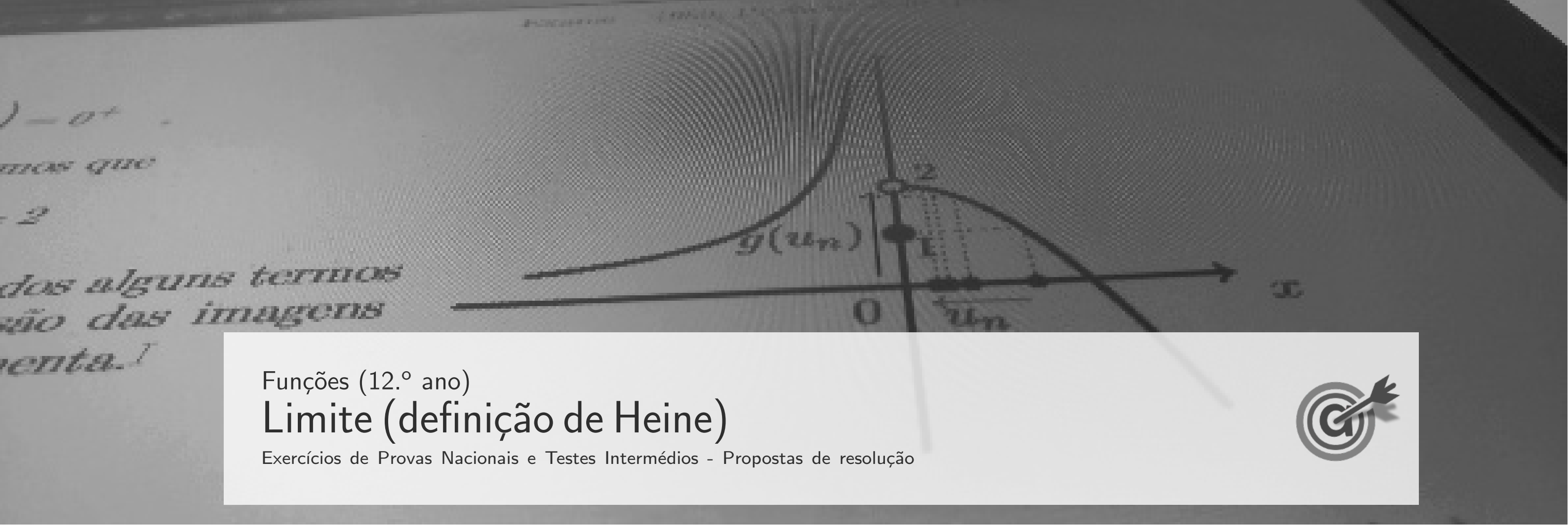


Funções (12.º ano)

Limite (definição de Heine)

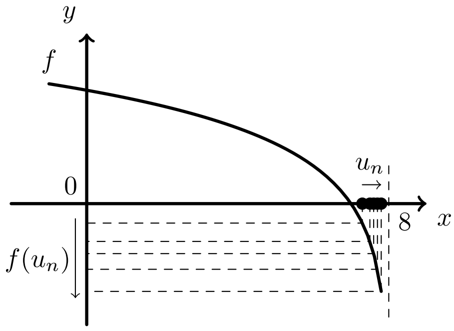
Exercícios de Provas Nacionais e Testes Intermédios - Propostas de resolução

1. Como $\lim u_n = \lim \left(\frac{8n-4}{n+1}\right) = \lim \left(\frac{8n}{n}\right) = 8$ e (u_n) é uma monótona crescente, então $\lim u_n = 8^-$

   E assim, vem que:

   $$\lim f(u_n) = \lim_{x \to 8^-} f(x) = \log_2(8 - 8^-) = \log_2(0^+) = -\infty$$

   Graficamente, na figura ao lado, estão representados alguns termos de (x_n) como objetos, e alguns termos da sucessão das imagens $g(x_n)$, que tendem para $-\infty$, quando o valor de n aumenta.

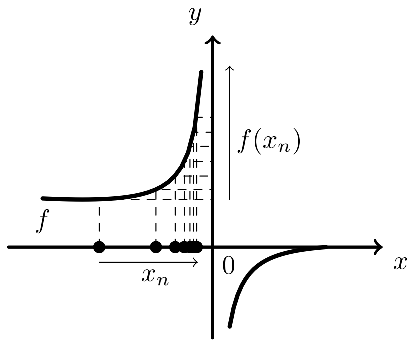
   Resposta: **Opção A**

Exame – 2020, 1.ª fase

2. Como $\lim x_n = \lim \left(-\frac{1}{n}\right) = 0^-$, então

   $$\lim f(x_n) = \lim_{x \to 0^-} f(x) = \frac{0-1}{e^{0^-}-1} = \frac{-1}{1^- - 1} = \frac{-1}{0^-} = +\infty$$

   Graficamente, na figura ao lado, estão representados alguns termos de (x_n) como objetos, e alguns termos da sucessão das imagens $f(x_n)$, que tendem para $+\infty$, quando o valor de n aumenta.

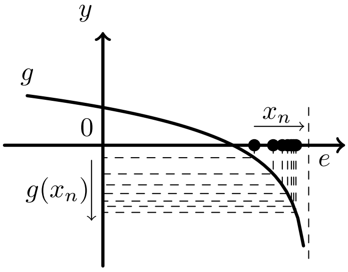
   Resposta: **Opção D**

Exame – 2014, Ép. Especial

3. Como $\lim x_n = \lim \left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right) = e^-$, então

   $$\lim g(x_n) = \lim_{x \to e^-} g(x) = \ln(e - e^-) = \ln(0^+) = -\infty$$

   Graficamente, na figura ao lado, estão representados alguns termos de (x_n) como objetos, e alguns termos da sucessão das imagens $g(x_n)$, que tendem para $-\infty$, quando o valor de n aumenta.

   Resposta: **Opção D**

Exame – 2014, 2.ª fase

4. Como $\lim x_n = \lim \frac{1}{\sqrt{n}} = 0^+$, então

$$\lim f\left(x_n\right) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = e^{\frac{1}{0^+}} - 3 = e^{+\infty} - 3 = +\infty - 3 = +\infty$$

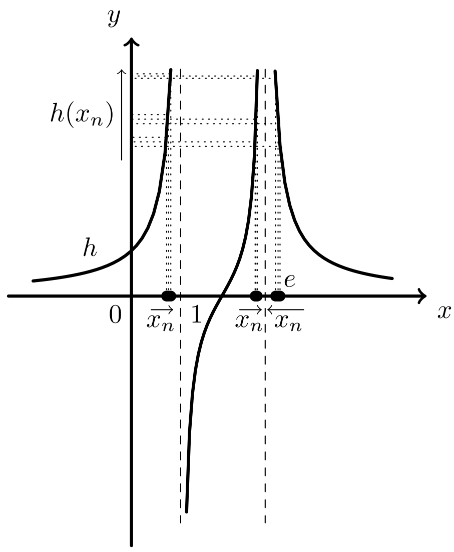
E assim

$$\lim \frac{2}{f\left(x_n\right)} = \frac{\lim 2}{\lim f\left(x_n\right)} = \frac{2}{+\infty} = 0$$

Resposta: **Opção C**

Exame – 2014, 1.ª fase

5. Como se pretende que $\lim h(x_n) = +\infty$, então, de acordo com o gráfico da função h, a expressão da sucessão (x_n) pode ser



- $\left(1 - \frac{1}{n}\right)$ porque como $\lim \left(1 - \frac{1}{n}\right) = 1^-$, temos que

$$\lim\ h\left(x_n\right) = \lim_{x\to 1^-} h(x) = +\infty$$

- $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ porque como $\lim \left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right) = e^-$, temos que

$$\lim\ h\left(x_n\right) = \lim_{x\to e^-} h(x) = +\infty$$

- $\left(e + \frac{1}{n}\right)$ porque como $\lim \left(e + \frac{1}{n}\right) = e^+$, temos que

$$\lim\ h\left(x_n\right) = \lim_{x\to e^+} h(x) = +\infty$$

Assim, concluímos que $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^3$ é a única expressão que não pode ser o termo geral da sucessão (x_n) porque como $\lim \left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^3\right) = 1^+$ temos que $\lim\ h\left(x_n\right) = \lim_{x\to 1^+} h(x) = -\infty$

Resposta: **Opção B**

Teste Intermédio 12.º ano – 30.04.2014

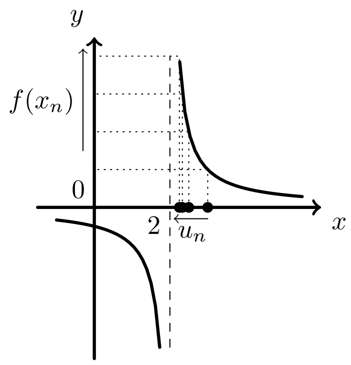
6. Temos que $\lim u_n = \lim \left(2 + \frac{1}{n}\right) = 2^+$

Como $\lim f(u_n) = +\infty$ então $\lim f(u_n) = \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = +\infty$

No gráfico da opção (A), temos que $0 < \lim f(u_n) < 2$ pelo que $\lim f(u_n) = \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) \neq +\infty$

No gráfico da opção (B), temos que $-2 < \lim f(u_n) < 0$ pelo que $\lim f(u_n) = \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) \neq +\infty$

No gráfico da opção (D), temos que $\lim f(u_n) = \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) \neq -\infty$



No gráfico da opção (C) temos que $\lim f(u_n) = \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = +\infty$ (como se ilustra graficamente na figura anterior.

Resposta: **Opção C**

Teste Intermédio 12.º ano – 28.02.2013

7. Como (x_n) é uma sucessão com termos em $]-1,1[$ e $\lim(x_n) = 1$, então

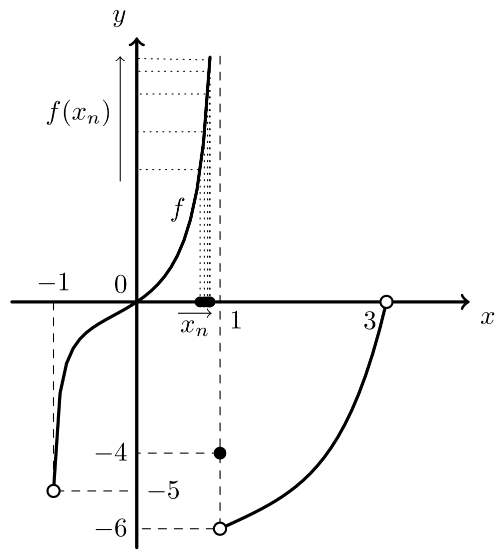
$$\lim x_n = 1^-$$

E assim, de acordo com o gráfico, temos que

$$\lim f\,(x_n) = \lim_{x \to 1^-} f(x) = +\infty$$

Graficamente, na figura ao lado, estão representados alguns termos de (x_n) como objetos, e alguns termos da sucessão das imagens $f(x_n)$, que tendem para $+\infty$, quando (x_n) tende para 1

Resposta: **Opção A**



Exame – 2012, 2.ª Fase

8. Como $\lim u_n = \lim \left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right) = e$, então $\lim f(u_n) = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to e} f(x) = 0$

Calculado $\lim\limits_{x \to e} f(x)$ para cada uma das expressões algébricas apresentadas, temos:

- Se $f(x) = 1 - \ln x$ então $\lim\limits_{x \to e} f(x) = \lim\limits_{x \to e}(1 - \ln x) = 1 - \ln e = 1 - 1 = 0$
- Se $f(x) = 1 + \ln x$ então $\lim\limits_{x \to e} f(x) = \lim\limits_{x \to e}(1 + \ln x) = 1 + \ln e = 1 + 1 = 2$
- Se $f(x) = x - \ln x$ então $\lim\limits_{x \to e} f(x) = \lim\limits_{x \to e}(x - \ln x) = e - \ln e$
- Se $f(x) = x + \ln x$ então $\lim\limits_{x \to e} f(x) = \lim\limits_{x \to e}(x + \ln x) = e + \ln e$

Desta forma, de entre as hipóteses apresentadas, a única expressão algébrica em que $\lim\limits_{x \to e} f(x) = 0$ é $1 - \ln x$

Resposta: **Opção A**

Teste Intermédio 12.º ano – 13.03.2012

9. Se $\lim u_n = k$, então $\lim f(u_n) = 3 \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to k} f(x) = 3$

Calculado $k = \lim u_n$ e $\lim\limits_{x \to k} f(x)$ para cada uma das sucessões apresentadas, temos:

- $\lim u_n = \lim \left(2 - \dfrac{1}{n}\right) = 2 - \dfrac{1}{+\infty} = 2 - 0^+ = 2^-$
  E assim, $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} (e^x - 1) = e^{2^-} - 1 = e^2 - 1$
- $\lim u_n = \lim \left(2 + \dfrac{1}{n}\right) = 2 + \dfrac{1}{+\infty} = 2 + 0^+ = 2^+$
  E assim, $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} \left(\dfrac{4}{x} + 1\right) = \dfrac{4}{2^+} + 1 = 2 + 1 = 3$
- $\lim u_n = \lim \left(3 - \dfrac{1}{n}\right) = 3 - \dfrac{1}{+\infty} = 3 - 0^+ = 3^-$
  E assim, $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 3^-} \left(\dfrac{4}{x} + 1\right) = \dfrac{4}{3^-} + 1 = \dfrac{4}{3} + \dfrac{3}{3} = \dfrac{7}{3}$
- $\lim u_n = \lim \left(3 + \dfrac{1}{n}\right) = 3 + \dfrac{1}{+\infty} = 3 + 0^+ = 3^+$
  E assim, $\lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 3^+} \left(\dfrac{4}{x} + 1\right) = \dfrac{4}{3^+} + 1 = \dfrac{4}{3} + \dfrac{3}{3} = \dfrac{7}{3}$

Desta forma, de entre as hipóteses apresentadas, a única sucessão em que $\lim f(u_n) = 3$ é $2 + \dfrac{1}{n}$

Resposta: **Opção B**

Exame – 2011, Prova especial

10. Como

$$\lim u_n = \lim \left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{+\infty} = 0^+$$

então

$$\lim_{n \to +\infty} g(u_n) = \lim_{x \to 0^+} g(x) = \lim_{x \to 0^+} \ln x = \ln 0^+ = -\infty$$

Resposta: **Opção D**

Exame – 2010, 2.ª Fase

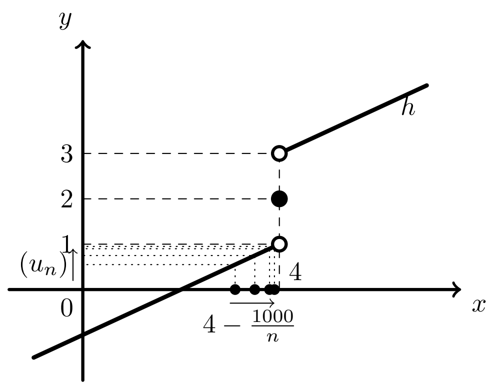
11. Como

$$\lim \left(4 - \frac{1000}{n}\right) = 4 - \frac{1000}{+\infty} = 4 - 0^+ = 4^-$$

então, pela observação do gráfico da função h, temos que

$$\lim u_n = \lim \left(h\left(4 - \frac{1000}{n}\right)\right) = \lim_{x \to 4^-} h(x) = 1$$

Graficamente, na figura ao lado, estão representados alguns termos de $\left(4 - \dfrac{1000}{n}\right)$ como objetos, e alguns termos da sucessão (u_n) no eixo vertical, que tendem para 1^-, quando o valor de n aumenta.



Resposta: **Opção B**

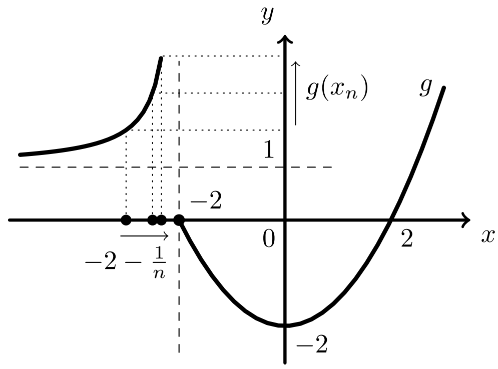
Teste Intermédio 12.º ano – 15.03.2010

12. Como $\lim\limits_{n\to+\infty} g(x_n) = +\infty$, e como, pela observação do gráfico temos que $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$ e que $\lim\limits_{x\to-2^-} g(x) = +\infty$, temos que

$$\lim(x_n) = +\infty \text{ ou então } \lim(x_n) = -2^-$$

Assim, calculando os limites das sucessões de cada uma das hipóteses, temos:

- $\lim\left(-2+\dfrac{2}{n}\right) = -2+0^+ = -2^+$
- $\lim\left(-2-\dfrac{1}{n}\right) = -2-0^+ = -2^-$
- $\lim\left(1+\dfrac{1}{n}\right) = 1+0^+ = 1^+$
- $\lim\left(1-\dfrac{1}{n}\right) = 1-0^+ = 1^-$



Pelo que, de entre os termos gerais de sucessões apresentados, o único em que $\lim\limits_{n\to+\infty} g(x_n) = +\infty$ é $-2-\dfrac{1}{n}$

Graficamente, na figura anterior, estão representados alguns termos da sucessão $x_n = -2+\dfrac{1}{n}$ como objetos, e alguns termos da sucessão das imagens $g(x_n)$, que tendem para $+\infty$, quando o valor de n aumenta.

Resposta: **Opção B**

Exame – 2008, 2.ª Fase

13. Como

$$\lim(u_n) = \lim\left(\frac{n+1}{n^2}\right) = \lim\left(\frac{n}{n^2}+\frac{1}{n^2}\right) = \lim\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right) = 0^+ + 0^+ = 0^+$$

Temos que

$$\lim_{n\to+\infty} g(u_n) = \lim_{x\to0^+} g(x) = \lim_{x\to0^+}\frac{e^x+5}{2+\cos x} = \frac{e^0+5}{2+\cos(0)} = \frac{1+5}{2+1} = \frac{6}{3} = 2$$

Resposta: **Opção C**

Exame – 2006, 1.ª fase

14. Como

$$\lim(x_n) = \lim\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right) = e$$

Temos que

$$\lim y_n = \lim(1+\ln(x_n)) = 1+\ln e = 1+1 = 2$$

Resposta: **Opção A**

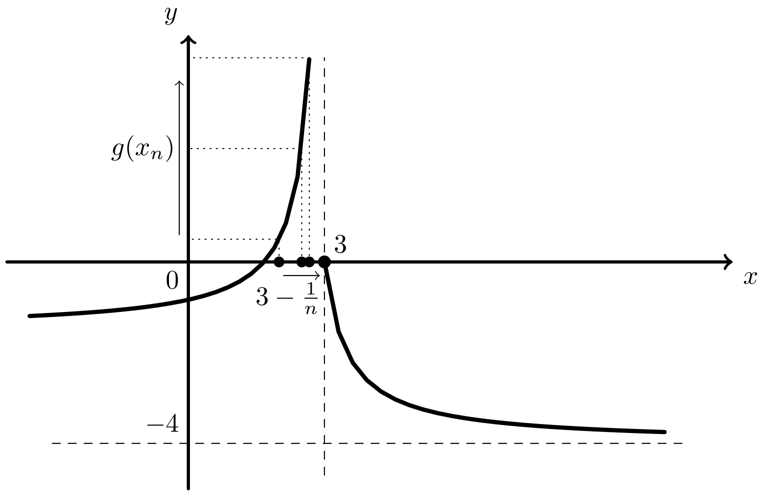
Teste Intermédio 12.º ano – 17.03.2006

15. Como $\lim\limits_{n\to+\infty} g(x_n) = +\infty$, e como, pela observação do gráfico temos que $\lim\limits_{x\to 3^-} g(x) = +\infty$, então

$$\lim(x_n) = 3^-$$

Assim, calculando os limites das sucessões de cada uma das hipóteses, temos:

- $\lim\left(3-\dfrac{1}{n}\right) = 3 - 0^+ = 3^-$
- $\lim\left(3+\dfrac{1}{n}\right) = 3 + 0^+ = 3^+$
- $\lim\left(-4-\dfrac{1}{n}\right) = -4 - 0^+ = -4^-$
- $\lim\left(-4+\dfrac{1}{n}\right) = -4 + 0^+ = -4^+$



Pelo que, de entre os termos gerais de sucessões apresentados, o único em que $\lim\limits_{n\to+\infty} g(x_n) = +\infty$ é $3-\dfrac{1}{n}$

Graficamente, na figura anterior, estão representados alguns termos da sucessão $x_n = 3-\dfrac{1}{n}$ como objetos, e alguns termos da sucessão das imagens $g(x_n)$, que tendem para $+\infty$, quando o valor de n aumenta.

Resposta: **Opção A**

Exame – 2001, Ép. Especial

16. Como

$$\lim(u_n) = \lim\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right) = e$$

Temos que

$$\lim f(u_n) = \lim_{x\to e} f(x) = \lim_{x\to e} \ln x = \ln e = 1$$

Resposta: **Opção C**

Exame – 1999, Prova para militares (prog. antigo)

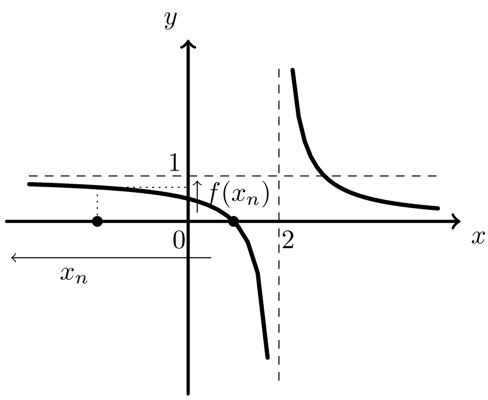
17. Como

$$\lim(x_n) = \lim\left(2-n^2\right) = 2-\infty = -\infty$$

E como a reta $x = 1$ é assintota do gráfico de f, quando $x \to -\infty$, temos que

$$\lim f(x_n) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = 1$$

Graficamente, na figura ao lado, estão representados alguns termos de (x_n) como objetos, e alguns termos da sucessão das imagens $f(x_n)$, que tendem para 1, quando o valor de n aumenta.



Resposta: **Opção B**

Exame – 1999, 1.ª fase - 1.ª chamada (prog. antigo)

18. Como

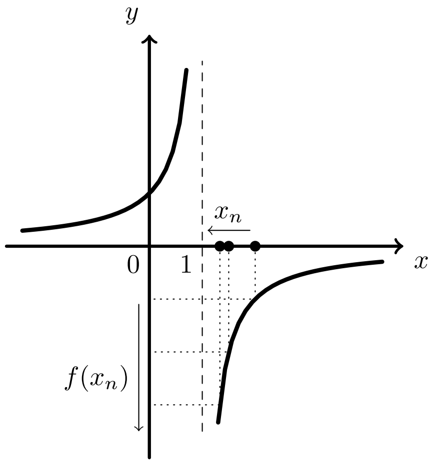
$$\lim(x_n) = \lim\left(1+\frac{1}{n}\right) = 1+0^+ = 1^+$$

E como a reta $y=1$ é assintota do gráfico de f, pela observação do gráfico, temos que

$$\lim(u_n) = \lim f(x_n) = \lim_{x\to 1^+} f(x) = -\infty$$

Graficamente, na figura ao lado, estão representados alguns termos de (x_n) como objetos, e alguns termos da sucessão das imagens $f(x_n)$, que tendem para $-\infty$, quando o valor de n aumenta.

Resposta: **Opção A**



Exame – 1999, Prova modelo (prog. antigo)

19. Como

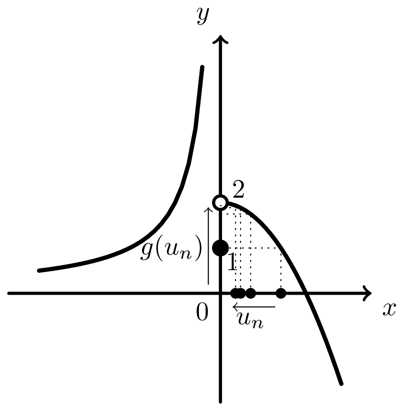
$$\lim(u_n) = \lim\left(\frac{1}{n}\right) = 0^+$$

Pela observação do gráfico da função g, temos que

$$\lim_{n\to+\infty} g(u_n) = \lim_{x\to 0^+} g(x) = 2$$

Graficamente, na figura ao lado, estão representados alguns termos de (u_n) como objetos, e alguns termos da sucessão das imagens $g(u_n)$, que tendem para 2, quando o valor de n aumenta.

Resposta: **Opção C**



Exame – 1998, Prova modelo (prog. antigo)