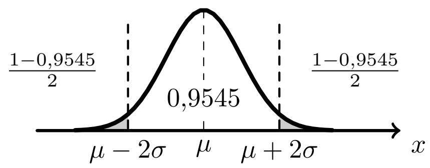
MATEMÁTICA A - 12.º Ano
Probabilidades - Distribuição normal
Propostas de resolução

Exercícios de exames e testes intermédios

1. Como $\mu = 5$ e $sigma = \frac{1}{2}$, então $P(X > 6) = P(X > 5 + 2 \times \frac{1}{2}) = P(X > \mu + 2\sigma)$

   Assim, temos que $P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0{,}9545$ e como $P(X < \mu - 2\sigma) = P(X > \mu + 2\sigma)$, temos que:

   $$P(X > 6) = P(X > \mu + 2\sigma) \approx \frac{1 - 0{,}9545}{2} \approx 0{,}023$$

   Resposta: **Opção C**

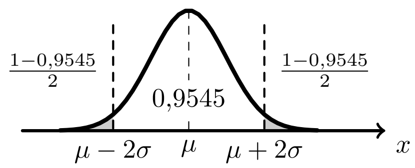
Exame – 2019, 1.ª Fase

2. Como $P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0{,}9545$ e $P(X < \mu - 2\sigma) = P(X > \mu + 2\sigma)$, temos que:

   $$P(X < \mu - 2\sigma) \approx \frac{1 - 0{,}9545}{2}$$

   E assim, vem que:

   $$P(X > \mu - 2\sigma) = 1 - P(X < \mu - 2\sigma) \approx 1 - \frac{1 - 0{,}9545}{2} \approx 0{,}977$$

   Resposta: **Opção C**

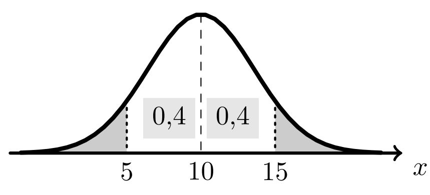
Exame – 2018, 2.ª Fase

3. Como a distribuição normal é simétrica em relação ao valor médio (10), temos que:

   $$P(\mu < X < \mu + k) = P(\mu - k < X < \mu)$$

   e assim:

   - $P(5 < X < 10) = P(10 < X < 15) = 0{,}4$
   - $P(5 < X < 15) = P(5 < X < 10) + P(10 < X < 15) =$ $= 0{,}4 + 0{,}4 = 0{,}8$
   - $P(X < 5 \vee X > 15) = 1 - P(5 < X < 15) = 1 - 0{,}8 = 0{,}2$

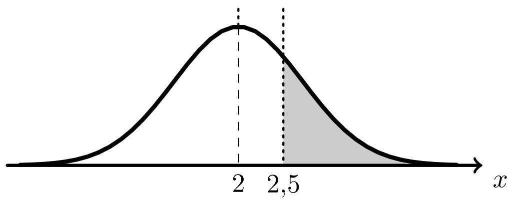
   Resposta: **Opção B**

Exame – 2017, Ép. especial

4. Atendendo a que a variável aleatória X segue uma distribuição normal, com $\mu = 2$ e $\sigma = 0{,}5$, temos que:

- $P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) = P(1{,}5 < X < 2{,}5) \approx 0{,}6827$
- $P(X > \mu + \sigma) = P(X > 2{,}5) =$

  $= \dfrac{1 - P(1{,}5 < X < 2{,}5)}{2} \approx \dfrac{1 - 0{,}6827}{2} \approx 0{,}16$



Resposta: **Opção D**

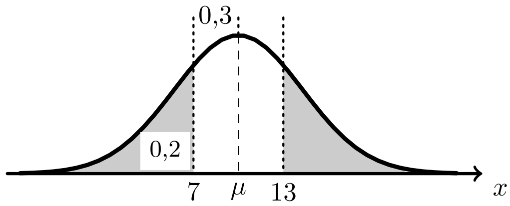
Exame – 2016, Ép. especial

5. Atendendo às características da distribuição normal, temos que:

- $P(X < 10) = 0{,}5$
- $P(X < 7) = P(X < 10) - P(7 < X < 10) =$
  $= 0{,}5 - 0{,}3 = 0{,}2$

Logo como a distribuição normal é simétrica em relação ao valor médio e como 7 e 13 são valores equidistantes da média ($10 - 7 = 3$ e $13 - 10 = 3$), temos que:

$$P(X > 13) = P(X < 7) = 0{,}2$$

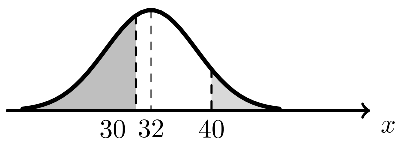


Resposta: **Opção B**

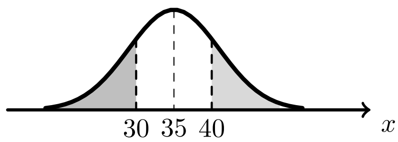
Exame – 2016, 1.ª Fase

6. Analisando as hipóteses de respostas, temos:

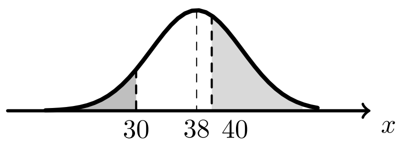
- Se $\mu = 32$, $P(X < 30) > P(X > 40)$ porque, como 30 está mais próximo do valor médio, e nenhuma das probabilidades excede 0,5, a probabilidade correspondente a $P(X > 30)$ é maior.



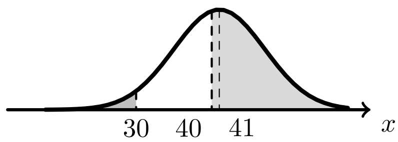
- Se $\mu = 35$, $P(X < 30) = P(X > 40)$ porque os dois valores são equidistantes da média e a distribuição é simétrica.



- Se $\mu = 38$, $P(X < 30) < P(X > 40)$ porque, como 40 está mais próximo do valor médio, e nenhuma das probabilidades excede 0,5, a probabilidade correspondente a $P(X > 40)$ é maior.



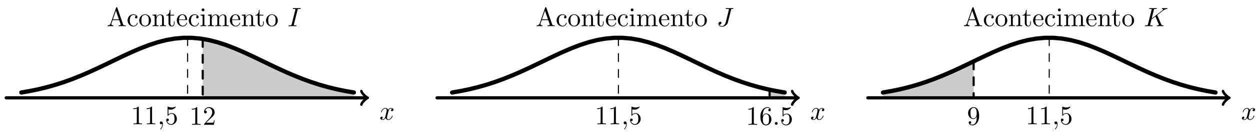
- Se $\mu = 41$, $P(X < 30) < P(X > 40)$ porque, $P(X > 40) > 0{,}5$ e $P(X < 30) < 0{,}5$



Resposta: **Opção A**

Teste Intermédio 12.º ano – 29.11.2013

7. Esboçando a representação da representação geométrica das probabilidades dos três acontecimentos, vem:



Assim podemos afirmar que o acontecimento I é o mais provável e o acontecimento J, o menos provável, pelo que:

$$P(J) < P(K) < P(I)$$

Resposta: **Opção A**

Exame – 2013, Ép. especial

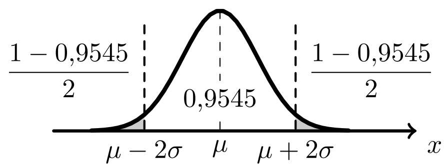
8. Como $P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0{,}9545$ e $P(X < \mu - 2\sigma) = P(X > \mu + 2\sigma)$, temos que:

$$P(X > \mu + 2\sigma) \approx \frac{1 - 0{,}9545}{2} = 0{,}02275$$

Assim, $\mu + 2\sigma = 23$, e como $\mu = 11$, vem:

$$11 + 2\sigma = 23 \quad \Leftrightarrow \quad \sigma = \frac{23 - 11}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \sigma = \frac{12}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \sigma = 6$$

Resposta: **Opção C**



Exame – 2013, 1.ª Fase

9. Como a distribuição normal é simétrica em relação ao valor médio, temos que:

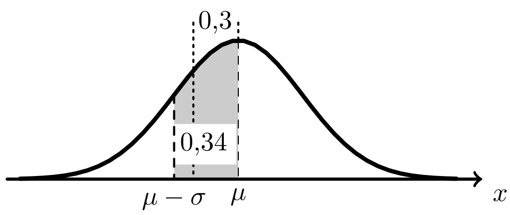
Como $P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0{,}6827$, então $P(\mu - \sigma < X) \approx 0{,}34135$

Assim, como $P(4{,}7 < X < 5) = 0{,}3$, e $0{,}3 < 0{,}34135$ temos que:

$$4{,}7 > 5 - \sigma \quad \Leftrightarrow \quad \sigma > 5 - 4{,}7 \quad \Leftrightarrow \quad \sigma > 0{,}3$$

Logo a única opção compatível com esta restrição é o valor 0,4

Resposta: **Opção D**



Teste Intermédio 12.º ano – 28.02.2013

10. Como a experiência ≪*Analisar um pacote de açúcar*≫ se repete dez vezes, de forma independente, a distribuição de probabilidades da variável X:≪*Número de pacotes em condições de serem comercializados*≫, segue o modelo binomial $\left(P(X = k) = {}^nC_k\, p^k\, q^{n-k}\right)$.

Considerando como sucesso o acontecimento ≪*Pacote estar em condições de ser comercializado*≫, a respetiva probabilidade, é:

$$p = P(5{,}7 < Y < 7{,}3) = P(6{,}5 - 2 \times 0{,}4 < Y < 6{,}5 + 2 \times 0{,}4) = P(\mu - 2\sigma < Y < \mu + 2\sigma) \approx 0{,}9545$$

Logo, $q = 1 - p = 1 - P(5{,}7 < Y < 7{,}3) \approx 1 - 0{,}9545 = 0{,}0455$

Assim temos $n = 10$, vem $p \approx 0{,}9545$ e $q \approx 0{,}0455$, pelo que:

$$P(X = 8) = {}^{10}C_8 \times (0{,}9545)^8 \times (0{,}0455)^2 \approx 0{,}064$$

Exame – 2012, 2.ª Fase

11. Como a variável X segue uma distribuição normal com $\mu = 6$, temos que:

- $P(B) = P(X > 6) = P(X > \mu) = 0{,}5$

- $P(X < 7) = 1 - P(X > 7) = 1 - 0{,}1 = 0{,}9$ e $P(X < 6) = P(X > 6) = 0{,}5$

  Logo $P(A \cap B) = P(6 < X < 7) = P(X < 7) - P(X < 6) = 0{,}9 - 0{,}5 = 0{,}4$

Assim, recorrendo à fórmula da probabilidade condiciona, temos que:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0{,}4}{0{,}5} = \frac{\frac{4}{10}}{\frac{5}{10}} = \frac{4}{5}$$

Resposta: **Opção B**

Teste Intermédio 12.º ano – 13.03.2012

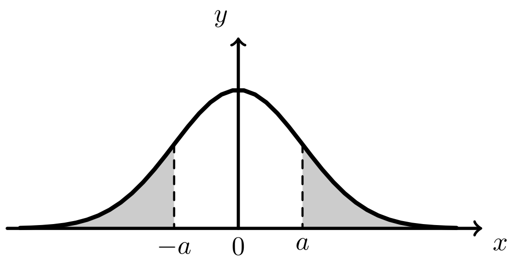
12. Como $a \in \mathbb{R}^+$, e a variável X segue uma distribuição normal, com $\mu = 0$, sabemos que a distribuição é simétrica relativamente à reta $x = 0$.
Assim, como $P(X \geq 0) = P(X \leq 0) = 0{,}5$, temos que:

- Como $a > 0$, então $P(X \geq a) < 0{,}5$, logo $P(X \leq -a) < 0{,}5$
- $P(X \leq a) = 1 - P(X \geq a)$, pelo que, $P(X \leq a) > 0{,}5$ e também $P(X \geq -a) > 0{,}5$

Desta forma podemos afirmar que:

- $P(X \leq a) + P(X \geq -a) > 0$
- $P(X \leq a) + P(X \geq -a) < 1$
- $P(X \leq a) > P(X \geq a)$

Como a distribuição é simétrica e a e $-a$ são valores equidistantes do valor médio, temos que $P(X \leq a) = P(X \geq -a)$



Resposta: **Opção B**

Exame – 2011, 2.ª Fase

13. Como a variável X segue uma distribuição normal, com $\mu = 80$, temos que:
$P(X < 80) = 0{,}5$, logo, como $P(76 < X < 80) = 0{,}4$, temos que

$$P(76 < X < 80) = P(X < 80) - P(X < 76) \Leftrightarrow 0{,}4 = 0{,}5 - P(X < 76) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P(X < 76) = 0{,}5 - 0{,}4 \Leftrightarrow P(X < 76) = 0{,}1$$

Como a distibuição é simétrica relativamente ao valor médio, temos que $P(X < 76) = P(X > a)$ e $\mu - 76 = 80 - 76 = 4$, logo,

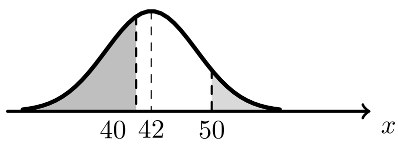
$$a = \mu + 4 \Leftrightarrow a = 80 + 4 \Leftrightarrow a = 84$$

Resposta: **Opção C**

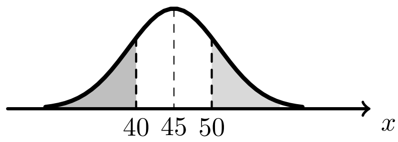
Teste Intermédio 12.º ano – 19.01.2011

14. Analisando as hipóteses de respostas, temos:

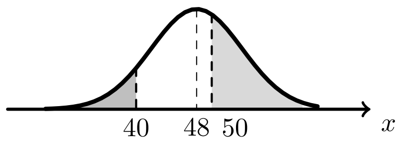
- Se $\mu = 42$, $P(X > 50) < P(X < 40)$ porque, como 40 está mais próximo do valor médio, e nenhuma das probabilidades excede 0,5, a probabilidade correspondente a $P(X < 40)$ é maior.



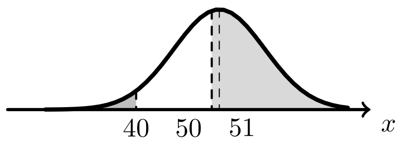
- Se $\mu = 45$, $P(X < 50) = P(X > 40)$ porque os dois valores são equidistantes da média e a distribuição é simétrica.



- Se $\mu = 48$, $P(X < 50) > P(X > 40)$ porque, como 50 está mais próximo do valor médio, e nenhuma das probabilidades excede 0,5, a probabilidade correspondente a $P(X > 50)$ é maior.



- Se $\mu = 51$, $P(X < 50) > P(X > 40)$ porque, $P(X > 50) > 0{,}5$ e $P(X < 40) < 0{,}5$



Resposta: **Opção A**

Teste Intermédio 12.º ano – 04.12.2009

15. Como a variável X segue uma distribuição normal, com $\mu = 5$, temos que: $P(X \geq 5) = 0{,}5$, logo, como $P(5 \leq X \leq 6) = 0{,}4$, temos que

$$P(5 \leq X \leq 6) = P(X \geq 5) - P(X \geq 6) \Leftrightarrow 0{,}4 = 0{,}5 - P(X \geq 6) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P(X \geq 6) = 0{,}5 - 0{,}4 \Leftrightarrow P(X \geq 6) = 0{,}1$$

Como a distribuição é simétrica relativamente ao valor médio, temos que $P(X \geq 6) = P(X \leq 4)$ logo $P(X \leq 4) = 0{,}1$, e desta forma,

- Como $P(X \leq 4) = 0{,}1$ então $P(X \geq 4) = 1 - 0{,}1 = 0{,}9$, pelo que $P(X \geq 2) \geq P(X \geq 4) \Leftrightarrow P(X \geq 2) \geq 0{,}9$
- $P(4 \leq X \leq 5) = P(5 \leq X \leq 6) = 0{,}4$
- $P(4 \leq X \leq 6) = P(4 \leq X \leq 5) + P(5 \leq X \leq 6) = 0{,}4 + 0{,}4 = 0{,}8$
- $P(X \leq 4) = P(X \geq 6)$ logo $P(X \leq 4) = 0{,}1$

Resposta: **Opção B**

Exame – 2009, Ép. especial

16. Como a variável aleatória X segue uma distribuição normal, com $\mu = 9$, temos que: $P(9 - 3\sigma < X < 9 + 3\sigma) = 99{,}73\%$

Como $P(8{,}7 < X < 9{,}3) = 99{,}73\%$, temos que $9 - 3\sigma = 8{,}7$ e $9 + 3\sigma = 9{,}3$

Assim, vem que: $9 - 3\sigma = 8{,}7 \Leftrightarrow 9 - 8{,}7 = 3\sigma \Leftrightarrow 0{,}3 = 3\sigma \Leftrightarrow 0{,}1 = \sigma$

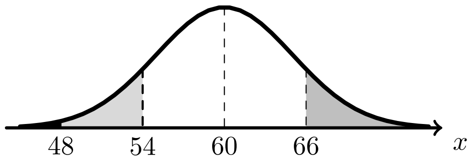
(Ou, em alternativa: $9 + 3\sigma = 9{,}3 \Leftrightarrow 3\sigma = 9{,}3 - 9 \Leftrightarrow 3\sigma = 0{,}3 \Leftrightarrow \sigma = 0{,}1$)

Resposta: **Opção A**

Teste Intermédio 12.º ano – 10.12.2008

17. Como a variável aleatória X segue uma distribuição normal, temos que, $P(X < \mu - k) = P(X > \mu + k)$, $k \in \mathbb{R}^+$, e como $\mu = 60$ e $\sigma = 5$, vem:

   - $P(X > 66) = P(X > 60 + 6) = P(X < 60 - 6) = P(X < 54)$
   - Como $48 < 54 < \mu$, temos que $P(X < 48) < P(X < 54)$

   Assim, como $P(A) = P(X < 54)$, e $P(B) = P(X < 48)$, temos

   $$P(B) < P(A)$$

   Resposta: **Opção C**

Exame – 2008, 1.ª Fase

18. Como a variável aleatória X segue uma distribuição normal, e $\mu = 2$ temos que:

   - $P(X > 1) = P(1 < X < 2) + P(X > 2) > 50\%$
   - $P(X > 1{,}5) = P(1{,}5 < X < 2) + P(X > 2) > 50\%$
   - $P(X > 2) = 50\%$
   - $P(X > 2{,}5) = P(X > 2) - P(2 < X < 2{,}5) < 50\%$

   Logo, de entre os valores de a apresentados nas opções, 2,5 é o único compatível com $P(X > a) = 15\%$

   Resposta: **Opção D**

Teste Intermédio 12.º ano – 17.01.2008

19. Como a variável aleatória X segue uma distribuição normal, e $\mu = 140$, temos que $P(X \leq 140) = P(X \geq 140) = 50\%$, logo

   - $P(140 \leq X \leq 170) = P(X \geq 140) - P(X \geq 170)$, logo $P(140 \leq X \leq 170) < 50\%$
   - $P(120 \leq X \leq 140) = P(X \leq 140) - P(X \leq 120)$, logo $P(120 \leq X \leq 140) < 50\%$
   - $P(130 \leq X \leq 150) = 1 - P(X \leq 130) - P(X \geq 150)$
   - $P(150 \leq X \leq 180) = P(X \geq 150) - P(X \geq 180)$, logo $P(150 \leq X \leq 180) < 50\%$

   Assim, de entre os pares de valores de a e de b apresentados nas opções, $a = 130$ e $b = 150$ é o único par compatível com $P(a \leq X \leq b) = 60\%$

   Resposta: **Opção C**

Teste Intermédio 12.º ano – 07.12.2006

20. Como a variável X segue uma distribuição normal de valor médio 40, temos que: $P(X > 45) = P(X < 35)$. Assim:

   - Como $P(X > 45) = 0{,}2$ temos que $P(X < 35) = 0{,}2$
   - Como $P(X < 40) = 0{,}5$

   Logo, $P(35 < X < 40) = P(X < 40) - P(X < 35) = 0{,}5 - 0{,}2 = 0{,}3$

   Resposta: **Opção C**

Teste Intermédio 12.º ano – 07.12.2005

21. Como as duas distribuições são simétricas relativamente à mesma reta, e a distribuição normal é simétrica relativamente ao valor médio, temos que os valores médios das duas distribuições são iguais, ou seja, $a = c$

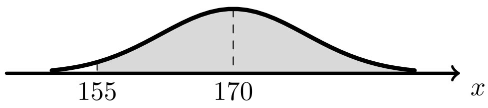
Como a distribuição $N(a,b)$ apresenta observações próximas do valor médio com maior probabilidade associada, verificamos que as observações estão mais concentradas, ou seja a dispersão é comparativamente menor.
Da mesma forma, como a distribuição $N(c,d)$ apresenta observações mais afastadas do valor médio com maior probabilidade associada, podemos afirmar que as observações estão mais dispersas, ou seja, com dispersão comparativamente maior.
Logo, $d > b \quad \Leftrightarrow \quad b < d$

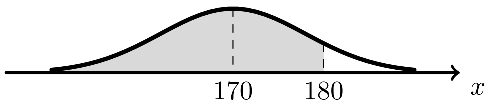
Resposta: **Opção B**

Exame – 2002, 1.ª Fase – 2.ª chamada

22. Considerando X a variável aleatória, com valor médio $\mu = 170$, temos que:

- $P(X > 180) < 0{,}5$
- $P(X < 180) > 0{,}5$
- $P(X > 155) > 0{,}5$
- $P(X < 155) < 0{,}5$





Como $|\mu - 155| > |\mu - 180|$, ou seja, o valor 155 está mais afastado do valor médio, temos que $P(X > 155) > P(X < 180)$.

Resposta: **Opção C**

Prova modelo – 2001