)}{2 \times x} \right) = 1 - \lim_{x \rightarrow 0^+} \left( 2 \times \frac{\operatorname{sen}(2x)}{2x} \right) =$$

$$= 1 - 2 \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\operatorname{sen}(2x)}{2x} \stackrel{(1)}{=} 1 - 2 \underbrace{\lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{\operatorname{sen} y}{y}}_{\text{Lim. Notável}} = 1 - 2 \times 1 = 1 - 2 = -1$$
- (1) (fazendo  $y = 2x$ , se  $x \rightarrow 0^+$  então  $y \rightarrow 0^+$ )

Assim, podemos determinar o valor de  $b$ :

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \Leftrightarrow b + 1 = -1 \Leftrightarrow b = -2$$

Exame – 2010, 1.ª Fase

83.

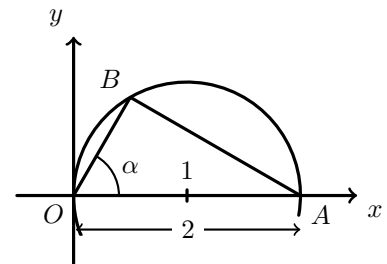
83.1. Como o triângulo está inscrito numa semicircunferência é um triângulo retângulo. Sabemos que a hipotenusa coincide com o diâmetro e tem comprimento 2 ( $\overline{OA} = 2$ ).

Assim, recorrendo à definição de seno temos:

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{\overline{AB}}{\overline{OA}} \Leftrightarrow \operatorname{sen} \alpha = \frac{\overline{AB}}{2} \Leftrightarrow \overline{AB} = 2 \operatorname{sen} \alpha$$

Analogamente, pela definição de cosseno, vem:

$$\operatorname{cos} \alpha = \frac{\overline{OB}}{\overline{OA}} \Leftrightarrow \operatorname{cos} \alpha = \frac{\overline{OB}}{2} \Leftrightarrow \overline{OB} = 2 \operatorname{cos} \alpha$$



Logo, o perímetro do triângulo é:

$$P_{[OAB]} = \overline{OA} + \overline{AB} + \overline{OB} = 2 + 2 \operatorname{sen} \alpha + 2 \operatorname{cos} \alpha = 2(1 + \operatorname{cos} \alpha + \operatorname{sen} \alpha)$$

Ou seja, para cada valor de  $\alpha \in \left] 0, \frac{\pi}{2} \right[$ , o perímetro do triângulo  $[OAB]$  é dado, em função de  $\alpha$ , por

$$f(\alpha) = 2(1 + \operatorname{cos} \alpha + \operatorname{sen} \alpha)$$



83.2. Determinando a expressão da derivada da função, vem:

$$f'(\alpha) = (2(1 + \cos \alpha + \sin \alpha))' = 2((1)' + (\cos \alpha)' + (\sin \alpha)') = 2(0 - \sin \alpha + \cos \alpha) = 2(\cos \alpha - \sin \alpha)$$

$$\text{Assim: } f'(\alpha) = 0 \Leftrightarrow 2(\cos \alpha - \sin \alpha) = 0 \Leftrightarrow \cos \alpha - \sin \alpha = 0 \Leftrightarrow \cos \alpha = \sin \alpha$$

Logo, como  $\alpha \in ]0, \frac{\pi}{2}[$ , sabemos que  $\alpha = \frac{\pi}{4}$  é a única solução da equação  $f'(\alpha) = 0$ , pelo que podemos estudar a variação do sinal de  $f'$  para relacionar com a monotonia de  $f$ :

$x$	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$
$f'$	n.d.	+	0	-	n.d.
$f$	n.d.	$\rightarrow$	Máx	$\rightarrow$	n.d.

Logo, o maximizante de  $f$ , ou seja, o valor de  $\alpha$  para o qual o perímetro do triângulo é máximo, é  $\frac{\pi}{4}$

Exame – 2010, 1.ª Fase

84.

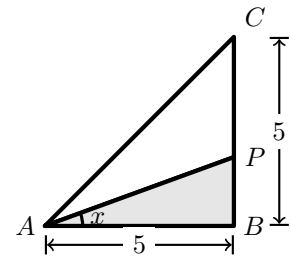
84.1. Relativamente ao triângulo retângulo  $[ABP]$ , do qual conhecemos a medida do cateto adjacente ao ângulo  $x$ , usando a definição de cosseno e de tangente do ângulo  $x$ , temos:

$$\cos x = \frac{\overline{AB}}{\overline{AP}} \Leftrightarrow \cos x = \frac{5}{\overline{AP}} \Leftrightarrow \overline{AP} = \frac{5}{\cos x}$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{\overline{BP}}{\overline{AB}} \Leftrightarrow \operatorname{tg} x = \frac{\overline{BP}}{5} \Leftrightarrow \overline{BP} = 5 \operatorname{tg} x$$

Temos ainda que

$$\overline{BP} + \overline{PC} = 5 \Leftrightarrow \overline{PC} = 5 - \overline{BP} \Leftrightarrow \overline{PC} = 5 - 5 \operatorname{tg} x$$



Recorrendo ao teorema de Pitágoras, podemos calcular a medida do segmento  $[AC]$ :

$$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 \Leftrightarrow \overline{AC}^2 = 5^2 + 5^2 \Leftrightarrow \overline{AC}^2 = 25 + 25 \Leftrightarrow \overline{AC} = \sqrt{50}$$

Assim, calculando o perímetro do triângulo  $[APC]$  vem:

$$P_{[APC]} = \overline{AP} + \overline{PC} + \overline{AC} = \frac{5}{\cos x} + 5 - 5 \operatorname{tg} x + \sqrt{50} = \frac{5}{\cos x} - 5 \operatorname{tg} x + \sqrt{50} + 5$$

Pelo que, para cada valor de  $x \in ]0, \frac{\pi}{4}[$ , o perímetro do triângulo  $[APC]$  é dado pela função  $f$



84.2. Como o declive da reta tangente em cada ponto é dado pelo valor da derivada, vamos determinar a expressão da derivada:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left( \frac{5}{\cos x} - 5 \operatorname{tg} x + \sqrt{50} + 5 \right)' = \left( \frac{5}{\cos x} \right)' - (5 \operatorname{tg} x)' + (\sqrt{50})' + (5)' = \\ &= \frac{(5)'(\cos x) - 5(\cos x)'}{\cos^2 x} - 5 \times \frac{1}{\cos^2 x} + 0 + 0 = \frac{0 - 5(-\operatorname{sen} x)}{\cos^2 x} - \frac{5}{\cos^2 x} = \\ &= \frac{5 \operatorname{sen} x}{\cos^2 x} - \frac{5}{\cos^2 x} = \frac{5 \operatorname{sen} x - 5}{\cos^2 x} \end{aligned}$$

Assim, no ponto de abcissa  $\frac{\pi}{6}$ , o declive da reta tangente é:

$$m_r = f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{5 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right) - 5}{\cos^2\left(\frac{\pi}{6}\right)} = \frac{5\left(\frac{1}{2}\right) - 5}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{\frac{5}{2} - \frac{10}{2}}{\frac{3}{4}} = \frac{-\frac{5}{2}}{\frac{3}{4}} = -\frac{20}{6} = -\frac{10}{3}$$

Ou seja, a reta  $r$  tem declive  $-\frac{10}{3}$

Teste Intermédio 12.º ano – 19.05.2010

85. Calculando a derivada da função  $f$  temos:

$$f'(x) = (\operatorname{sen}(2x))' = (2x)' \cos(2x) = 2 \cos(2x)$$

Calculando o declive da reta tangente ao gráfico de  $f$  no ponto de abcissa  $\frac{\pi}{8}$  vem:

$$f'\left(\frac{\pi}{8}\right) = 2 \cos\left(2 \times \frac{\pi}{8}\right) = 2 \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$$

Resposta: **Opção A**

Exame – 2009, Ép. especial



86. Começamos por determinar a expressão da derivada da função:

$$f'(x) = (e^x \cdot \cos x)' = (e^x)' \cos x + e^x (\cos x)' = e^x \cos x + e^x (-\sin x) = e^x (\cos x - \sin x)$$

Determinando os zeros da derivada, vem:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow e^x (\cos x - \sin x) = 0 \Leftrightarrow \underbrace{e^x = 0}_{\text{Eq Imp, } e^x > 0} \vee \cos x - \sin x = 0 \Leftrightarrow \cos x = \sin x$$

No domínio da função, o intervalo  $[0, \pi[$ , a única solução da equação é  $x = \frac{\pi}{4}$ .

Estudando a variação do sinal da derivada e relacionando com a monotonia da função, vem:

$x$	0		$\frac{\pi}{4}$		$\pi$
$f'$	+	+	0	-	n.d
$f$	min	$\longrightarrow$	Máx	$\longrightarrow$	n.d.

Assim, podemos concluir que a função  $f$ :

- é crescente no intervalo  $[0, \frac{\pi}{4}]$ ;
- é decrescente no intervalo  $[\frac{\pi}{4}, \pi[$ ;
- tem um mínimo, cujo minimizante é ( $x = 0$ ) e um máximo, cujo é maximizante ( $x = \frac{\pi}{4}$ )

Assim o mínimo relativo da função é  $f(0) = e^0 \times \cos(0) = 1 \times 1 = 1$  e o máximo é

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = e^{\frac{\pi}{4}} \times \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = e^{\frac{\pi}{4}} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}}}{2}$$

Exame – 2009, Ép. especial

87. Como o declive da reta tangente em cada ponto é dado pelo valor da derivada, vamos determinar a expressão da derivada:

$$\begin{aligned} f'(x) &= (\sin(2x) \cos x)' = (\sin(2x))' \cos x + \sin(2x) (\cos x)' = (2x)' \cos(2x) \cos x + \sin(2x) (-\sin x) = \\ &= 2 \cos(2x) \cos x - \sin(2x) \sin x \end{aligned}$$

Assim, o declive da reta tangente no ponto de abscissa 0, pode ser calculado como:

$$m = f'(0) = 2 \cos(2(0)) \cos 0 - \sin(2(0)) \sin 0 = 2 \times 1 \times 1 - 0 \times 0 = 2$$

Como  $f(0) = \sin(2(0)) \cos 0 = 0 \times 1 = 0$ , sabemos que o ponto  $P(0,0)$  pertence ao gráfico de  $f$  e também à reta tangente neste ponto.

Como a reta tangente intersecta o eixo das ordenadas no ponto  $(0,0)$ , o valor da ordenada na origem é zero, logo a equação reduzida é

$$y = 2x + 0 \Leftrightarrow y = 2x$$

Exame – 2009, 2.ª Fase



88. Como a função é contínua, é contínua no seu domínio, em particular é contínua em  $x = 0$ , logo verifica-se a condição:  $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$

- $f(0) = \log_2(k + 0) = \log_2 k$
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (\log_2(k + x)) = \log_2(k + 0^+) = \log_2 k$
- $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\text{sen}(2x)}{x} = \frac{\text{sen}(2 \times 0)}{0} = \frac{0}{0}$  (indeterminação)  
 $= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2 \times \text{sen}(2x)}{2 \times x} = 2 \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\text{sen}(2x)}{2x} \stackrel{(1)}{=} 2 \underbrace{\lim_{y \rightarrow 0^-} \frac{\text{sen } y}{y}}_{\text{Limite Notável}} = 2 \times 1 = 2$

(1) fazendo  $y = 2x$ , se  $x \rightarrow 0^-$ , então  $y \rightarrow 0^-$

Logo, como  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ , temos que:

$$\log_2 k = 2 \Leftrightarrow k = 2^2 \Leftrightarrow k = 4$$

Resposta: **Opção D**

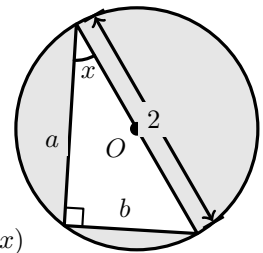
Exame – 2009, 1.ª Fase

89. Como a medida da hipotenusa do triângulo é 2 (porque é um diâmetro de uma circunferência de raio 1), podemos recorrer à definição de seno e cosseno, para determinar a medida da base ( $b$ ) e da altura ( $a$ ):

$$\text{sen } x = \frac{b}{2} \Leftrightarrow b = 2 \text{sen } x \quad \text{e} \quad \text{cos } x = \frac{a}{2} \Leftrightarrow a = 2 \text{cos } x$$

Logo a área sombreada é a diferença da área do círculo e da área do triângulo:

$$A = A_o - A_{\Delta} = \pi r^2 - \frac{b \times a}{2} = \pi(1)^2 - \frac{2 \text{sen } x \times 2 \text{cos } x}{2} = \pi - 2 \text{sen } x \text{cos } x = \pi - \text{sen}(2x)$$



Resposta: **Opção A**

Exame – 2009, 1.ª Fase

- 90.
- O gráfico da função  $a$  **tem uma** única assíntota - a reta vertical  $x = 0$
  - O gráfico da função  $b$  **tem uma** única assíntota - a reta horizontal  $y = 0$
  - O gráfico da função  $c$  **não tem** assíntotas
  - O gráfico da função  $d$  **tem um número infinito** de assíntotas - as retas verticais  $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Resposta: **Opção D**

Teste Intermédio 12.º ano – 27.05.2009





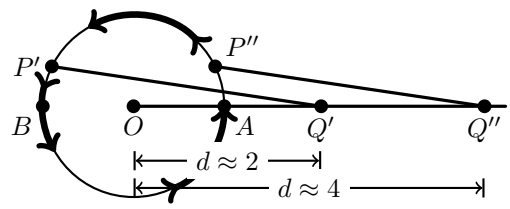
91.

- 91.1. Quando o ponto  $P$  inicia o movimento (e quando termina), ou seja, quando a sua posição coincide com a posição do ponto  $A$ , temos  $\overline{OQ} = 4$ , que é o valor máximo de  $d$ , para  $x = 0 \vee x = 2\pi$ .

Da mesma forma, quando  $x = \pi$ , ou seja, quando a posição do ponto  $P$  coincide com a posição do ponto  $B$ , temos  $\overline{OQ} = 2$ , que é o valor mínimo.

Logo,  $d(0) = 4$  e  $d(\pi) = 2$ , pelo que  $d(0) = 2 \times 2 = 2d(\pi)$ , ou seja, **a afirmação I é verdadeira.**

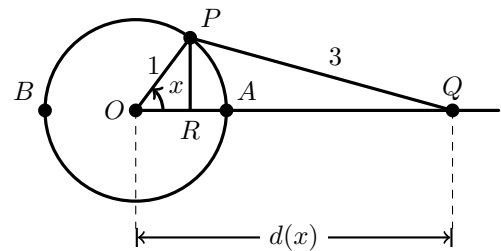
Como a função atinge o valor mínimo para  $x = \pi$ , ou seja  $\overline{OQ} = 2$ , e depois, esta distância vai progressivamente aumentar até que  $\overline{OQ} = 4$ , quando  $x = 2\pi$ , temos que a função  $d(x)$  é crescente no intervalo  $]\pi, 2\pi[$ , ou seja  $d'(x) > 0$  se  $x \in ]\pi, 2\pi[$ , pelo que, **a afirmação II é falsa.**



- 91.2. Como o triângulo  $[ORP]$  é retângulo, e sabemos que a hipotenusa tem comprimento 1, usando a definição de seno e de cosseno vem:

$$\sin x = \frac{\overline{PR}}{\overline{OP}} \Leftrightarrow \sin x = \frac{\overline{PR}}{1} \Leftrightarrow \overline{PR} = \sin x$$

$$\cos x = \frac{\overline{OR}}{\overline{OP}} \Leftrightarrow \cos x = \frac{\overline{OR}}{1} \Leftrightarrow \overline{OR} = \cos x$$



Como o triângulo  $[PRQ]$  também é retângulo, e conhecemos a medida de dois lados, podemos usar o Teorema de Pitágoras:

$$\overline{PQ}^2 = \overline{PR}^2 + \overline{RQ}^2 \Leftrightarrow 3^2 = (\sin x)^2 + \overline{RQ}^2 \Leftrightarrow 9 - \sin^2 x = \overline{RQ}^2 \Leftrightarrow \overline{RQ} = \sqrt{9 - \sin^2 x}$$

Logo,  $\overline{OQ} = \overline{OR} + \overline{RQ} \Leftrightarrow \overline{OQ} = \cos x + \sqrt{9 - \sin^2 x}$ , pelo que, para cada valor de  $x \in ]0, \frac{\pi}{2}[$ ,

$$d(x) = \cos x + \sqrt{9 - \sin^2 x}$$

Teste Intermédio 12.º ano – 27.05.2009

92. Sabemos que, no 4º quadrante - ou seja no intervalo  $[-\frac{\pi}{2}, 0]$  - o cosseno de um ângulo é positivo e que cresce de 0 para 1, ou seja  $\cos(-\frac{\pi}{2}) = 0$  e  $\cos(0) = 1$

No primeiro quadrante - em particular no intervalo  $[0, \frac{\pi}{3}]$  - o cosseno também é positivo, e decrescente, pelo que não atinge valores superiores a 1.

Logo, como a função  $f$  tem domínio  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}]$ , contradomínio de  $f$  é  $[0, 1]$

Resposta: **Opção B**

Exame – 2008, Ép. especial



93. Como  $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$ , então  $\sin(2a) = \sin(a+a) = 2 \sin a \cos a$ , e assim temos que

$$f(x) = 2 \sin(x) \cdot \cos(x) + 2 \Leftrightarrow f(x) = \sin(2x) + 2$$

A ordenada do ponto de interseção da reta  $y = 1$  com o gráfico de  $f$  é 1 e a abcissa é a solução da equação  $f(x) = 1$  que pertence ao intervalo  $[0, \pi]$ . Assim, resolvendo a equação temos:

$$\begin{aligned} f(x) = 1 &\Leftrightarrow \sin(2x) + 2 = 1 \Leftrightarrow \sin(2x) = -1 \Leftrightarrow \sin(2x) = \sin \frac{3\pi}{2} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 2x &= \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \vee 2x = \pi - \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \frac{3\pi}{4} + \frac{2k\pi}{2} \vee 2x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x &= \frac{3\pi}{4} + k\pi \vee x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \quad k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Assim atribuindo valores a  $k$  ( $k = 0$  para o primeiro caso ou  $k = 1$  no segundo caso) obtemos a única solução da equação que pertence ao intervalo  $[0, \pi]$ , ou seja,  $x = \frac{3\pi}{4}$

Logo as coordenadas do ponto de interseção são:  $\left(\frac{3\pi}{4}, 1\right)$

Exame – 2008, Ép. especial

94.

94.1. Recorrendo à definição de derivada da função no ponto de abcissa 0, vem:

$$\begin{aligned} g'(0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 + \sin(4x) - (2 + \sin(4 \times 0))}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 + \sin(4x) - 2}{x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(4x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4 \times \sin(4x)}{4 \times x} = 4 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(4x)}{4x} \stackrel{(1)}{=} 4 \underbrace{\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin y}{y}}_{\text{Limite Notável}} = 4 \times 1 = 4 \end{aligned}$$

(1) fazendo  $y = 4x$ , se  $x \rightarrow 0$ , então  $y \rightarrow 0$



94.2. Para estudar a monotonia da função, começamos por determinar a expressão da derivada:

$$g'(x) = (2 + \operatorname{sen}(4x))' = (2)' + (\operatorname{sen}(4x))' = 0 + (4x)' \cos(4x) = 4 \cos(4x)$$

Para estudar o sinal da derivada, calculamos os zeros:

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow 4 \cos(4x) = 0 \Leftrightarrow \cos(4x) = 0 \Leftrightarrow 4x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}$$

Atribuindo valores a  $k$  ( $k = 0$  e  $k = 1$ ) encontramos as duas soluções da equação que pertencem ao intervalo  $]0, \frac{\pi}{2}[$ , ou seja  $x = \frac{\pi}{8}$  e  $x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{8} + \frac{2\pi}{8} = \frac{3\pi}{8}$

Estudando a variação do sinal de  $g'$  para relacionar com a monotonia de  $g$ , no intervalo  $]0, \frac{\pi}{2}[$ , vem:

$x$	0		$\frac{\pi}{8}$		$\frac{3\pi}{8}$		$\frac{\pi}{2}$
$g'$		+	0	-	0	+	
$g$		$\nearrow$	Máx	$\searrow$	min	$\nearrow$	

Assim, no intervalo  $]0, \frac{\pi}{2}[$ , temos que:

- o valor do máximo de  $g$  é  $g\left(\frac{\pi}{8}\right) = 2 + \operatorname{sen}\left(4 \times \frac{\pi}{8}\right) = 2 + \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2 + 1 = 3$
- o valor do mínimo de  $g$  é  $g\left(\frac{3\pi}{8}\right) = 2 + \operatorname{sen}\left(4 \times \frac{3\pi}{8}\right) = 2 + \operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 2 + (-1) = 1$
- $g$  é crescente no intervalo  $]0, \frac{\pi}{8}[$  e também no intervalo  $\left[\frac{3\pi}{8}, \frac{\pi}{2}[$
- $g$  é decrescente no intervalo  $\left[\frac{\pi}{8}, \frac{3\pi}{8}\right]$

Exame – 2008, 2.ª Fase

95. Como  $D_f = [-\pi, +\infty[$ , só pode existir uma assíntota horizontal quando  $x \rightarrow +\infty$ :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^{-4x+1}) = e^{-4(+\infty)+1} = e^{-\infty} = 0$$

Logo verifica-se que a reta de equação  $y = 0$  é a única assíntota horizontal do gráfico de  $f$

Como a função é contínua em  $] -\pi, 0[$  e em  $]0, +\infty[$ , por resultar de operações sucessivas entre funções contínuas, então as retas definidas por  $x = -\pi$  e por  $x = 0$  são as duas únicas retas verticais que podem ser assíntotas do gráfico de  $f$ :

$$\lim_{x \rightarrow -\pi^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\pi^+} \frac{3 \operatorname{sen}(x)}{x^2} = \frac{3 \operatorname{sen}(-\pi)}{-\pi^2} = \frac{0}{-\pi^2} = 0$$

Ou seja, a reta de equação  $x = -\pi$  não é uma assíntota do gráfico de  $f$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{3 \operatorname{sen}(x)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left( \frac{3}{x} \times \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{3}{x} \times \underbrace{\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x}}_{\text{Limite Notável}} = \frac{3}{0^-} \times 1 = -\infty \times 1 = -\infty$$

Assim, a reta de equação  $x = 0$ , é a única assíntota vertical do gráfico de  $f$

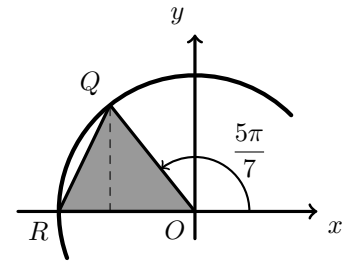
Exame – 2008, 1.ª Fase



96. Como o ponto  $Q$  está sobre um círculo trigonométrico, temos as coordenadas do ponto  $Q$  são  $\left(\cos \frac{5\pi}{7}, \sin \frac{5\pi}{7}\right)$

Considerando o lado  $[OR]$  como a base, a medida da altura é  $y_Q$  (a ordenada do ponto  $Q$ ). E assim a área do triângulo pode ser calculada como:

$$A_{[OQR]} = \frac{\overline{OR} \times y_Q}{2} = \frac{1 \times \sin \frac{5\pi}{7}}{2} \approx 0,39$$



Resposta: **Opção A**

Teste Intermédio 12.º ano – 29.04.2008

97. Determinando a expressão da derivada e igualando a zero, temos:

$$f'(x) = (3 - 2 \cos x)' = (3)' - (2 \cos x)' = 0 - 2(-\sin x) = 2 \sin x$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2 \sin x = 0 \Leftrightarrow \sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

No intervalo  $[0, 2\pi]$  as três soluções são  $x = 0$ ,  $x = \pi$  e  $x = 2\pi$

Estudando a variação do sinal de  $f'$  para relacionar com a monotonia de  $f$ , no intervalo  $[0, 2\pi]$ , vem:

$x$	0		$\pi$		$2\pi$
$f'$	0	+	0	-	0
$f$	min	$\longrightarrow$	Máx	$\longleftarrow$	min

Logo, o valor  $x$  de para o qual  $f(x)$  é máximo, é  $\pi$

Resposta: **Opção C**

Exame – 2007, 2.ª fase

98. Partindo da área do círculo menor temos:

$$\begin{aligned}
 a = \pi r^2 &\Leftrightarrow A\sqrt{\cos \theta} = \pi r^2 \Leftrightarrow && \text{(porque } a = A\sqrt{\cos \theta}\text{)} \\
 &\Leftrightarrow \pi R^2 \sqrt{\cos \theta} = \pi r^2 \Leftrightarrow && \text{(porque } A = \pi R^2\text{)} \\
 &\Leftrightarrow R^2 \sqrt{\cos \theta} = r^2 \Leftrightarrow && \text{(dividindo ambos os membros por } \pi\text{)} \\
 &\Leftrightarrow (\sqrt[4]{2}r)^2 \sqrt{\cos \theta} = r^2 \Leftrightarrow && \text{(porque } R = \sqrt[4]{2}r\text{)} \\
 &\Leftrightarrow \sqrt{2}r^2 \sqrt{\cos \theta} = r^2 \Leftrightarrow && \\
 &\Leftrightarrow \sqrt{2} \times \sqrt{\cos \theta} = 1 \Leftrightarrow && \text{(dividindo ambos os membros por } r^2\text{)} \\
 &\Leftrightarrow \sqrt{\cos \theta} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow && \text{(calculando o quadrado de ambos os membros)} \\
 &\Rightarrow \cos \theta = \frac{1}{2} \Leftrightarrow && \\
 &\Leftrightarrow \cos \theta = \cos \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow && \\
 &\Leftrightarrow \theta = \pm \frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} &&
 \end{aligned}$$

Logo  $\theta = \frac{\pi}{3}$ , porque  $\theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ .

Exame – 2007, 2.ª fase



99.

99.1. Como a função  $h$  resulta de operações sucessivas de funções contínuas em  $\mathbb{R}$ , é uma função contínua, e, por isso, também é contínua em  $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ .

Como  $-0,63 < 0 < 1,77$ , ou seja,  $h(0) < 0 < h\left(\frac{\pi}{2}\right)$ , então, podemos concluir, pelo Teorema de Bolzano, que existe  $a \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$  tal que  $h(a) = 0$ , ou seja, que a função  $h$  tem, pelo menos, um zero em  $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ .

C.A.

$$f'(x) = (e^{x-1})' = (x-1)'e^{x-1} = 1 \times e^{x-1} = e^{x-1}$$

$$g'(x) = (\sin x)' = \cos x$$

$$h(0) = f'(0) - g'(0) = e^{0-1} - \cos(0) = e^{-1} - 1 \approx -0,63$$

$$h\left(\frac{\pi}{2}\right) = f'\left(\frac{\pi}{2}\right) - g'\left(\frac{\pi}{2}\right) = e^{\frac{\pi}{2}-1} + \cos\frac{\pi}{2} = e^{\frac{\pi}{2}-1} + 0 \approx 1,77$$

99.2. Como ficou provado no item anterior, existe  $a \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$  tal que  $h(a) = 0$ , logo

$$h(a) = 0 \Leftrightarrow f'(a) - g'(a) = 0 \Leftrightarrow f'(a) = g'(a)$$

Ou seja, existe  $a \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$  tal que as derivadas de  $f$  e  $g$  nos pontos de abscissa  $a$  são iguais, ou seja, os declives das retas tangentes aos gráficos das funções  $f$  e  $g$  nos pontos de abscissa  $a$  são iguais, o que significa que essas retas são paralelas.

Exame – 2007, 1.ª fase

100. Considerando o lado  $[OC]$  como a base do triângulo ( $\overline{OC} = 1$ ), a altura será o segmento que contém o ponto  $P$  e a sua projeção ortogonal ( $P'$ ) sobre a reta  $OC$ .

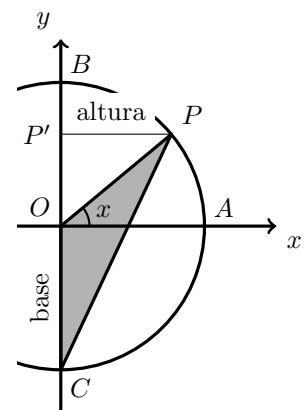
Como  $\overline{OP} = 1$ , recorrendo à definição de cosseno, vem:

$$\cos x = \frac{\overline{PP'}}{\overline{OP}} \Leftrightarrow \cos x = \frac{\overline{PP'}}{1} \Leftrightarrow \overline{PP'} = \cos x$$

Assim a área do triângulo  $[OPC]$  é:

$$A_{[OPC]} = \frac{\overline{OC} \times \overline{PP'}}{2} = \frac{1 \times \cos x}{2} = \frac{\cos x}{2}$$

Resposta: **Opção B**



Exame – 2006, Ép. especial



101.

- 101.1. Como o período de uma função trigonométrica pode ser calculado como a diferença das abscissas de dois máximizantes consecutivos, começamos por determinar a derivada da função:

$$f'(x) = (A + B \cos(Cx))' = (A)' + B(\cos(Cx))' = 0 + B(Cx)'(-\sin(Cx)) = -BC \sin(Cx)$$

Calculando os zeros da derivada temos:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -BC \sin(Cx) = 0 \Leftrightarrow \sin(Cx) = 0 \Leftrightarrow Cx = k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{C}, k \in \mathbb{Z}$$

Assim, como todos os zeros de  $f'$  estão associados a uma mudança de sinal, para cada valor de  $k$  verificamos a existência de um maximizante, ou de um minimizante.

Como os maximizantes e os minimizantes ocorrem alternadamente, se um valor de  $k$  gera um maximizante,  $k + 1$  gera um minimizante e  $k + 2$  gera outro maximizante.

Logo, para  $k$  e  $k + 2$  temos dois maximizantes (ou minimizantes) consecutivos, pelo que o período da função pode ser calculado como:

$$\frac{(k+2)\pi}{C} - \frac{k\pi}{C} = \frac{(k+2)\pi - k\pi}{C} = \frac{k\pi + 2\pi - k\pi}{C} = \frac{2\pi}{C}$$

- 101.2. Como o período da função é a diferença entre dois maximizantes consecutivos, e a distância do ancoradouro ao fundo do rio ocorre a cada maré alta, o período desta função é  $12 - 0 = 12$ .

Por outro lado, como o período desta função é  $\frac{2\pi}{C}$  temos que:

$$\frac{2\pi}{C} = 12 \Leftrightarrow \frac{2\pi}{12} = C \Leftrightarrow \frac{\pi}{6} = C$$

Assim temos que a função a função é do tipo  $f(x) = A + B \cos\left(\frac{\pi}{6} \times x\right)$

Como a distância ao fundo do rio era máxima às zero horas, e a distância máxima foi de 17 metros, temos que

$$f(0) = 17 \Leftrightarrow A + B \cos\left(\frac{\pi}{6} \times 0\right) = 17 \Leftrightarrow A + B \cos(0) = 17 \Leftrightarrow A + B \times 1 = 17 \Leftrightarrow A + B = 17$$

Por outro lado, como a distância era mínima às 6 horas, e o mínimo da função é 11, temos:

$$f(6) = 11 \Leftrightarrow A + B \cos\left(\frac{\pi}{6} \times 6\right) = 11 \Leftrightarrow A + B \cos(\pi) = 11 \Leftrightarrow A + B \times (-1) = 11 \Leftrightarrow A - B = 11$$

Logo, temos que

$$\begin{cases} A + B = 17 \\ A - B = 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 11 + B + B = 17 \\ A = 11 + B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2B = 17 - 11 \\ A = 11 + B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B = \frac{6}{2} \\ A = 11 + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B = 3 \\ A = 14 \end{cases}$$

Pelo que, os valores dos parâmetros adequados ao modelo são  $A = 14$ ,  $B = 3$  e  $C = \frac{\pi}{6}$ .

Exame – 2006, Ép. especial

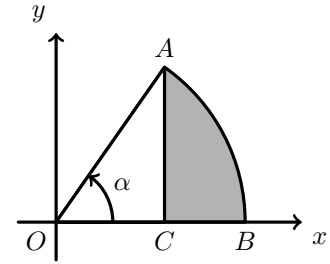


102. Como o arco  $BA$  é um arco de uma circunferência de raio 1, e com amplitude  $\alpha$ , tem de comprimento  $\alpha$ .

Como  $\overline{OA} = 1$ , e recorrendo às definições de seno e cosseno, vem:

$$\sin \alpha = \frac{\overline{AC}}{\overline{OA}} \Leftrightarrow \sin \alpha = \frac{\overline{AC}}{1} \Leftrightarrow \overline{AC} = \sin \alpha$$

$$\cos \alpha = \frac{\overline{OC}}{\overline{OA}} \Leftrightarrow \cos \alpha = \frac{\overline{OC}}{1} \Leftrightarrow \overline{OC} = \cos \alpha$$



$$\text{Logo, } \overline{OB} = \overline{OC} + \overline{CB} \Leftrightarrow 1 = \cos \alpha + \overline{CB} \Leftrightarrow \overline{CB} = 1 - \cos \alpha$$

Assim, o perímetro da região sombreada é:

$$P = \alpha + \overline{AC} + \overline{CB} = \alpha + \sin \alpha + 1 - \cos \alpha = 1 + \alpha + \sin \alpha - \cos \alpha$$

Resposta: **Opção D**

Exame – 2006, 2.ª Fase

103.

- 103.1. Como o *periélio* é o ponto da órbita da Terra mais próximo do Sol, é nesse ponto que a distância é mínima. Nesse ponto o ângulo  $x$  tem amplitude zero radianos, logo a distância mínima, em milhões de quilómetros arredondados às décimas, é:

$$d(0) = 149,6(1 - 0,0167 \cos 0) = 149,6(1 - 0,0167 \times 1) \approx 147,1$$

Analogamente, o ponto da órbita da Terra oposto ao *periélio* será o mais afastado do Sol, e é nesse ponto que a distância é máxima. Nesse ponto o ângulo  $x$  tem amplitude  $\pi$  radianos, logo a distância máxima, em milhões de quilómetros arredondados às décimas, é:

$$d(\pi) = 149,6(1 - 0,0167 \cos \pi) = 149,6(1 - 0,0167 \times (-1)) \approx 152,1$$

- 103.2. Se  $x = \pi$ , da relação  $\frac{2\pi t}{T} = x - 0,0167 \sin x$  resulta:

$$\frac{2\pi t}{T} = \pi - 0,0167 \sin \pi \Leftrightarrow \frac{2\pi t}{T} = \pi - 0,0167 \times 0 \Leftrightarrow \frac{2\pi t}{T} = \pi \Leftrightarrow t = \frac{\pi \times T}{2\pi} \Leftrightarrow t = \frac{T}{2}$$

No contexto da situação descrita, quando o ângulo  $x$  tem uma amplitude de  $\pi$  radianos, o tempo ( $t$ ) que decorreu da passagem da Terra pelo *periélio* é metade do tempo ( $T$ ) que a Terra demora a descrever uma órbita completa.

Exame – 2006, 2.ª Fase

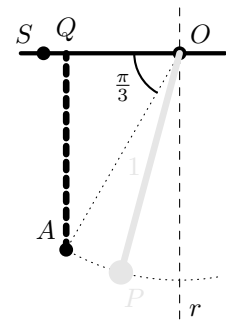
104.

- 104.1. No instante inicial ( $t = 0$ ) a amplitude do ângulo  $SOP$  é dada por:

$$\alpha(0) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} \cos(\sqrt{9,8} \times 0) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} \cos 0 = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} = \frac{3\pi}{6} - \frac{\pi}{6} = \frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$$

Assim, considerando o ponto  $Q$ , como a projeção ortogonal do ponto  $A$  sobre a reta  $OS$ , temos que a amplitude do ângulo  $QOA$  é  $\frac{\pi}{3}$  radianos, e a distância do centro da esfera à reta  $OS$  é  $\overline{QA}$ . Logo:

$$\sin \frac{\pi}{3} = \frac{\overline{QA}}{\overline{OA}} \Leftrightarrow \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\overline{QA}}{1} \Leftrightarrow \overline{QA} = \sin \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \overline{QA} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$



- 104.2. Quando o ponto  $P$  passa na reta  $r$  temos  $\alpha = \frac{\pi}{2}$ . Logo valor de  $t$  que corresponde ao instante em que o ponto  $P$  passa na reta  $r$ , pela primeira vez, é a menor solução positiva da equação  $\alpha(t) = \frac{\pi}{2}$ . Resolvendo a equação vem:

$$\begin{aligned}\alpha(t) = \frac{\pi}{2} &\Leftrightarrow \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} \cos(\sqrt{9,8}t) = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow -\frac{\pi}{6} \cos(\sqrt{9,8}t) = 0 \Leftrightarrow \cos(\sqrt{9,8}t) = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \sqrt{9,8}t = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow t = \frac{\frac{\pi}{2} + k\pi}{\sqrt{9,8}}, k \in \mathbb{Z}\end{aligned}$$

Logo, a menor solução positiva da equação corresponde a  $k = 0$ , ou seja,  $t = \frac{\frac{\pi}{2}}{\sqrt{9,8}} \approx 0,5$

Ou seja, o ponto  $P$  passa na reta  $r$ , pela primeira vez, aproximadamente, meio segundo depois do instante inicial.

Exame – 2006, 1.ª Fase

105.

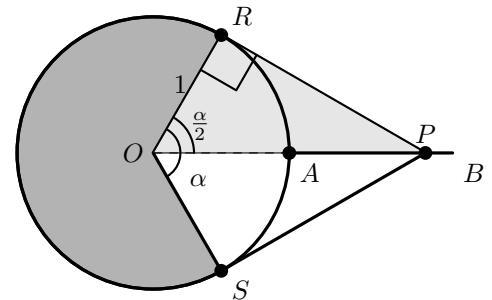
- 105.1. Como a reta  $PR$  é tangente à circunferência no ponto  $R$ , é perpendicular ao raio  $[OR]$ , ou seja o ângulo  $ORP$  é reto, e por isso o triângulo  $[ORP]$  é retângulo.

Como o ângulo  $POR$  tem amplitude  $\frac{\alpha}{2}$  radianos e  $\overline{OR} = 1$ , recorrendo à definição de tangente, temos:

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{\overline{RP}}{\overline{OR}} \Leftrightarrow \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{\overline{RP}}{1} \Leftrightarrow \overline{RP} = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$$

Logo, considerando  $[OR]$  como a base do triângulo  $[ORP]$  e  $[RP]$  como a altura, vem:

$$A_{[ORP]} = \frac{\overline{OR} \times \overline{RP}}{2} = \frac{1 \times \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{2} = \frac{\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{2}$$



Como os pontos  $R$  e  $S$  são simétricos relativamente à reta  $AB$ , temos que:

$$A_{[ORPS]} = A_{[ORP]} + A_{[OPS]} = 2 \times A_{[ORP]} = 2 \times \frac{\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{2} = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$$

Ou seja, para cada valor de  $\alpha \in ]0, \pi[$ , a área do quadrilátero  $[ORPS]$  é dada por  $f(\alpha)$

105.2.

$$\lim_{\alpha \rightarrow \pi^-} f(\alpha) = \lim_{\alpha \rightarrow \pi^-} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \operatorname{tg} \frac{\pi^-}{2} = +\infty$$

Quando o ângulo  $\alpha$  se aproxima arbitrariamente de  $\pi$ , as retas tangentes  $PR$  e  $PS$ , intersectam a reta  $AB$  num ponto arbitrariamente afastado de  $A$ , o que significa que as áreas dos triângulos  $[ORP]$  e  $[OPS]$ , e consequentemente a área do quadrilátero  $[ORPS]$ , são arbitrariamente grandes.

Exame – 2005, Ép. especial (cód. 435)

106.

- 106.1. O declive de uma reta tangente é dado pelo valor da derivada na abcissa do ponto de tangência.

Como  $f'(x) = (\sin x)' = \cos x$ , temos:

$$m_r = f'(a) = \cos a \quad \text{e} \quad m_s = f'(b) = \cos b$$

Como  $a + b = 2\pi \Leftrightarrow a = 2\pi - b$ , temos que:

$$m_r = f'(a) = \cos a = \cos(2\pi - b) = \cos(-b) = \cos(b) = f'(b) = m_s$$

Logo, as retas  $r$  e  $s$  têm declives iguais, ou seja, são paralelas.





106.2. Como o domínio da função  $g$  é  $]0, \pi[ \cup ]\pi, 2\pi[$ , o gráfico de  $g$  não tem qualquer assíntota não vertical.

Como a função  $g$  resulta do quociente de duas funções contínuas, é contínua no seu domínio, isto é, as retas  $x = 0$ ,  $x = \pi$  e  $x = 2\pi$  são as três únicas retas que podem ser assíntotas verticais do gráfico de  $g$ .

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\frac{\sin x}{x}} = \frac{1}{\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x}} = \frac{1}{1} = 1$$

(limite notável)

Logo, a reta  $x = 0$  **não é** uma assíntota vertical do gráfico de  $g$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow \pi^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow \pi^-} \frac{x}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow \pi^-} \frac{x}{\sin x} = \frac{\pi^-}{\sin(\pi^-)} = \frac{\pi^-}{0^+} = +\infty$$

Logo, a reta  $x = \pi$  **é** uma assíntota vertical do gráfico de  $g$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 2\pi^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 2\pi^-} \frac{x}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow 2\pi^-} \frac{x}{\sin x} = \frac{2\pi^-}{\sin(2\pi^-)} = \frac{2\pi^-}{0^-} = -\infty$$

Logo, a reta  $x = 2\pi$  **é** uma assíntota vertical do gráfico de  $g$

Assim, o gráfico de  $g$  tem exatamente duas assíntotas: as retas verticais  $x = \pi$  e  $x = 2\pi$

Exame – 2005, 2.ª Fase (cód. 435)

107. Recorrendo à definição de derivada no ponto de abscissa  $\pi$ , temos que:

$$f'(\pi) = \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{f(x) - f(\pi)}{x - \pi} = \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\cos x - \cos \pi}{x - \pi} = \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\cos x - (-1)}{x - \pi} = \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\cos x + 1}{x - \pi}$$

Resposta: **Opção A**

Exame – 2005, 1.ª fase (cód. 435)

108. Como  $\overline{OB} = 3$ , recorrendo à definição de seno e cosseno temos:

$$\sin x = \frac{\overline{OI}}{\overline{OB}} \Leftrightarrow \sin x = \frac{\overline{OI}}{3} \Leftrightarrow \overline{OI} = 3 \sin x$$

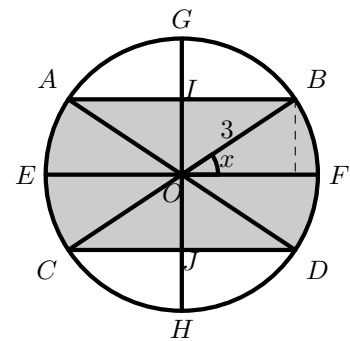
$$\cos x = \frac{\overline{BI}}{\overline{OB}} \Leftrightarrow \cos x = \frac{\overline{BI}}{3} \Leftrightarrow \overline{BI} = 3 \cos x$$

Recorrendo à decomposição sugerida na figura temos que a área da zona sombreada pode ser obtida através da soma das áreas de 4 triângulos congruentes e de 4 setores circulares de raio 3 e amplitude  $x$ :

$$A = 4 \times A_{[OIB]} + 4 \times A_{\text{setor } FB} = 4 \times \frac{\overline{OI} \times \overline{BI}}{2} + 4 \times \frac{x \times \overline{OB}^2}{2} = 4 \times \frac{3 \sin x \times 3 \cos x}{2} + 4 \times \frac{x \times 3^2}{2} =$$

$$= 2 \times 9 \sin x \cdot \cos x + 2 \times x \times 9 = 18x + 18 \sin x \cdot \cos x = 18(x + \sin x \cdot \cos x)$$

Logo, para cada valor de  $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ , a área da região sombreada é dada pela função  $A$ .



Exame – 2005, 1.ª Fase (cód. 435)



109.

109.1. Substituindo os valores de  $\lambda$  e  $\phi$  na fórmula, vem:

$$\begin{aligned} \cos(7,5t) &\approx -\frac{\operatorname{tg} 38}{\operatorname{tg} 66,5} \Leftrightarrow \cos(7,5t) \approx -0,3397 \Leftrightarrow 7,5t \approx \cos^{-1}(-0,3397) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 7,5t \approx 109,8594 \Leftrightarrow t \approx \frac{109,8594}{7,5} \Leftrightarrow t \approx 14,6479 \end{aligned}$$

Logo, convertendo 0,6479 horas em minutos vem  $0,6479 \times 60 \approx 38,8750 \approx 39$ 

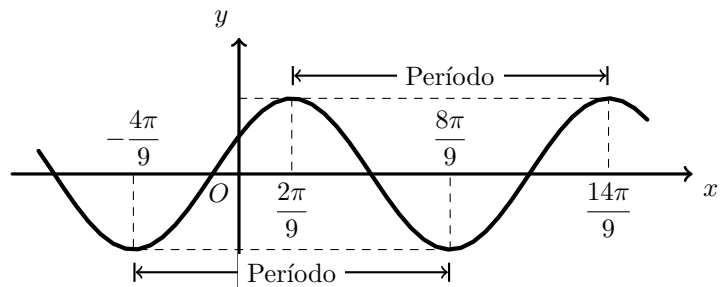
Ou seja, em Beja, no Solstício de Junho, o tempo que decorre entre o nascer e o pôr do Sol é de 14 horas e 39 minutos.

109.2. Como  $\phi$  é a latitude do círculo polar ártico, para locais situados mais a norte,  $\lambda > \phi$ , e logo  $\operatorname{tg} \lambda > \operatorname{tg} \phi$  (porque  $\lambda \in ]66,5^\circ, 90^\circ[$  e  $\phi \approx 66,5$ ).Assim, para locais situados a norte do círculo polar ártico,  $\frac{\operatorname{tg} \lambda}{\operatorname{tg} \phi} > 1 \Leftrightarrow -\frac{\operatorname{tg} \lambda}{\operatorname{tg} \phi} < -1$ Logo a substituição dos valores na fórmula  $\cos(7,5t) \approx -\frac{\operatorname{tg} \lambda}{\operatorname{tg} \phi}$  resultaria numa equação impossível, porque  $\cos(x) \geq -1$ 

Exame – 2004, Ép. especial (cód. 435)

110. O período ( $P$ ) da função pode ser calculado, por exemplo, como a distância entre dois maximizantes consecutivos.

$$P = \frac{14\pi}{9} - \frac{2\pi}{9} = \frac{12\pi}{9} = \frac{4\pi}{3}$$

Resposta: **Opção D**

Exame – 2004, 2.ª Fase (cód. 435)

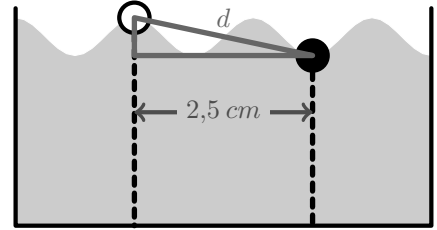
111.

111.1. Os instantes em que as duas bolas estiveram a igual distância da base do recipiente, durante os primeiros cinco segundos, são as soluções da equação  $b(t) = p(t)$  que pertencem ao intervalo  $[0,5]$ . Assim, resolvendo a equação, vem:

$$\begin{aligned} b(t) = p(t) &\Leftrightarrow 10 + e^{-0,1t} \operatorname{sen}(\pi t) = 10 - 1,37e^{-0,1t} \operatorname{sen}(\pi t) \Leftrightarrow e^{-0,1t} \operatorname{sen}(\pi t) = -1,37e^{-0,1t} \operatorname{sen}(\pi t) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow e^{-0,1t} \operatorname{sen}(\pi t) + 1,37e^{-0,1t} \operatorname{sen}(\pi t) = 0 \Leftrightarrow \operatorname{sen}(\pi t)(e^{-0,1t} + 1,37e^{-0,1t}) = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \operatorname{sen}(\pi t) = 0 \vee \underbrace{e^{-0,1t}(1 + 1,37)}_{\text{(equação impossível)}} = 0 \Leftrightarrow \operatorname{sen}(\pi t) = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \pi t = k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow t = k, k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Logo as soluções da equação no intervalo  $[0,5]$  são  $x = 0$  (para  $k = 0$ ),  $x = 1$  (para  $k = 1$ ),  $x = 2$  (para  $k = 2$ ),  $x = 3$  (para  $k = 3$ ),  $x = 4$  (para  $k = 4$ ) e  $x = 5$  (para  $k = 5$ ), ou seja, neste intervalo a equação tem 6 soluções, o que significa que nos primeiros 5 segundos, as duas bolas estiveram a igual distância da base do recipiente por **seis vezes**.

- 111.2. A distância  $d$  entre os centros das bolas, é o comprimento da hipotenusa de um triângulo retângulo em que o cateto maior tem comprimento  $2,5 \text{ cm}$  e o cateto menor tem comprimento  $|b(\frac{1}{2}) - p(\frac{1}{2})|$



Assim, determinando a diferença das distâncias das duas bolas à base do recipiente, passado meio segundo, temos:

$$b\left(\frac{1}{2}\right) = 10 + e^{-0,1 \times \frac{1}{2}} \operatorname{sen}\left(\pi \times \frac{1}{2}\right) = 10 + e^{-0,05} \times 1 \approx 10,95$$

$$p\left(\frac{1}{2}\right) = 10 - 1,37e^{-0,1 \times \frac{1}{2}} \operatorname{sen}\left(\pi \times \frac{1}{2}\right) = 10 - 1,37e^{-0,05} \times 1 \approx 8,70$$

Como  $b(\frac{1}{2}) - p(\frac{1}{2}) \approx 10,95 - 8,70 \approx 2,25$ , recorrendo ao Teorema de Pitágoras, vem:

$$d^2 = 2,25^2 + 2,5^2 \Leftrightarrow d^2 = 11,3125 \Leftrightarrow d = \sqrt{11,3125} \Rightarrow d \approx 3,4$$

Logo a distância, arredondada às décimas, entre os centros das duas bolas, passado meio segundo é de  $3,4 \text{ cm}$

Exame – 2004, 2.ª Fase (cód. 435)

112.

- 112.1. Se o depósito ficar completamente cheio,  $x = 2\pi$ , logo podemos calcular a capacidade total do depósito, calculando a imagem de  $2\pi$ :

$$V(2\pi) = 80(2\pi - \operatorname{sen}(2\pi)) = 80(2\pi - 0) \approx 502,655 \approx 503$$

Ou seja, o depósito tem uma capacidade de  $503 \text{ m}^3$ , aproximadamente.

- 112.2. Como  $\frac{1}{4}$  da altura máxima, corresponde a metade do raio; considerando o ângulo de amplitude  $\frac{x}{2}$  e recorrendo à definição de cosseno, vem

$$\cos\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{\frac{r}{2}}{r} \Leftrightarrow \cos\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{r}{2r} \Leftrightarrow \cos\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(\frac{x}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow \frac{x}{2} = \pm \frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \pm \frac{2\pi}{3} + 4k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Como  $x \in [0, 2\pi]$ , a única solução da equação é  $x = \frac{2\pi}{3}$ .

Assim, o volume associado é:

$$V\left(\frac{2\pi}{3}\right) = 80\left(\frac{2\pi}{3} - \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right) = 80\left(\frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \approx 98,2696 \approx 98$$

Ou seja, quando nível de combustível está a  $\frac{1}{4}$  da altura máxima, o volume é de  $98 \text{ m}^3$ , aproximadamente.

Exame – 2004, 1.ª Fase (cód. 435)



113.

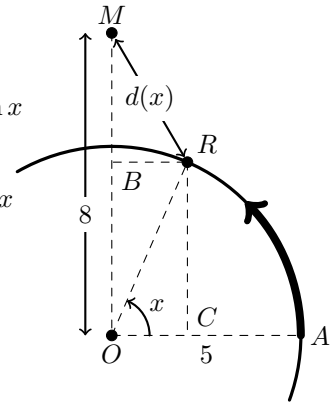
113.1. Como  $\overline{OR} = 5$ , recorrendo à definição de seno e cosseno, e notando que  $\overline{CR} = \overline{OB}$  e ainda que  $\overline{OC} = \overline{BR}$ , temos:

$$\sin x = \frac{\overline{CR}}{\overline{OR}} \Leftrightarrow \sin x = \frac{\overline{CR}}{5} \Leftrightarrow \overline{CR} = 5 \sin x \Leftrightarrow \overline{OB} = 5 \sin x$$

$$\cos x = \frac{\overline{OC}}{\overline{OR}} \Leftrightarrow \cos x = \frac{\overline{OC}}{5} \Leftrightarrow \overline{OC} = 5 \cos x \Leftrightarrow \overline{BR} = 5 \cos x$$

Temos ainda que:

$$\overline{OB} + \overline{BM} = 8 \Leftrightarrow \overline{BM} = 8 \Leftrightarrow \overline{BM} = 8 - \overline{OB} \Leftrightarrow \overline{BM} = 8 - 5 \sin x$$



Logo, usando o Teorema de Pitágoras, vem:

$$\overline{RM}^2 = \overline{BM}^2 + \overline{BR}^2 \Leftrightarrow \overline{RM}^2 = (8 - 5 \sin x)^2 + (5 \cos x)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \overline{RM}^2 = 64 - 80 \sin x + 25 \sin^2 x + 25 \cos^2 x \Leftrightarrow \overline{RM}^2 = 64 - 80 \sin x + 25(\sin^2 x + \cos^2 x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \overline{RM}^2 = 64 - 80 \sin x + 25(1) \Leftrightarrow \overline{RM}^2 = 64 + 25 - 80 \sin x \Leftrightarrow \overline{RM}^2 = 89 - 80 \sin x$$

Logo, para cada valor de  $x$ ,  $d(x) = \overline{RM} = \sqrt{89 - 80 \sin x}$

113.2.

$$d\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sqrt{89 - 80 \sin \frac{\pi}{2}} = \sqrt{89 - 80 \times 1} = \sqrt{9} = 3$$

Ou seja, quando o ângulo  $x$  tem amplitude  $\frac{\pi}{2}$  radianos, a distância entre a Rita e a mãe, é de 3 metros, o que se pode comprovar na figura, porque quando o ângulo  $x$  tem amplitude  $\frac{\pi}{2}$  radianos, a posição da Rita está sobre o segmento de reta  $[MO]$ , e por isso

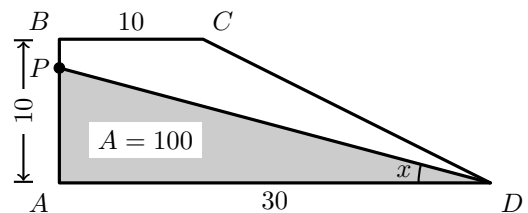
$$\overline{RM} = \overline{OM} - \overline{OR} \Leftrightarrow \overline{RM} = 8 - 5 \Leftrightarrow \overline{RM} = 3$$

Exame – 2003, Prova para militares (cód. 435)

114. Calculando a área do trapézio, temos:

$$A_{[ABCD]} = \frac{\overline{AD} + \overline{BC}}{2} \times \overline{AB} = \frac{30 + 10}{2} \times 10 = 20 \times 10 = 200$$

Logo, dividir o trapézio em duas figuras com a mesma área, significa que o triângulo  $[APD]$  terá área 100.



Usando a definição de tangente vem:

$$\operatorname{tg} x = \frac{\overline{PA}}{\overline{AD}} \Leftrightarrow \operatorname{tg} x = \frac{\overline{PA}}{30} \Leftrightarrow \overline{PA} = 30 \operatorname{tg} x$$

$$\text{Logo a área do triângulo } [APD], \text{ é: } A_{[APD]} = \frac{\overline{AD} \times \overline{PA}}{2} = \frac{30 \times 30 \operatorname{tg} x}{2} = \frac{30^2 \operatorname{tg} x}{2}$$

$$\text{Ou seja, } A_{[APD]} = 100 \Leftrightarrow \frac{30^2 \operatorname{tg} x}{2} = 100$$

Resposta: **Opção B**

Exame – 2003, 2.ª Fase (cód. 435)



115.

115.1.

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \operatorname{sen} x - (0 + \operatorname{sen} 0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \operatorname{sen} x - 0}{x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{x}{x} + \frac{\operatorname{sen} x}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left( 1 + \frac{\operatorname{sen} x}{x} \right) = 1 + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1 + 1 = 2 \\ &\hspace{15em} (\text{limite notável}) \end{aligned}$$

115.2. Para estudar o sentido das concavidades e a existência de pontos de inflexão, começamos por determinar a expressão da primeira derivada e depois da segunda derivada:




$$f'(x) = (x + \operatorname{sen} x)' = (x)' + (\operatorname{sen} x)' = 1 + \cos x$$

$$f''(x) = (f'(x))' = (1 + \cos x)' = (1)' + (\cos x)' = 0 + (-\operatorname{sen} x) = -\operatorname{sen} x$$

Determinando os zeros da segunda derivada, vem:

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow -\operatorname{sen} x = 0 \Leftrightarrow \operatorname{sen} x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Logo as duas soluções da equação que pertencem ao domínio da função  $\left( \left[ -\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right] \right)$  são  $x = 0$  e  $x = \pi$ , e assim, estudando a variação de sinal de  $f''$  e relacionando com o sentido das concavidades do gráfico de  $f$ , vem:

$x$	$-\frac{\pi}{2}$		0		$\pi$		$\frac{3\pi}{2}$
$f''$		+	0	-	0	+	
$f$			Pt. I.		Pt. I.		

Logo o gráfico de  $f$  tem:

- a concavidade voltada para cima no intervalo  $[-\frac{\pi}{2}, 0[$  e no intervalo  $]\pi, \frac{3\pi}{2}]$
- a concavidade voltada para baixo no intervalo  $]0, \pi[$
- dois pontos de inflexão de abscissas  $x = 0$  e  $x = \pi$

115.3.

$$\begin{aligned} f(x) = x + \cos x \Leftrightarrow x + \operatorname{sen} x = x + \cos x \Leftrightarrow \operatorname{sen} x = \cos x \Leftrightarrow \operatorname{sen} x = \operatorname{sen} \left( \frac{\pi}{2} - x \right) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} - x + 2k\pi \vee x = \pi - \frac{\pi}{2} - x + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \vee 2x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi \quad k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Logo os dois valores de  $x \in \left[ -\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right]$  que verificam a condição dada, são  $x = \frac{\pi}{4}$  e  $x = \frac{5\pi}{4}$

Exame - 2003, 2.ª Fase (cód. 435)

116.

116.1. Como  $a = 2$  e  $b = -5$ , temos que  $f(x) = 2 - 5 \operatorname{sen}^2 x$

- Como  $\operatorname{tg}^2 x + 1 = \frac{1}{\cos^2 x}$  e  $\operatorname{tg} \theta = \frac{1}{2}$ , vem:

$$\left( \frac{1}{2} \right)^2 + 1 = \frac{1}{\cos^2 \theta} \Leftrightarrow \frac{1}{4} + 1 = \frac{1}{\cos^2 \theta} \Leftrightarrow \frac{5}{4} = \frac{1}{\cos^2 \theta} \Leftrightarrow \cos^2 \theta = \frac{1}{5} \Leftrightarrow \cos^2 \theta = \frac{4}{5}$$

- Como  $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$  e  $\cos^2 \theta = \frac{4}{5}$ , vem:

$$\operatorname{sen}^2 \theta + \frac{4}{5} = 1 \Leftrightarrow \operatorname{sen}^2 \theta = 1 - \frac{4}{5} \Leftrightarrow \operatorname{sen}^2 \theta = \frac{5}{5} - \frac{4}{5} \Leftrightarrow \operatorname{sen}^2 \theta = \frac{1}{5}$$

Logo,  $f(\theta) = 2 - 5 \operatorname{sen}^2 \theta = 2 - 5 \left( \frac{1}{5} \right) = 2 - 1 = 1$



116.2. Como  $x = 0$  é um maximizante e 1 é o máximo, temos que:

$$f(0) = 1 \Leftrightarrow a + b \operatorname{sen}^2(0) = 1 \Leftrightarrow a + b \times 0 = 1 \Leftrightarrow a = 1$$

Como 0 e  $\pi$  são dois maximizantes consecutivos,  $x = \frac{\pi}{2}$  é um minimizante,  $-3$  é o mínimo e  $a = 1$ , temos que:

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = -3 \Leftrightarrow 1 + b \operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{2}\right) = -3 \Leftrightarrow 1 + b \times (1)^2 = -3 \Leftrightarrow b = -3 - 1 \Leftrightarrow b = -4$$

Logo  $a = 1$  e  $b = -4$

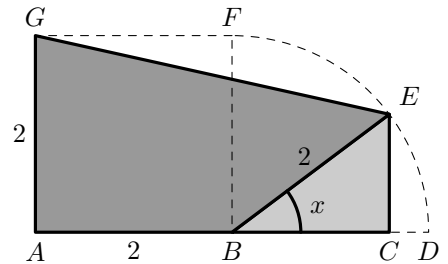
Exame - 2003, 1.ª fase - 2.ª chamada (cód. 435)

117.

117.1. Considerando o triângulo  $[BCE]$ , e recorrendo à definição de seno e cosseno, temos:

$$\operatorname{sen} x = \frac{\overline{CE}}{\overline{BE}} \Leftrightarrow \operatorname{sen} x = \frac{\overline{CE}}{2} \Leftrightarrow \overline{CE} = 2 \operatorname{sen} x$$

$$\operatorname{cos} x = \frac{\overline{BC}}{\overline{BE}} \Leftrightarrow \operatorname{cos} x = \frac{\overline{BC}}{2} \Leftrightarrow \overline{BC} = 2 \operatorname{cos} x$$



Logo, considerando a área da zona sombreada como a diferença das áreas do trapézio  $[ACEG]$  e do triângulo  $[BCE]$ , temos:

$$\begin{aligned} A_{[ABEG]} &= A_{[ACEG]} - A_{[BCE]} = \frac{\overline{AG} + \overline{CE}}{2} \times \overline{AC} - \frac{\overline{BC} \times \overline{CE}}{2} = \frac{2 + 2 \operatorname{sen} x}{2} \times (2 + \overline{BC}) - \frac{2 \operatorname{cos} x \times 2 \operatorname{sen} x}{2} = \\ &= (1 + \operatorname{sen} x) \times (2 + 2 \operatorname{cos} x) - \frac{4 \operatorname{sen} x \operatorname{cos} x}{2} = 2 + 2 \operatorname{cos} x + 2 \operatorname{sen} x + 2 \operatorname{sen} x \operatorname{cos} x - 2 \operatorname{sen} x \operatorname{cos} x = \\ &= 2 + 2 \operatorname{sen} x + 2 \operatorname{cos} x = 2(1 + \operatorname{sen} x + \operatorname{cos} x) \end{aligned}$$

Logo, para cada valor de  $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ , a área do polígono  $[ABEG]$  é dada por  $A(x) = 2(1 + \operatorname{sen} x + \operatorname{cos} x)$

- 117.2. •  $A(0) = 2(1 + \operatorname{sen}(0) + \operatorname{cos}(0)) = 2(1 + 0 + 1) = 2 \times 2 = 4$   
 O que também pode ser observado na figura, porque se  $x = 0$ , o ponto  $E$  coincide com o ponto  $D$ , e por isso a área sombreada também pode ser calculada como a área do triângulo  $[AGD]$ :

$$A_{[AGD]} = \frac{\overline{AG} \times \overline{AD}}{2} = \frac{4 \times 2}{2} = 4$$

- $A\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2\left(2(1 + \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) + \operatorname{cos}\left(\frac{\pi}{2}\right))\right) = 2(1 + 1 + 0) = 2 \times 2 = 4$   
 O que também pode ser observado na figura, porque se  $x = \frac{\pi}{2}$ , o ponto  $E$  coincide com o ponto  $F$ , e por isso a área sombreada também pode ser calculada como a área do quadrado  $[ABFG]$ :

$$A_{[ABFG]} = \overline{AB} \times \overline{AG} = 2 \times 2 = 4$$

Exame - 2003, 1.ª fase - 1.ª chamada (cód. 435)



118.

118.1. Como a área da superfície terrestre é dada por  $A_{Esfera} = 4\pi r^2$ , logo  $\frac{1}{4}A_{Esfera} = \frac{4\pi r^2}{4} = \pi r^2$ . Assim, pretendemos determinar o valor de  $\theta$  tal que:

$$\begin{aligned} f(\theta) = \pi r^2 &\Leftrightarrow 2\pi r^2(1 - \operatorname{sen} \theta) = \pi r^2 \Leftrightarrow 1 - \operatorname{sen} \theta = \frac{\pi r^2}{2\pi r^2} \Leftrightarrow 1 - \operatorname{sen} \theta = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow -\operatorname{sen} \theta = \frac{1}{2} - 1 \Leftrightarrow -\operatorname{sen} \theta = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \operatorname{sen} \theta = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \operatorname{sen} \theta = \operatorname{sen} \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee \theta = \pi - \frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

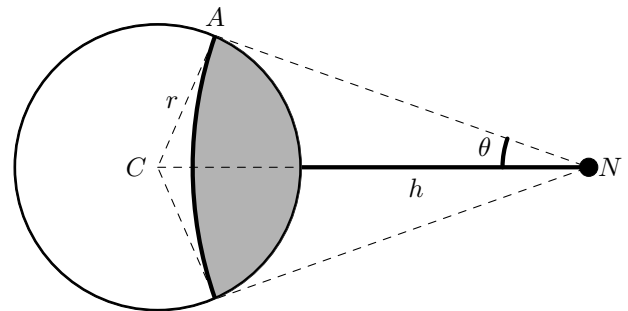
Como  $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ , a única solução da equação é  $\theta = \frac{\pi}{6}$

Ou seja, para que a superfície visível da nave seja um quarto da superfície terrestre, o ângulo  $\theta$  deve ter amplitude de  $\frac{\pi}{6}$  radianos.

118.2. Considerando o triângulo  $[CAN]$ , e a definição de seno, vem:

$$\operatorname{sen} \theta = \frac{\overline{CA}}{\overline{CN}} \Leftrightarrow \operatorname{sen} \theta = \frac{r}{r+h}$$

Logo, determinando a área visível a partir da nave, em função de  $h$ , vem:



$$g(h) = f(\theta) = 2\pi r^2(1 - \operatorname{sen} \theta) = 2\pi r^2 \left(1 - \frac{r}{r+h}\right) = 2\pi r^2 \left(\frac{r+h}{r+h} - \frac{r}{r+h}\right) = 2\pi r^2 \left(\frac{h}{r+h}\right) = \frac{2\pi r^2 h}{r+h}$$

118.3.

$$\lim_{h \rightarrow +\infty} g(h) = \lim_{h \rightarrow +\infty} \frac{2\pi r^2 h}{r+h} = 2\pi r^2 \lim_{h \rightarrow +\infty} \frac{h}{r+h} = 2\pi r^2 \frac{\lim_{h \rightarrow +\infty} h}{\lim_{h \rightarrow +\infty} (r+h)} = 2\pi r^2 \frac{\lim_{h \rightarrow +\infty} h}{\lim_{h \rightarrow +\infty} h} = 2\pi r^2 \times 1 = 2\pi r^2$$

Logo, quando a distância da nave à Terra é arbitrariamente grande, a área da superfície terrestre visível da nave, aproxima-se de  $2\pi r^2$ , ou seja, de metade da área total da superfície da Terra.

Exame – 2002, Prova para militares (cód. 435)

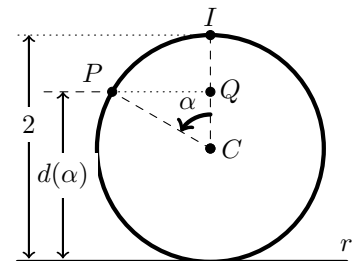
119. Considerando o ponto  $I$  como a posição inicial do ponto  $P$ , e o ponto  $Q$  como a projeção ortogonal do ponto  $P$  sobre a reta  $IC$ , pela definição de cosseno vem:

$$\cos \alpha = \frac{\overline{CQ}}{\overline{CP}} \Leftrightarrow \cos \alpha = \frac{\overline{CQ}}{1} \Leftrightarrow \overline{CQ} = \cos \alpha$$

Como  $\overline{CQ} + \overline{QI} = 1 \Leftrightarrow \overline{QI} = 1 - \overline{CQ} \Leftrightarrow \overline{QI} = 1 - \cos \alpha$ , temos que:

$$\begin{aligned} d(\alpha) = 2 - \overline{QI} &\Leftrightarrow d(\alpha) = 2 - (1 - \cos \alpha) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow d(\alpha) = 2 - 1 + \cos \alpha \Leftrightarrow d(\alpha) = 1 + \cos \alpha \end{aligned}$$

Resposta: **Opção A**



Exame – 2002, 2.ª fase (cód. 435)



120. Considerando o ponto  $P$  como intersecção da reta  $AB$  com o eixo  $Ox$  e usando a definição de seno e cosseno temos que:

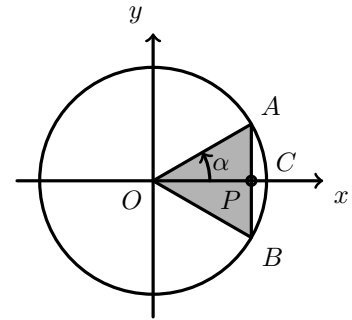
$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{\overline{AP}}{\overline{OA}} \Leftrightarrow \operatorname{sen} \alpha = \frac{\overline{AP}}{1} \Leftrightarrow \overline{AP} = \operatorname{sen} \alpha$$

$$\operatorname{cos} \alpha = \frac{\overline{OP}}{\overline{OA}} \Leftrightarrow \operatorname{cos} \alpha = \frac{\overline{OP}}{1} \Leftrightarrow \overline{OP} = \operatorname{cos} \alpha$$

Assim, considerando  $[AB]$  como a base e  $[OP]$  como a altura, a área do triângulo  $[OAB]$  é:

$$A_{[OAB]} = \frac{\overline{AB} \times \overline{OP}}{2} = \frac{2 \times \overline{AP} \times \overline{OP}}{2} = \overline{AP} \times \overline{OP} = \operatorname{sen} \alpha \cdot \operatorname{cos} \alpha$$

Resposta: **Opção A**



Exame – 2002, 1.ª fase - 2.ª chamada (cód. 435)

121.

- 121.1. Como  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x}$  é a definição de derivada no ponto de abscissa 0, temos que:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = f'(0) = 0 + 2 \operatorname{cos}(0) = 2 \times 1 = 2$$

- 121.2. Para estudar o sentido das concavidades, começamos por determinar a expressão da segunda derivada:

$$f''(x) = (f'(x))' = (x + 2 \operatorname{cos} x)' = (x)' + (2 \operatorname{cos} x)' = 1 + 2(\operatorname{cos} x)' = 1 + 2(-\operatorname{sen} x) = 1 - 2 \operatorname{sen} x$$

Determinando os zeros da segunda derivada vem:

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - 2 \operatorname{sen} x = 0 \Leftrightarrow -2 \operatorname{sen} x = -1 \Leftrightarrow \operatorname{sen} x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \operatorname{sen} x = \operatorname{sen} \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee x = \pi - \frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Como o domínio de  $f$  ( e portanto também de  $f''$  ) é  $[-\pi, \pi]$ , as únicas soluções da equação, ou seja os únicos zeros da derivada, são:  $x = \frac{\pi}{6}$  e  $x = \frac{5\pi}{6}$ , e assim, estudando a variação de sinal de  $f''$  para o relacionar com o sentido das concavidades do gráfico de  $f$ , vem:

$x$	$-\pi$		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{5\pi}{6}$		$\pi$
$f''$		+	0	-	0	+	
$f$			Pt. I.		Pt. I.		

Logo o gráfico de  $f$  tem:

- a concavidade voltada para cima no intervalo  $[-\pi, \frac{\pi}{6}]$  e no intervalo  $[\frac{5\pi}{6}, \pi]$
- a concavidade voltada para baixo no intervalo  $[\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}]$
- 2 pontos de inflexão de abscissas  $x = \frac{\pi}{6}$  e  $x = \frac{5\pi}{6}$

Exame – 2002, 1.ª fase - 2.ª chamada (cód. 435)





122.

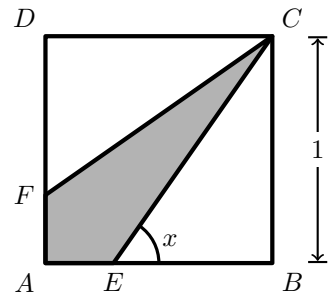
122.1. Usando as definições de seno e tangente, vem:

$$\operatorname{sen} x = \frac{\overline{BC}}{\overline{EC}} \Leftrightarrow \operatorname{sen} x = \frac{1}{\overline{EC}} \Leftrightarrow \overline{EC} = \frac{1}{\operatorname{sen} x}$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{\overline{BC}}{\overline{EB}} \Leftrightarrow \operatorname{tg} x = \frac{1}{\overline{EB}} \Leftrightarrow \overline{EB} = \frac{1}{\operatorname{tg} x}$$

Sabemos ainda que

$$\overline{AE} + \overline{EB} = 1 \Leftrightarrow \overline{AE} = 1 - \overline{EB} \Leftrightarrow \overline{AE} = 1 - \frac{1}{\operatorname{tg} x}$$

Assim, como  $\overline{FC} = \overline{EC}$  e  $\overline{AF} = \overline{AE}$ , calculando o perímetro do quadrilátero  $[CEAF]$ , vem:

$$P_{[CEAF]} = 2 \times \overline{AE} + 2 \times \overline{EC} = 2 \times \left(1 - \frac{1}{\operatorname{tg} x}\right) + 2 \times \frac{1}{\operatorname{sen} x} = 2 - \frac{2}{\operatorname{tg} x} + \frac{2}{\operatorname{sen} x}$$

Ou seja, para cada valor de  $x \in \left] \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2} \right[$  o perímetro do quadrilátero é dado pela função  $f$ 

122.2.

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \left(2 - \frac{2}{\operatorname{tg} x} + \frac{2}{\operatorname{sen} x}\right) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} 2 - \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{2}{\operatorname{tg} x} + \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{2}{\operatorname{sen} x} = 2 - \frac{2}{+\infty} + \frac{2}{1} = 2 - 0 + 2 = 4$$

Ou seja, quando o ângulo  $x$  toma valores arbitrariamente próximos de  $\frac{\pi}{2}$ , o perímetro do quadrilátero é 4, porque, como se pode ver na figura, quando  $x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-$ , a posição do ponto  $E$  é praticamente coincidente com o ponto  $B$ , ou seja o quadrilátero  $[CEAF]$ , praticamente coincide com o quadrado  $[ABCD]$ , que tem perímetro 4.

122.3.

$$\begin{aligned} f'(x) &= (f(x))' = \left(2 - \frac{2}{\operatorname{tg} x} + \frac{2}{\operatorname{sen} x}\right)' = (2)' - \left(\frac{2}{\operatorname{tg} x}\right)' + \left(\frac{2}{\operatorname{sen} x}\right)' = 0 - \frac{-2(\operatorname{tg} x)'}{\operatorname{tg}^2 x} + \frac{-2(\operatorname{sen} x)'}{\operatorname{sen}^2 x} = \\ &= \frac{2 \times \frac{1}{\cos^2 x}}{\operatorname{sen}^2 x} - \frac{2 \cos x}{\operatorname{sen}^2 x} = \frac{2 \times 1}{\operatorname{sen}^2 x} - \frac{2 \cos x}{\operatorname{sen}^2 x} = \frac{2 - 2 \cos x}{\operatorname{sen}^2 x} \end{aligned}$$

No domínio da função  $f$  (e de  $f'(x)$ ), ou seja no intervalo  $\left] \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2} \right[$ , temos que:

- $\cos x < 1 \Leftrightarrow 2 \cos x < 2 \Leftrightarrow -2 \cos x > -2 \Leftrightarrow 2 - 2 \cos x > -2 + 2 \Leftrightarrow 2 - 2 \cos x > 0$
- $\operatorname{sen} x > 0 \Leftrightarrow \operatorname{sen}^2 x > 0$
- Logo, o quociente  $\frac{2 - 2 \cos x}{\operatorname{sen}^2 x} > 0$ , ou seja a  $f'(x) > 0$

Assim, podemos concluir que a função  $f$  é estritamente crescente.

Exame – 2002, 1.ª fase - 1.ª chamada (cód. 435)

- 123.
- a expressão  $f(x) = x^2$  **não pode ser** porque  $f(0) = 0$ , ou seja esta função tem um zero
  - a expressão  $f(x) = e^x$  **não pode ser** porque não é par, por exemplo  $f(1) \neq f(-1)$
  - a expressão  $f(x) = \cos x$  **não pode ser** porque tem um número infinito de zeros: se  $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ , temos que  $f(x) = 0$

A função  $f(x) = \pi$  é uma função constante, não nula, por isso não tem zeros e  $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \pi = f(-x)$ , ou seja, é uma função par, porque objetos simétricos têm a mesma imagem.

Resposta: **Opção D**

Exame – 2001, Prova para militares (cód. 435)



124.

124.1. Para estudar a existência de assíntotas não verticais, vamos averiguar a existência de um valor finito para o declive da assíntota, como o domínio é  $\mathbb{R}^+$ :

$$\begin{aligned} m &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \operatorname{sen} \frac{\pi}{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x} + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\operatorname{sen} \frac{\pi}{x}}{x} = 1 + \frac{\operatorname{sen} \frac{\pi}{+\infty}}{+\infty} = \\ &= 1 + \frac{\operatorname{sen}(0^+)}{+\infty} = 1 + \frac{0^+}{+\infty} = 1 + 0^+ = 1 \end{aligned}$$

Averiguando a existência de um valor finito para a ordenada da origem da assíntota, vem:

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( x + \operatorname{sen} \frac{\pi}{x} - x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \operatorname{sen} \frac{\pi}{x} \right) = \operatorname{sen} \frac{\pi}{+\infty} = \operatorname{sen}(0^+) = 0$$

Logo a reta de equação  $y = 1 \times x + 0$ , ou seja  $y = x$  é a única assíntota não vertical do gráfico de  $f$

124.2. Para determinar o declive da reta tangente ao gráfico, começamos por determinar a expressão da derivada da função:

$$f'(x) = (f(x))' = \left( x + \operatorname{sen} \frac{\pi}{x} \right)' = (x)' + \left( \operatorname{sen} \frac{\pi}{x} \right)' = 1 + \left( \frac{0 - (x)'\pi}{x^2} \right) \cos \frac{\pi}{x} = 1 - \frac{\pi}{x^2} \cos \frac{\pi}{x}$$

Logo o valor do declive da reta tangente ao gráfico de  $f$ , no ponto de abcissa 2, pode ser calculado como:

$$m_r = f'(2) = 1 - \frac{\pi}{2^2} \cos \frac{\pi}{2} = 1 - \frac{\pi}{4} \cos 0 = 1 - \frac{\pi}{4} \times 0 = 1 - 0 = 1$$

Para determinar as coordenadas do ponto de abcissa 2, que pertence ao gráfico da função e à reta tangente, simultaneamente, calculamos:

$$f(2) = 2 + \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} = 2 + 1 = 3$$

Logo a reta tangente é da forma  $y = 1 \times x + b$  e contém o ponto  $P$ , de coordenadas  $P(2,3)$ , pelo que:

$$y_P = x_P + b \Leftrightarrow 3 = 2 + b \Leftrightarrow 3 - 2 = b \Leftrightarrow b = 1$$

Ou seja, a equação da reta tangente ao gráfico de  $f$ , no ponto de abcissa 2 é  $y = x + 1$

124.3. Os zeros da função são as soluções da equação  $f(x) = 0$ , resolvendo a equação vem:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x + \operatorname{sen} \frac{\pi}{x} = 0 \Leftrightarrow x = -\operatorname{sen} \frac{\pi}{x}$$

Como  $\operatorname{sen} \frac{\pi}{x} \geq -1, \forall x \in \mathbb{R}$ , temos que:

$$\operatorname{sen} \frac{\pi}{x} \geq -1 \Leftrightarrow -\operatorname{sen} \frac{\pi}{x} \leq 1$$

Assim, para valores de  $x \in ]1, +\infty[$ , ou seja, para  $x > 1$ , a equação  $x = -\operatorname{sen} \frac{\pi}{x}$  não tem soluções, o que significa que a função não tem zeros no intervalo  $]1, +\infty[$

Exame – 2001, Prova para militares (cód. 435)

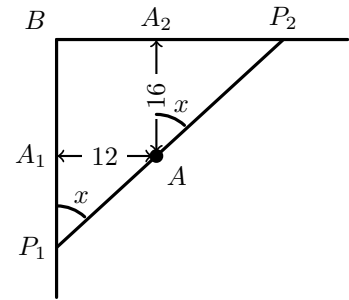


125.

- 125.1. Considerando  $A_1$  e  $A_2$  as projeções ortogonais do ponto sobre as retas  $BP_1$  e  $BP_2$ , respetivamente, temos que o ângulo  $A_2AP_2$  também tem amplitude  $x$ , pelo que recorrendo às definições de seno e cosseno temos:

$$\sin x = \frac{\overline{AA_1}}{\overline{AP_1}} \Leftrightarrow \sin x = \frac{12}{\overline{AP_1}} \Leftrightarrow \overline{AP_1} = \frac{12}{\sin x}$$

$$\cos x = \frac{\overline{AA_2}}{\overline{AP_2}} \Leftrightarrow \cos x = \frac{16}{\overline{AP_2}} \Leftrightarrow \overline{AP_2} = \frac{16}{\cos x}$$



Calculando o comprimento da ponte ( $c$ ), em função de  $x$ , vem:

$$c(x) = \overline{AP_2} + \overline{AP_1} = \frac{16}{\cos x} + \frac{12}{\sin x} = \frac{16 \sin x}{\cos x \cdot \sin x} + \frac{12 \cos x}{\sin x \cdot \cos x} = \frac{16 \sin x + 12 \cos x}{\sin x \cdot \cos x}$$

- 125.2. Se  $\overline{BP_1} = \overline{BP_2}$ , o triângulo  $[P_1BP]$  é um triângulo retângulo isósceles, ou seja os ângulos agudos são iguais, e por isso, têm amplitude  $\frac{\pi}{4}$  radianos.

Assim, calculando o comprimento da ponte, vem:

$$c\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{16 \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) + 12 \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{16 \times \frac{\sqrt{2}}{2} + 12 \times \frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{28 \times \frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{2}{4}} = 28\sqrt{2} \approx 39,6$$

Ou, seja, se o vértice a ponte for construída entre dois pontos equidistantes do vértice  $B$ , terá um comprimento aproximado de 39,6 metros.

Exame – 2001, Ép. especial (cód. 435)

126.

- 126.1. Como o domínio da função é  $]-\pi, \pi[$ , e  $f$  resulta de operações sucessivas entre funções contínuas, também é contínua, logo as retas  $x = -\pi$  e  $x = \pi$  são as únicas retas que podem ser assíntotas do gráfico de  $f$ .

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\pi^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\pi^-} \frac{\cos x}{1 + \cos x} = \frac{\cos(-\pi)}{1 + \cos(-\pi)} = \frac{-1^+}{1 + (-1^+)} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$$

Logo, a reta  $x = -\pi$  é efetivamente uma assíntota vertical do gráfico de  $f$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow \pi^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pi^+} \frac{\cos x}{1 + \cos x} = \frac{\cos \pi}{1 + \cos \pi} = \frac{-1^+}{1 + (-1^+)} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$$

Assim, a reta  $x = \pi$  também é uma assíntota vertical do gráfico de  $f$



126.2. Para estudar a existência de extremos da função, começamos por determinar a expressão da derivada:

$$f'(x) = \left( \frac{\cos x}{1 + \cos x} \right)' = \frac{(\cos x)'(1 + \cos x) - (\cos x)(1 + \cos x)'}{(1 + \cos x)^2} =$$

$$= \frac{-\operatorname{sen} x(1 + \cos x) - (\cos x)(0 - \operatorname{sen} x)}{(1 + \cos x)^2} = \frac{-\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} x \cdot \cos x + \operatorname{sen} x \cdot \cos x}{(1 + \cos x)^2} = \frac{-\operatorname{sen} x}{(1 + \cos x)^2}$$

Para provar a existência de um maximizante, vamos determinar os zeros da derivada:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{-\operatorname{sen} x}{(1 + \cos x)^2} = 0 \Leftrightarrow -\operatorname{sen} x = 0 \wedge \underbrace{(1 + \cos x)^2 \neq 0}_{\text{(PV, } \cos x \neq -1, \forall x \in ]-\pi, \pi[)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{sen} x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Ou seja, no domínio da função (o intervalo  $]-\pi, \pi[$ ), a única solução da equação  $f'(x) = 0$ , é  $x = 0$ , pelo que podemos estudar a variação do sinal de  $f'$  para relacionar com a monotonia de  $f$ :

$x$	$-\pi$		$0$		$\pi$
$f'$	n.d.	+	$0$	-	n.d.
$f$	n.d.	$\nearrow$	Máx	$\searrow$	n.d.

Assim:

$$f(0) = \frac{\cos 0}{1 + \cos 0} = \frac{1}{1 + 1} = \frac{1}{2}$$

Logo, a função  $f$  só tem um máximo, cujo valor é  $\frac{1}{2}$

126.3. A medida da base maior do trapézio ( $\overline{OP} = x_P$ ), como  $P$  pertence ao semi-eixo-positivo  $Ox$ , é a solução positiva da equação:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{\cos x}{1 + \cos x} = 0 \Leftrightarrow \cos x = 0 \wedge \underbrace{1 + \cos x \neq 0}_{\text{(PV, } \cos x \neq -1, \forall x \in ]-\pi, \pi[)} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Logo, a única solução positiva do intervalo  $]-\pi, \pi[$ , é  $\frac{\pi}{2}$ , ou seja,  $\overline{OP} = x_P = \frac{\pi}{2}$

A medida da base menor do trapézio ( $\overline{RQ} = x_Q$ ), como  $Q$  está sobre a reta de equação  $y = \frac{1}{3}$ , é a solução positiva da equação:

$$f(x) = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{\cos x}{1 + \cos x} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow 3 \cos x = 1 + \cos x \wedge \underbrace{1 + \cos x \neq 0}_{\text{(PV, } \cos x \neq -1, \forall x \in ]-\pi, \pi[)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3 \cos x - \cos x = 1 \Leftrightarrow 2 \cos x = 1 \Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos x = \cos \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow x = \pm \frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Logo, a única solução positiva do intervalo  $]-\pi, \pi[$ , é  $\frac{\pi}{3}$ , ou seja,  $\overline{QR} = x_Q = \frac{\pi}{3}$

Assim, calculando a área do trapézio, vem:

$$A_{[OPQR]} = \frac{\overline{RQ} + \overline{OP}}{2} \times \overline{OR} = \frac{\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2}}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{\frac{2\pi}{6} + \frac{3\pi}{6}}{6} = \frac{5\pi}{36}$$

Exame – 2001, 2.ª fase (cód. 435)



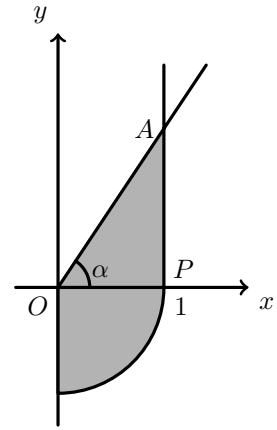
127. Designando o ponto  $(1,0)$  por  $P$  e recorrendo à definição de tangente, temos que:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\overline{AP}}{\overline{OP}} \Leftrightarrow \operatorname{tg} \alpha = \frac{\overline{AP}}{1} \Leftrightarrow \overline{AP} = \operatorname{tg} \alpha$$

Logo, podemos calcular a área da região sombreada, como a soma do quarto de círculo de raio 1, com a área do triângulo  $[OPA]$ :

$$A = \frac{A_o}{4} + A_{[OPA]} = \frac{\pi \times 1^2}{4} + \frac{\overline{OP} \times \overline{AP}}{2} = \frac{\pi}{4} + \frac{1 \times \operatorname{tg} \alpha}{2} = \frac{\pi}{4} + \frac{\operatorname{tg} \alpha}{2}$$

Resposta: **Opção A**



Exame – 2001, 1.ª fase - 2.ª chamada (cód. 435)

128.

128.1. Como  $A$  e  $B$  são pontos cujas ordenadas são extremos da função, começamos por determinar a expressão da derivada, e calcular os zeros:

$$f'(x) = (x + 2 \cos x)' = (x)' + 2(\cos x)' = 1 + 2(-\operatorname{sen} x) = 1 - 2 \operatorname{sen} x$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - 2 \operatorname{sen} x = 0 \Leftrightarrow -2 \operatorname{sen} x = -1 \Leftrightarrow \operatorname{sen} x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \operatorname{sen} x = \operatorname{sen} \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee x = \pi - \frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee x = -\frac{5\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Logo, as únicas soluções da equação do intervalo  $[0, 2\pi]$ , ou seja as duas únicas soluções da equação são  $x = \frac{\pi}{6}$  e  $x = \frac{5\pi}{6}$ , pelo que podemos provar que são maximizantes ou minimizantes, pelo estudo do sinal da derivada para relacionar com a monotonia da função:

$x$	0		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{5\pi}{6}$		$2\pi$
$f'$		+	0	-	0	+	
$f$		$\rightarrow$	Máx	$\rightarrow$	min	$\rightarrow$	

Logo, como a ordenada do ponto  $A$  é um máximo, e a ordenada do ponto  $B$  é um mínimo, vem:

$$\bullet x_A = \frac{\pi}{6}$$

$$\bullet y_A = f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{6} + 2 \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6} + 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{6} + \frac{2\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{6} + \frac{6\sqrt{3}}{6} = \frac{\pi + 6\sqrt{3}}{6}$$

$$\bullet x_B = \frac{5\pi}{6}$$

$$\bullet y_B = f\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \frac{5\pi}{6} + 2 \cos \frac{5\pi}{6} = \frac{5\pi}{6} + 2(-\cos \frac{\pi}{6}) = \frac{5\pi}{6} - 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{5\pi}{6} - \frac{6\sqrt{3}}{6} = \frac{5\pi - 6\sqrt{3}}{6}$$

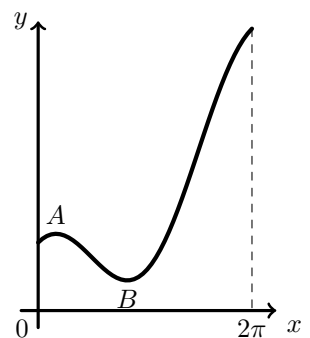
128.2. Pela observação do gráfico, verificamos que o contradomínio de  $f$  é o conjunto dos valores compreendidos entre a ordenada do ponto  $B$  e a imagem de  $2\pi$ .

Assim,

$$f(2\pi) = 2\pi + 2 \cos(2\pi) = 2\pi + 2(1) = 2\pi + 2$$

Ou seja:

$$D'_f = \left[ \frac{5\pi - 6\sqrt{3}}{6}, 2\pi + 2 \right]$$



Exame – 2001, 1.ª fase - 2.ª chamada (cód. 435)



129.

129.1. Para determinar a área de uma das faces laterais, começamos determinar a altura do triângulo ( $\overline{EG}$ ).

Recorrendo à definição de cosseno, como  $\overline{FG} = \frac{\overline{AB}}{2} = \frac{2}{2} = 1$ , vem:

$$\cos x = \frac{\overline{FG}}{\overline{EG}} \Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{\overline{EG}} \Leftrightarrow \overline{EG} = \frac{1}{\cos x}$$

Assim, calculando a área do triângulo  $[BCE]$ , temos:

$$A_{[BCE]} = \frac{\overline{BC} \times \overline{EG}}{2} = \frac{2 \times \frac{1}{\cos x}}{2} = \frac{1}{\cos x}$$

Logo, para calcular a área total, vem:

$$A_T = 4 \times A_{[BCE]} + A_{[ABCD]} = 4 \times \frac{1}{\cos x} + 2 \times 2 = \frac{4}{\cos x} + 4 = \frac{4}{\cos x} + \frac{4 \cos x}{\cos x} = \frac{4 \cos x + 4}{\cos x}$$

Ou seja, para cada valor de  $x \in ]0, \frac{\pi}{2}[$ , a área da pirâmide é dada por  $A(x)$

129.2.

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} A(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{4 \cos x + 4}{\cos x} = \frac{4 \cos(\frac{\pi}{2}^-) + 4}{\cos(\frac{\pi}{2}^-)} = \frac{4 \times 0^+ + 4}{0^+} = \frac{4}{0^+} = +\infty$$

Ou seja, quando o ângulo  $x$  toma valores arbitrariamente próximos de  $\frac{\pi}{2}$  radianos, a área da pirâmide assume valores arbitrariamente grandes, o que pode ser justificado pelo facto da altura da pirâmide ser arbitrariamente grande.

Exame – 2001, 1.ª fase - 1.ª chamada (cód. 435)

130.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\operatorname{sen} x} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{\ln x}{x} \times \frac{x}{\operatorname{sen} x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{x} \times \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{\operatorname{sen} x} = \frac{\lim_{x \rightarrow 0^+} (\ln x)}{\lim_{x \rightarrow 0^+} x} \times \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\frac{\operatorname{sen} x}{x}} = \\ &= \frac{\ln(0^+)}{0^+} \times \frac{1}{\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\operatorname{sen} x}{x}} = \frac{-\infty}{0^+} \times \frac{1}{1} = -\infty \times 1 = -\infty \end{aligned}$$

(limite notável)

Resposta: **Opção A**

Exame – 2001, Prova modelo (cód. 435)



131.

131.1. Para que a função seja contínua no ponto de abscissa 0, tem que se verificar a condição:

$$h(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} h(x)$$

- $h(0) = \frac{1}{2}$
- $\lim_{x \rightarrow 0^-} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x+1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left( \frac{x}{x} + \frac{1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left( 1 + \frac{1}{x} \right) = 1 + \frac{1}{0^-} = 1 - \infty = -\infty$
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\text{sen } x}{2x} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\text{sen } x}{x} = \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{2}$   
(limite notável)

Assim, como  $\lim_{x \rightarrow 0^-} h(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0^+} h(x)$ , não existe  $\lim_{x \rightarrow 0} h(x)$ , e por isso, a função  $h$  **não é contínua no ponto** de abscissa 0.

Mas, como  $\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = h(0)$ , a função  $h$  **é contínua à direita do ponto** de abscissa 0.

131.2. As abscissas dos pontos de interseção das duas funções, no intervalo  $[-1, 1000\pi]$ , são as soluções da equação  $h(x) = j(x)$ , que pertencem a esse intervalo.

- Assim, para  $x \in [-1, 0[$ , temos:

$$\begin{aligned} h(x) = j(x) &\Leftrightarrow \frac{x+1}{x} = \frac{1}{3x} \Leftrightarrow 3x^2 + 3x = x \wedge x \neq 0 \Leftrightarrow 3x^2 + 2x = 0 \wedge x \neq 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x(3x+2) = 0 \wedge x \neq 0 \Leftrightarrow (x=0 \vee 3x+2=0) \wedge x \neq 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \left( x=0 \vee x=-\frac{2}{3} \right) \wedge x \neq 0 \Leftrightarrow x = -\frac{2}{3} \end{aligned}$$

Ou seja, no intervalo  $] -1, 0[$ , os gráficos das funções  $h$  e  $j$  interseam-se uma vez.

- Para  $x = 0$ , como a função  $j$  não está definida, não há interseção dos dois gráficos.
- Para  $x \in ]0, 1000\pi]$ , vem:

$$h(x) = j(x) \Leftrightarrow \frac{\text{sen } x}{2x} = \frac{1}{3x} \Leftrightarrow \text{sen } x = \frac{2x}{3x} \wedge x \neq 0 \Leftrightarrow \text{sen } x = \frac{2}{3} \wedge x \neq 0$$

Como a equação  $\text{sen } x = \frac{2}{3}$  tem duas soluções no intervalo  $]0, 2\pi[$  e é periódica (de período  $2\pi$ ) terá 1000 soluções no intervalo  $]0, 1000\pi]$ , porque este intervalo contém 500 intervalos do tipo  $]0 + 2k\pi, 2\pi + 2k\pi \times k[$ ,  $k \in \{0, 2, 3, \dots, 498, 499\}$ , e existem duas soluções em cada intervalo.

Assim, os gráficos de  $j$  e de  $h$  interseam-se em 1001 pontos no intervalo  $[0, 1000\pi]$  (1 ponto de interseção com abscissa negativa e 1000 com abscissas positivas).

Exame – 2001, Prova modelo (cód. 435)

132. Como o valor do declive da reta tangente pode ser calculado pelo valor da derivada, começamos por determinar a expressão da derivada:

$$h'(x) = (\text{sen } x)' = \cos x$$

Como  $-1 \leq \cos x \leq 1$ , o declive da reta tangente está compreendido entre -1 e 1. Logo, as opções (A), (B) e (C) não podem ser retas tangentes ao gráfico de  $h$ , pois os declives das retas são maiores que 1, nas opções (A) e (C); ou menores que -1, no caso da opção (B).

Na opção (D), ao contrário das anteriores, o valor do declive é compatível com a condição imposta ( $-1 \leq 1 \leq 1$ ).

Resposta: **Opção D**Exame – 2000, 2.<sup>a</sup> fase (cód. 435)

133.

133.1. Como a função  $f$  resulta de operações sucessivas de funções contínuas em  $\mathbb{R}$ , é uma função contínua, e, por isso, também é contínua em  $]0, \pi[$ .

Como  $-1 < 0 < 2\pi + 1$ , ou seja,  $f(0) < 0 < f(\pi)$ , então, podemos concluir, pelo Teorema de Bolzano, que existe  $c \in ]0, \pi[$  tal que  $f(c) = 0$ , ou seja, que a função  $f$  tem, pelo menos, um zero no intervalo  $]0, \pi[$ .

C.A.

$$f(0) = 2 \times 0 - \cos 0 = 0 - 1 = -1$$

$$f(\pi) = 2 \times \pi - \cos(\pi) = 2\pi - (-1) = 2\pi + 1$$

133.2. Determinando a expressão da derivada, vem:

$$f'(x) = (2x - \cos x)' = (2x)' - (\cos x)' = 2 - (-\sin x) = 2 + \sin x$$

Como  $\sin x \geq -1, \forall x \in \mathbb{R}$ , então  $2 + \sin x \geq -1 + 2, \forall x \in \mathbb{R}$ , ou seja  $f'(x) \geq 1, \forall x \in \mathbb{R}$ .

Como a derivada de  $f$  é estritamente positiva, a função  $f$  é estritamente crescente, e funções estritamente crescentes têm no máximo, um zero, pelo que o zero cuja existência é garantida pela enunciado do item anterior, é o único zero da função.

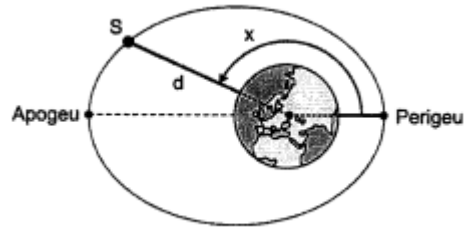
Exame - 2000, 2.<sup>a</sup> fase (cód. 435)

134. Quando o satélite se encontra no *apogeu*, o ângulo  $x$  tem amplitude  $180^\circ$ . Assim, a distância do satélite ao centro Terra é:

$$d = \frac{7820}{1 + 0,07 \cos 180} = \frac{7820}{1 + 0,07(-1)} = \frac{7820}{0,93} \approx 8408,6$$

Como se pretende saber a distância à superfície da Terra ( $d_{sup}$ ), devemos subtrair o raio da terra:

$$d_{sup} = d - 6378 = 8408,6 - 6378 = 2030,6 \approx 2031$$



Logo, a distância do satélite à superfície da Terra, arredondada às unidades é de 2031 km

Exame - 2000, 1.<sup>a</sup> fase - 2.<sup>a</sup> chamada (cód. 435)

135. Se  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$  então a reta  $y = 0$  é uma assíntota do gráfico de  $f$ ; analogamente se  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$  então a reta  $y = 1$  é uma assíntota do gráfico de  $f$

Como a função  $g(x) = \sin x$  não tem qualquer assíntota, as afirmações das opções (A) e (C) são falsas.

Como  $\sin x \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}$ , então a afirmação  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin x = +\infty$  (opção (B)) é falsa.

A função  $g(x) = \sin x$  é periódica e não se aproxima de nenhum valor específico para valores arbitrariamente grandes de  $x$ , pelo que não existe  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin x$

Resposta: **Opção D**

Exame - 2000, 1.<sup>a</sup> fase - 1.<sup>a</sup> chamada (cód. 435)



136. O dia 24 de março é o 84º dia do ano ( $31 + 29 + 24 = 84$ ).

Assim o tempo decorrido entre o nascer e por do Sol, no dia 24 de março, é

$$f(84) = 12,2 + 2,64 \operatorname{sen} \frac{\pi(84 - 81)}{183} \approx 12,336$$

Logo a hora do por Sol, pode ser calculada como a soma da hora a que nasceu (6,5) com a duração do dia (12,336):

$$6,5 + 12,336 = 18,836$$

Calculando 0,836 horas em minutos, temos  $0,836 \times 60 = 50,16$ , pelo que o por do Sol no dia 24 de março ocorreu às 18 horas e 50 minutos.

Exame – 2000, 1.ª fase - 1.ª chamada (cód. 435)

137.

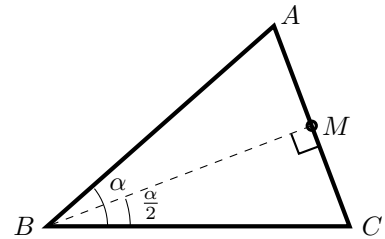
137.1. Considerando o ponto  $M$ , como o ponto médio do lado  $AC$ , definimos dois triângulos retângulos. Assim, recorrendo à definição de seno e cosseno, vem:

$$\operatorname{sen} \frac{\alpha}{2} = \frac{\overline{CM}}{\overline{BC}} \Leftrightarrow \overline{CM} = \overline{BC} \times \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2}$$

$$\operatorname{cos} \frac{\alpha}{2} = \frac{\overline{BM}}{\overline{BC}} \Leftrightarrow \overline{BM} = \overline{BC} \times \operatorname{cos} \frac{\alpha}{2}$$

Logo, como  $\overline{AC} = 2 \times \overline{CM} = 2\overline{BC} \times \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2}$ , para cada valor de  $\alpha \in ]0, \pi[$  a área do triângulo  $[ABC]$  é:

$$\begin{aligned} A_{[ABC]} &= \frac{\overline{AC} \times \overline{BM}}{2} = \frac{2 \times \overline{BC} \times \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2} \times \overline{BC} \times \operatorname{cos} \frac{\alpha}{2}}{2} = \frac{\overline{BC}^2}{2} \times 2 \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2} \cdot \operatorname{cos} \frac{\alpha}{2} = \\ &= \frac{\overline{BC}^2}{2} \times \operatorname{sen} \left( 2 \times \frac{\alpha}{2} \right) = \frac{\overline{BC}^2}{2} \times \operatorname{sen} \alpha \end{aligned}$$



- 137.2.
- Um polígono regular de  $n$  lados, inscrito numa circunferência de lado 1, pode ser decomposto em  $n$  triângulos isósceles, iguais, em que os lados iguais têm comprimento 1 ( $\overline{BC} = 1$ ).
  - Como a soma dos ângulos ao centro de todos os  $n$  triângulos é  $2\pi$ , o ângulo  $\alpha$  é o resultado da divisão do ângulo giro por  $n$ , ou seja  $\alpha = \frac{2\pi}{n}$
  - Como a área do polígono regular é dada pela soma das áreas dos  $n$  triângulos, e como têm todos a mesma área, por serem iguais, multiplicamos a área do triângulo por  $n$ .

Logo, multiplicando por  $n$  a expressão anterior e substituindo  $\overline{BC}$  e  $\alpha$ , a expressão da área do polígono é:

$$A_n = n \times \frac{1^2}{2} \times \operatorname{sen} \left( \frac{2\pi}{n} \right) = \frac{n}{2} \operatorname{sen} \left( \frac{2\pi}{n} \right)$$

137.3.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} A_n &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{n}{2} \operatorname{sen} \left( \frac{2\pi}{n} \right) \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{\frac{2}{n}} \times \operatorname{sen} \left( \frac{2\pi}{n} \right) \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{\operatorname{sen} \left( \frac{2\pi}{n} \right)}{\frac{2}{n}} \right) = \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \pi \times \frac{\operatorname{sen} \left( \frac{2\pi}{n} \right)}{\pi \times \frac{2}{n}} \right) = \pi \times \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{\operatorname{sen} \left( \frac{2\pi}{n} \right)}{\frac{2\pi}{n}} \right) = \pi \times \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = \pi \times 1 = \pi \end{aligned}$$

(Se  $x = \frac{2\pi}{n}$ ,  $n \rightarrow +\infty \Rightarrow x \rightarrow 0^+$ ) (limite notável)

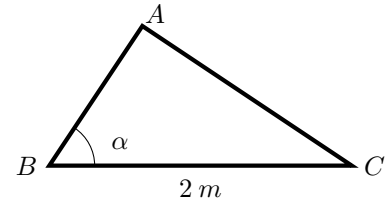
Ou seja, quando o polígono regular tem um número arbitrariamente grande de lados, a sua área é arbitrariamente próxima de  $\pi$ . O que pode ser observado geometricamente, porque a área dos polígonos regulares inscritos numa circunferência aproxima-se da área da circunferência com o aumento do número de lados e a circunferência de raio 1 tem área igual a  $\pi$  ( $A_0 = \pi \times 1^2 = \pi$ ).

Exame – 2000, Prova modelo (cód. 435)



138. Recorrendo às definições de seno e cosseno temos:

$$\begin{aligned}\operatorname{sen} \alpha &= \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} \Leftrightarrow \operatorname{sen} \alpha = \frac{\overline{AC}}{2} \Leftrightarrow \overline{AC} = 2 \operatorname{sen} \alpha \\ \operatorname{cos} \alpha &= \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} \Leftrightarrow \operatorname{cos} \alpha = \frac{\overline{AB}}{2} \Leftrightarrow \overline{AB} = 2 \operatorname{cos} \alpha\end{aligned}$$



E assim, considerando o lado  $[AB]$  como a base e o lado  $[AC]$  como a altura, a área do triângulo  $[ABC]$  é:

$$A_{[ABC]} = \frac{\overline{AB} \times \overline{AC}}{2} = \frac{2 \operatorname{cos} \alpha \times 2 \operatorname{sen} \alpha}{2} = \frac{4 \operatorname{sen} \alpha \cdot \operatorname{cos} \alpha}{2} = 2 \operatorname{sen} \alpha \cdot \operatorname{cos} \alpha$$

Resposta: **Opção A**

Exame – 2000, Prova para militares (cód. 135)

139. Como  $\operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{cos} x}$ , a função  $g$  não está definida para valores de  $x$  tais que  $\operatorname{cos} x = 0$ .

$$\operatorname{cos} x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z},$$

- as opções (B) e (C) não podem ser o domínio de  $g$ , porque  $\frac{\pi}{2} \in \left] \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4} \right[$  e também  $\frac{\pi}{2} \in ]0, \pi[$
- a opção (D) também não pode ser porque  $\frac{3\pi}{2} \in ]\pi, 2\pi[$  e  $\operatorname{cos} \frac{3\pi}{2} = 0$

Finalmente temos que  $\forall x \in \left] -\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3} \right[$ ,  $\operatorname{cos} x \neq 0$

Resposta: **Opção A**

Exame – 1999, Prova para militares (cód. 135)

140.

140.1. Como  $f(0) = \operatorname{sen}(0) - \frac{1}{2} \operatorname{sen}(2 \times 0) = 0 - \frac{1}{2} \operatorname{sen}(0) = 0$ , temos que:

$$\begin{aligned}f'(0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}(x) - \frac{1}{2} \operatorname{sen}(2x) - 0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2} \operatorname{sen}(2x)}{x} = \\ &\hspace{15em} (\text{limite notável}) \\ &= 1 - \frac{1}{2} \times \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}(2x)}{x} = 1 - \frac{1}{2} \times \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \operatorname{sen}(2x)}{2x} = 1 - \frac{1}{2} \times 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}(2x)}{2x} = 1 - \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} y}{y} = 1 - 1 = 0 \\ &\hspace{10em} (\text{Se } y = 2x, x \rightarrow 0 \Rightarrow y \rightarrow 0) \hspace{15em} (\text{limite notável})\end{aligned}$$

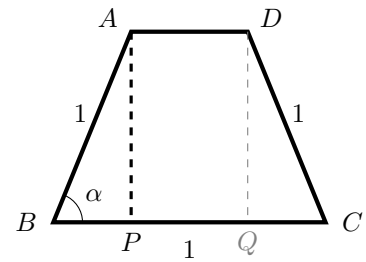


140.2.

140.2.1. Considerando as projeções ortogonais dos vértices  $A$  e  $D$  sobre o lado  $[BC]$ , respectivamente os pontos  $P$  e  $Q$ , e recorrendo às definições de seno e cosseno, vem:

$$\sin \alpha = \frac{\overline{AP}}{\overline{AB}} \Leftrightarrow \sin \alpha = \frac{\overline{AP}}{1} \Leftrightarrow \overline{AP} = \sin \alpha$$

$$\cos \alpha = \frac{\overline{BP}}{\overline{AB}} \Leftrightarrow \cos \alpha = \frac{\overline{BP}}{1} \Leftrightarrow \overline{BP} = \cos \alpha$$



Logo, como  $\overline{AD} = 1 - \overline{BP} - \overline{QC} = 1 - 2\overline{BP} = 1 - 2\cos \alpha$ , a área do trapézio  $[ABCD]$  é:

$$\begin{aligned} A_{[ABCD]} &= \frac{\overline{BC} + \overline{AD}}{2} \times \overline{AP} = \frac{1 + 1 - 2\cos \alpha}{2} \times \sin \alpha = \frac{2 - 2\cos \alpha}{2} \times \sin \alpha = (1 - \cos \alpha) \sin \alpha = \\ &= \sin \alpha - \sin \alpha \cos \alpha = \sin \alpha - \frac{1}{2} \times 2 \sin \alpha \cos \alpha = \sin \alpha - \frac{1}{2} \sin (2\alpha) \end{aligned}$$

Logo, para cada valor de  $\alpha \in \left] \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2} \right]$  a área do trapézio é dada por  $f(\alpha)$

140.2.2.

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \sin \left(2 \times \frac{\pi}{2}\right) = 0 - \frac{1}{2} \sin \pi = -(-1) = 1$$

Se  $\alpha = \frac{\pi}{2}$ , o ângulo  $ABC$  é reto, tal como o ângulo  $BCD$ , e como os lados  $[AB]$ ,  $[BC]$  e  $[CD]$  são congruentes, o quadrilátero é um quadrado de lado 1, pelo que a sua área também é 1, de acordo com o cálculo anterior:  $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$

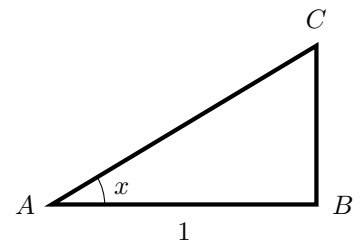
Exame – 1999, Prova modelo (cód. 135)

141.

141.1. Usando as definições de cosseno e de tangente, temos:

$$\cos x = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} \Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{\overline{AC}} \Leftrightarrow \overline{AC} = \frac{1}{\cos x}$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} \Leftrightarrow \operatorname{tg} x = \frac{\overline{BC}}{1} \Leftrightarrow \overline{BC} = \operatorname{tg} x$$



Logo, o perímetro do triângulo é:

$$P_{[ABC]} = \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{AC} = 1 + \operatorname{tg} x + \frac{1}{\cos x} = \frac{\cos x}{\cos x} + \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{1}{\cos x} = \frac{1 + \sin x + \cos x}{\cos x}$$

Logo, para cada valor de  $x \in \left] 0, \frac{\pi}{2} \right[$ , o perímetro do triângulo é dado por  $f(x)$ .



141.2. Como  $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\operatorname{sen}\alpha$ , temos que:  $\operatorname{sen}\alpha = -\left(-\frac{3}{5}\right) = \frac{3}{5}$

E, pela fórmula fundamental ( $\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ ), temos que:

$$\begin{aligned} \left(\frac{3}{5}\right)^2 + \cos^2\alpha = 1 &\Leftrightarrow \cos^2\alpha = 1 - \frac{9}{25} \Leftrightarrow \cos^2\alpha = \frac{25}{25} - \frac{9}{25} \Leftrightarrow \cos^2\alpha = \frac{16}{25} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \cos\alpha = \pm\sqrt{\frac{16}{25}} \Leftrightarrow \cos\alpha = \pm\frac{4}{5} \end{aligned}$$

Como  $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$  sabemos que  $\cos\alpha > 0$ , logo  $\cos\alpha = \frac{4}{5}$

Desta forma, temos que:

$$f(\alpha) = \frac{1 + \operatorname{sen}\alpha + \cos\alpha}{\cos\alpha} = \frac{1 + \frac{3}{5} + \frac{4}{5}}{\frac{4}{5}} = \frac{\frac{5}{5} + \frac{3}{5} + \frac{4}{5}}{\frac{4}{5}} = \frac{5 + 3 + 4}{4} = \frac{12}{4} = 3$$

141.3. Começamos por determinar a expressão da derivada:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{1 + \operatorname{sen}x + \cos x}{\cos x}\right)' = \frac{(1 + \operatorname{sen}x + \cos x)' \cos x - (1 + \operatorname{sen}x + \cos x)(\cos x)'}{\cos^2 x} = \\ &= \frac{(0 + \cos x + (-\operatorname{sen}x)) \cos x - (1 + \operatorname{sen}x + \cos x)(-\operatorname{sen}x)}{\cos^2 x} = \\ &= \frac{\cos^2 x - \operatorname{sen}x \cos x - (-\operatorname{sen}x - \operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen}x \cos x)}{\cos^2 x} = \\ &= \frac{\cos^2 x - \operatorname{sen}x \cos x + \operatorname{sen}x + \operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen}x \cos x}{\cos^2 x} = \frac{\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x + \operatorname{sen}x}{\cos^2 x} = \frac{1 + \operatorname{sen}x}{\cos^2 x} \end{aligned}$$

Logo, como  $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ , temos que  $\operatorname{sen}x > 0$  e  $\cos x > 0$ , pelo que  $f'$  é um quociente de dois valores positivos, logo  $f'(x) > 0, \forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$

Como a derivada é sempre positiva, a função é estritamente crescente, ou seja, no triângulo  $[ABC]$  a amplitudes maiores do ângulo  $x$ , correspondem áreas maiores.

Exame – 1998, Prova para militares (cód. 135)



142.

142.1. Como  $\overline{DE} = 1$  e  $\overline{EH} = \frac{\overline{DG}}{2} = 1$ , e recorrendo à definição de tangente, vem:

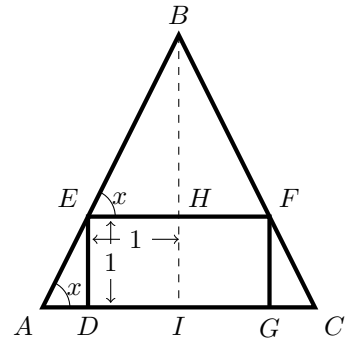
$$\operatorname{tg} x = \frac{\overline{DE}}{\overline{AD}} \Leftrightarrow \operatorname{tg} x = \frac{1}{\overline{AD}} \Leftrightarrow \overline{AD} = \frac{1}{\operatorname{tg} x}$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{\overline{BH}}{\overline{EH}} \Leftrightarrow \operatorname{tg} x = \frac{\overline{BH}}{1} \Leftrightarrow \overline{BH} = \operatorname{tg} x$$

Assim, temos que:

$$\overline{AC} = \overline{AD} + \overline{DG} + \overline{GC} = 2\overline{AD} + 2 = 2\left(\frac{1}{\operatorname{tg} x}\right) + 2 = \frac{2}{\operatorname{tg} x} + 2$$

$$\overline{BI} = \overline{BH} + \overline{HI} = \operatorname{tg} x + 1$$



Logo a área do triângulo  $[ABC]$  é:

$$\begin{aligned} A_{[ABC]} &= \frac{\overline{AC} \times \overline{BI}}{2} = \frac{\left(\frac{2}{\operatorname{tg} x} + 2\right) \times (\operatorname{tg} x + 1)}{2} = \frac{\frac{2 \operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} x} + \frac{2}{\operatorname{tg} x} + 2 \operatorname{tg} x + 2}{2} = \\ &= \frac{2\left(\frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} x} + \frac{1}{\operatorname{tg} x} + \operatorname{tg} x + 1\right)}{2} = 1 + \frac{1}{\operatorname{tg} x} + \operatorname{tg} x + 1 = 2 + \operatorname{tg} x + \frac{1}{\operatorname{tg} x} \end{aligned}$$

Logo, para cada valor de  $x \in ]0, \frac{\pi}{2}[$ , a área do triângulo  $[ABC]$  é dada, por  $f(x)$

142.2.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(2 + \operatorname{tg} x + \frac{1}{\operatorname{tg} x}\right)' = (2)' + (\operatorname{tg} x)' + \left(\frac{1}{\operatorname{tg} x}\right)' = 0 + \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{(1)' \times \operatorname{tg} x - 1 \times (\operatorname{tg} x)'}{\operatorname{tg}^2 x} = \\ &= \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{0 - 1 \times \frac{1}{\cos^2 x}}{\operatorname{tg}^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{-\frac{1}{\cos^2 x}}{\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}} = \frac{1}{\cos^2 x} - \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} = \\ &= \frac{\sin^2 x}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} - \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} = \frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} = \frac{-(\cos^2 x - \sin^2 x)}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} = -\frac{\cos(2x)}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} \end{aligned}$$

142.3. Para determinar o valor mínimo, começamos por calcular os zeros da derivada:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{\cos(2x)}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} = 0 \Leftrightarrow -\cos(2x) = 0 \wedge \underbrace{\sin^2 x \cdot \cos^2 x \neq 0}_{(\text{PV}, x \in ]0, \frac{\pi}{2}[)} \Leftrightarrow \cos(2x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos(2x) = \cos \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow 2x = \pm \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \pm \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Como  $x \in ]0, \frac{\pi}{2}[$ ,  $x = \frac{\pi}{4}$  é a única solução da equação, ou seja o único zero da derivada, pelo que estudando a variação do sinal da derivada para relacionar com a monotonia da função, vem:

$x$	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$
$f'$	n.d.	-	0	+	n.d.
$f$	n.d.	$\searrow$	min	$\nearrow$	n.d.

Pelo que podemos concluir que  $x = \frac{\pi}{4}$  é o minimizante de  $f$ , ou seja é o valor de  $x$  para o qual a área do triângulo  $[ABC]$  é mínima.

Exame – 1998, 2.ª fase (cód. 135)



143. Considerando o ponto  $P$  como a projeção ortogonal do vértice  $B$  sobre a reta  $HF$ , e recorrendo às definições de seno e cosseno, vem:

$$\operatorname{sen} x = \frac{\overline{BP}}{\overline{OB}} \Leftrightarrow \operatorname{sen} x = \frac{\overline{BP}}{5} \Leftrightarrow \overline{BP} = 5 \operatorname{sen} x$$

$$\operatorname{cos} x = \frac{\overline{OP}}{\overline{OB}} \Leftrightarrow \operatorname{cos} x = \frac{\overline{OP}}{5} \Leftrightarrow \overline{OP} = 5 \operatorname{cos} x$$

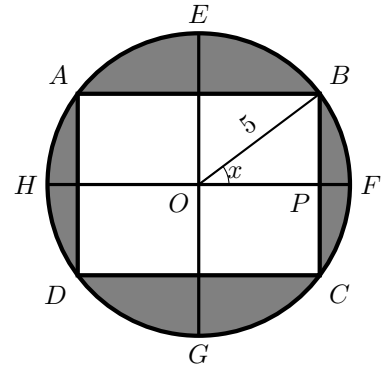
Sabemos ainda que

- $\overline{AB} = 2\overline{OP} = 2 \times 5 \operatorname{cos} x = 10 \operatorname{cos} x$
- $\overline{BC} = 2\overline{BP} = 2 \times 5 \operatorname{sen} x = 10 \operatorname{sen} x$

Logo a área relvada (sombreada) é dada pela diferença da área da circunferência e do retângulo  $[ABCD]$ :

$$\begin{aligned} A &= A_o - A_{[ABCD]} = \pi(\overline{OB})^2 - \overline{AB} \times \overline{BC} = \pi(5)^2 - 10 \operatorname{cos} x \times 10 \operatorname{sen} x = \\ &= 25\pi - 100 \operatorname{sen} x \cdot \operatorname{cos} x = 25\pi - 50 \times 2 \operatorname{sen} x \cdot \operatorname{cos} x = 25\pi - 50 \operatorname{sen}(2x) \end{aligned}$$

Logo, para cada valor de  $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$  a área da zona relvada, em  $m^2$ , é dada por  $g(x)$



Exame – 1998, 1.ª fase - 2.ª chamada (cód. 135)

144.

- 144.1. Como  $\overline{AM} = \frac{\overline{AB}}{2} = \frac{8}{2} = 4$ , e recorrendo à definição de cosseno e tangente, vem:

$$\operatorname{cos} x = \frac{\overline{AM}}{\overline{PA}} \Leftrightarrow \operatorname{cos} x = \frac{4}{\overline{PA}} \Leftrightarrow \overline{PA} = \frac{4}{\operatorname{cos} x}$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{\overline{PM}}{\overline{AM}} \Leftrightarrow \operatorname{tg} x = \frac{\overline{PM}}{4} \Leftrightarrow \overline{PM} = 4 \operatorname{tg} x$$

Como  $\overline{FM} = \overline{FP} + \overline{PM}$  e  $\overline{FM} = 4$ , temos que:

$$\overline{FP} + \overline{PM} = 4 \Leftrightarrow \overline{FP} = 4 - \overline{PM} \Leftrightarrow \overline{FP} = 4 - 4 \operatorname{tg} x$$

Assim, como  $\overline{PA} = \overline{PB}$ , temos que o comprimento total,  $C$ , é:

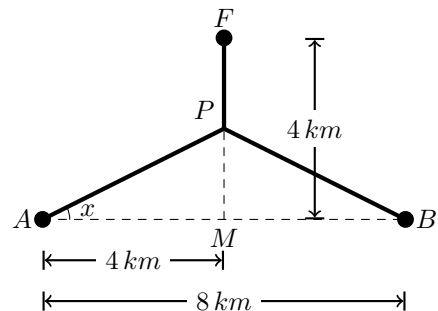
$$\begin{aligned} C &= \overline{PA} + \overline{PB} + \overline{FP} = 2\overline{PA} + \overline{FP} = 2 \left( \frac{4}{\operatorname{cos} x} \right) + 4 - 4 \operatorname{tg} x = \frac{8}{\operatorname{cos} x} + 4 - 4 \times \frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{cos} x} = \\ &= 4 + \frac{8}{\operatorname{cos} x} - \frac{4 \operatorname{sen} x}{\operatorname{cos} x} = 4 + \frac{8 - 4 \operatorname{sen} x}{\operatorname{cos} x} \end{aligned}$$

Logo, para cada  $x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ , o comprimento total da canalização é dado por  $g(x)$

144.2.

$$g(0) = 4 + \frac{8 - 4 \operatorname{sen} 0}{\operatorname{cos} 0} = 4 + \frac{8 - 4 \times 0}{1} = 4 + 8 = 12$$

Se o ângulo  $x$  tiver amplitude de 0 (zero) radianos, o comprimento da canalização é 12 km, o que pode ser observado na figura, porque com este valor do ângulo  $x$ , o comprimento é dado por  $\overline{AB} + \overline{FM} = 8 + 4 = 12$ , tendo a canalização a forma de um "T" invertido ( $\perp$ ).



144.3. Para determinar o valor de  $x$  para o qual o comprimento da canalização é mínimo, começamos por determinar a expressão da derivada:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(4 + \frac{8 - 4 \operatorname{sen} x}{\cos x}\right)' = (4)' + \left(\frac{8 - 4 \operatorname{sen} x}{\cos x}\right)' = 0 + \frac{(8 - 4 \operatorname{sen} x)'(\cos x) - (8 - 4 \operatorname{sen} x)(\cos x)'}{\cos^2 x} = \\ &= \frac{(0 - 4 \cos x)(\cos x) - (8 - 4 \operatorname{sen} x)(-\operatorname{sen} x)}{\cos^2 x} = \frac{-4 \cos^2 x - (-8 \operatorname{sen} x + 4 \operatorname{sen}^2 x)}{\cos^2 x} = \\ &= \frac{-4 \cos^2 x + 8 \operatorname{sen} x - 4 \operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} = \frac{-4(\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x) + 8 \operatorname{sen} x}{\cos^2 x} = \frac{-4 + 8 \operatorname{sen} x}{\cos^2 x} \end{aligned}$$

Depois, calculando os zeros da derivada, vem:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{-4 + 8 \operatorname{sen} x}{\cos^2 x} = 0 \Leftrightarrow -4 + 8 \operatorname{sen} x = 0 \wedge \underbrace{\cos^2 x \neq 0}_{(\text{PV}, x \in ]0, \frac{\pi}{4}[)} \Leftrightarrow 8 \operatorname{sen} x = 4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{sen} x = \frac{4}{8} \Leftrightarrow \operatorname{sen} x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \operatorname{sen} x = \operatorname{sen} \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee x = \pi - \frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Como  $x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ , a única solução da equação é  $x = \frac{\pi}{6}$ , ou seja este é o único zero da derivada, pelo que podemos, agora, estudar a variação do sinal de  $f'$  para relacionar com a monotonia de  $f$ :

$x$	0		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{4}$
$f'$	-	-	0	+	+
$f$	Máx.	$\searrow$	min	$\nearrow$	Máx.

Pelo que podemos concluir que  $x = \frac{\pi}{6}$  é o minimizante de  $f$ , ou seja é o valor de  $x$  para o qual o comprimento da canalização é mínimo.

Exame – 1988, 1.ª fase - 1.ª chamada (cód. 135)

145.

145.1.

$$\begin{aligned} g(x) = 0 &\Leftrightarrow \operatorname{sen} x + \operatorname{sen}(2x) = 0 \Leftrightarrow \operatorname{sen}(2x) = -\operatorname{sen} x \Leftrightarrow \operatorname{sen}(2x) = \operatorname{sen}(-x) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 2x = -x + 2k\pi \vee 2x = \pi - (-x) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow 3x = 2k\pi \vee 2x = \pi + x + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x = \frac{2k\pi}{3} \vee x = \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Como  $x \in [0, \pi]$ , os zeros da função obtêm-se para  $k = 0$  ou  $k = 1$ , ou seja, o conjunto dos zeros de  $g$  é  $\left\{0, \frac{2\pi}{3}, \pi\right\}$



145.2. Como o domínio de  $h$  é o conjunto  $[0, \pi] \setminus \frac{\pi}{2}$  não existem assíntotas não verticais do gráfico de  $h$ ; e as retas verticais de equações  $x = 0$ ,  $x = \frac{\pi}{2}$  e  $x = \pi$  são as únicas retas que podem ser assíntotas do gráfico de  $h$ . Verificando cada uma das três hipóteses, vem:

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{g(x)}{\cos x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x + \sin(2x)}{\cos x} = \frac{\sin(0^+) + \sin(2 \times 0^+)}{\cos 0^+} = \frac{0^+ + 0^+}{1} = 0$$

Logo, a reta  $x = 0$  **não é assíntota** do gráfico de  $h$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} h(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{g(x)}{\cos x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{\sin x + \sin(2x)}{\cos x} = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}^-\right) + \sin\left(2 \times \frac{\pi}{2}^-\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}^-\right)} = \frac{1 + \sin(\pi^-)}{0^+} = \frac{1 + 0^+}{0^+} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

Pelo que, a reta  $x = \frac{\pi}{2}$  **é uma assíntota** do gráfico de  $h$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow \pi^-} h(x) = \lim_{x \rightarrow \pi^-} \frac{g(x)}{\cos x} = \lim_{x \rightarrow \pi^-} \frac{\sin x + \sin(2x)}{\cos x} = \frac{\sin(\pi^-) + \sin(2 \times \pi^-)}{\cos \pi^-} = \frac{0^+ + 0^-}{1} = 0$$

Logo, a reta  $x = \pi$  **não é assíntota** do gráfico de  $h$

145.3. Recorrendo às definições de seno e cosseno vem:

$$\sin x = \frac{\overline{BH}}{\overline{BC}} \Leftrightarrow \sin x = \frac{\overline{BH}}{2} \Leftrightarrow \overline{BH} = 2 \sin x$$

$$\cos x = \frac{\overline{CH}}{\overline{BC}} \Leftrightarrow \cos x = \frac{\overline{CH}}{2} \Leftrightarrow \overline{CH} = 2 \cos x$$

Como  $\overline{AH} = 1$  e  $\overline{AC} = \overline{AH} + \overline{CH}$ , temos que:

$$\overline{AC} = \overline{AH} + \overline{CH} \Leftrightarrow \overline{AC} = 1 + \overline{CH} \Leftrightarrow \overline{AC} = 1 + 2 \cos x$$

Logo a área do triângulo  $[ABC]$  é:

$$\begin{aligned} A_{[ABC]} &= \frac{\overline{AC} \times \overline{BH}}{2} = \frac{(1 + 2 \cos x) \times 2 \sin x}{2} = \frac{2 \sin x + 4 \sin x \cos x}{2} = \sin x + 2 \sin x \cos x = \\ &= \sin x + \sin(2x) \end{aligned}$$

Ou seja, para cada valor de  $x \in ]0, \frac{\pi}{2}[$ , a área do triângulo  $[ABC]$  é dada por  $g(x)$

