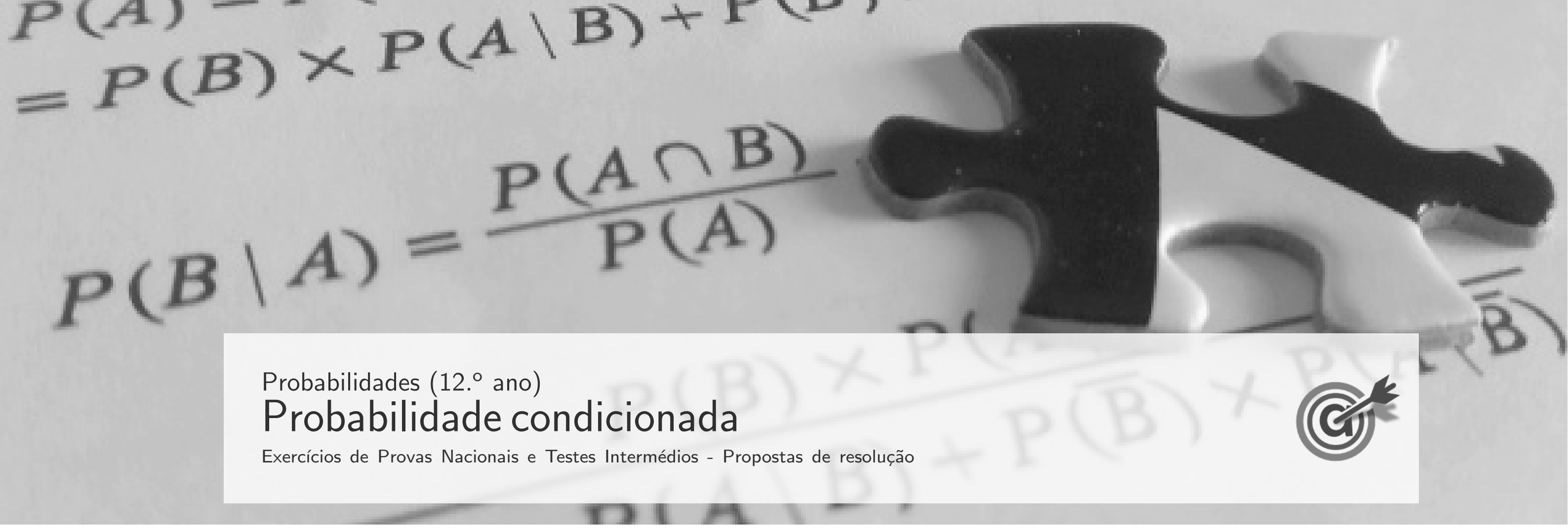

Probabilidades (12.º ano)

Probabilidade condicionada

Exercícios de Provas Nacionais e Testes Intermédios - Propostas de resolução

1. Designando por a o número de bolas amarela inicialmente existentes no saco e por v o número de bolas verdes inicialmente existentes no saco, temos que:

   - $P(A) = \dfrac{a}{a+v}$
   - $P(B|A) = \dfrac{a-1}{a-1+v}$

   E assim, como $P(B|A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)} \Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A) \times P(B|A)$, e como $a \geq 1$ e $v \geq 1$, então $a - 1 + v \geq 1$, ou seja, $a - 1 + v \neq 0$ e assim vem que:

   $$P(A \cap B) = \frac{2}{3}P(A) \Leftrightarrow P(A) \times P(B|A) = \frac{2}{3}P(A) \Leftrightarrow P(B|A) = \frac{\frac{2}{3}P(A)}{P(A)} \Leftrightarrow P(B|A) = \frac{2}{3} \Leftrightarrow$$

   $$\Leftrightarrow \frac{a-1}{a-1+v} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow 3(a-1) = 2(a-1+v) \Leftrightarrow 3a - 3 = 2a - 2 + 2v \Leftrightarrow a = 2v + 1$$

   Logo, como v é um número natural, $2v$ é um número par, e $2v+1$ é um número ímpar, ou seja, o número de bolas amarela inicialmente existentes no saco, a, é um número ímpar.

   Exame – 2024, Ép. especial

2. Temos que:

   - Pelas leis de De Morgan e pela teorema do acontecimento contrário, temos que $P\left(\overline{A} \cap \overline{B}\right) = P\left(\overline{A \cup B}\right) = 1 - P\left(A \cup B\right)$, e assim, vem que:

     $$P\left(\overline{A} \cap \overline{B}\right) = 9P(A \cap B) \Leftrightarrow 1 - P\left(A \cup B\right) = 9P(A \cap B) \Leftrightarrow 1 - 9\left(A \cap B\right) = P(A \cup B)$$

   - Pelo teorema do acontecimento contrário, vem que:

     $$P\left(\overline{A}\right) = 3P(B) \Leftrightarrow 1 - P\left(A\right) = 3P(B)$$

   - Pelo teorema da união de acontecimentos não disjuntos, temos que:

     $$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Leftrightarrow 1 - 9P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Leftrightarrow$$

     $$\Leftrightarrow 1 - P(A) = P(B) - P(A \cap B) + 9P(A \cap B) \Leftrightarrow 3P(B) = P(B) + 8P(A \cap B) \Leftrightarrow$$

     $$\Leftrightarrow 3P(B) - P(B) = 8P(A \cap B) \Leftrightarrow 2P(B) = 8P(A \cap B) \Leftrightarrow P(B) = \frac{8P(A \cap B)}{2} \Leftrightarrow P(B) = 4P(A \cap B)$$

   Assim, pela definição de probabilidade condicionada, temos que:

   $$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A \cap B)}{4P(A \cap B)} = \frac{1}{4}$$

   Exame – 2024, 2.ª Fase

3. Considerando a experiência aleatória que consiste em selecionar ao acaso, um dos candidatos que participaram no primeiro dia das audições, e os acontecimentos:
V:≪O candidato é violinista≫
N:≪O candidato é português≫

Temos que $P\left(V\right) = \frac{3}{5}$, $P\left(N\right) = P\left(\overline{N}\right) = \frac{1}{2}$ e $P(\overline{V} \cap \overline{N}) = \frac{3}{10} \times P\left(\overline{N}\right) = \frac{3}{10} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{20}$

Assim, organizando os dados numa tabela obtemos:

- $P\left(\overline{V}\right) = 1 - P(V) = 1 - \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$
- $P\left(N \cap \overline{V}\right) = P\left(\overline{V}\right) - P(\overline{V} \cap \overline{N}) = \frac{2}{5} - \frac{3}{20} = \frac{1}{4}$
- $P\left(N \cap V\right) = P(N) - P\left(N \cap \overline{V}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$

	V	$\overline{V}$	
N	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
$\overline{N}$		$\frac{3}{20}$	$\frac{1}{2}$
	$\frac{3}{5}$	$\frac{2}{5}$	1

Logo, a probabilidade do candidato ser português, sabendo-se que é violinista, na forma de fração irredutível, é:

$$P\left(N|V\right) = \frac{P\left(N \cap V\right)}{P\left(V\right)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{5}} = \frac{5}{12}$$

Exame – 2024, 1.ª Fase

4. No contexto da situação descrita $A \cap \overline{B}$ representa o acontecimento: ≪o primeiro bombom ter recheio de frutos secos e o segundo não ter recheio de frutos secos≫, pelo que $P\left(C|A \cap \overline{B}\right)$ é a probabilidade de que o terceiro bombom tenha recheio de caramelo, sabendo que o primeiro tinha de frutos secos e o segundo de caramelo.
Como na primeira extração existiam 9 bombons com recheio de frutos secos e 22 de caramelo, na segunda extração deverão existir 8 de frutos secos e 22 de caramelo e na terceira extração deverão existir 8 de frutos secos e 21 de caramelo.

$$\boxed{\begin{matrix}9\text{ FS}\\22\text{ C}\end{matrix}} \xrightarrow[\text{1 FS}]{\text{1.ª Ext.}} \boxed{\begin{matrix}8\text{ FS}\\22\text{ C}\end{matrix}} \xrightarrow[\text{1 C}]{\text{2.ª Ext.}} \boxed{\begin{matrix}8\text{ FS}\\21\text{ C}\end{matrix}} \xrightarrow[\text{1 C}]{\text{3.ª Ext.}}$$

Assim, como sabendo que o acontecimento representado por $A \cap \overline{B}$ ocorreu, para a probabilidade $P\left(C|A \cap \overline{B}\right)$, existem na terceira extração 21 bombons de caramelo, ou seja, 21 casos favoráveis; num total de $8 + 21 = 29$ bombons, ou seja, 29 pelo que, recorrendo à Regra de LaPlace, temos:

$$P\left(C|A \cap \overline{B}\right) = \frac{21}{29}$$

Exame – 2023, Ép. especial

5. Observando que $P\Big(\left(A \cup \overline{B}\right) | B\Big) = \dfrac{P\Big(\left(A \cup \overline{B}\right) \cap B\Big)}{P(B)}$, temos:

- $\left(A \cup \overline{B}\right) \cap B = (A \cap B) \cup \left(\overline{B} \cap B\right) = (A \cap B) \cup \emptyset = A \cap B$
- $P(A) = 1 - P\left(\overline{A}\right) = 1 - 0{,}6 = 0{,}4$
- Como A e B são equiprováveis $P(B) = P(A) = 0{,}4$ e $P\left(\overline{B}\right) = P\left(\overline{A}\right) = 0{,}6$;
- $P\left(A \cup \overline{B}\right) = P(A) + P\left(\overline{B}\right) - P\left(A \cap \overline{B}\right) \Leftrightarrow 0{,}7 = 0{,}4 + 0{,}6 - P\left(A \cap \overline{B}\right) \Leftrightarrow P\left(A \cap \overline{B}\right) = 1 - 0{,}7 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow P\left(A \cap \overline{B}\right) = 0{,}3$
- $P\left(A \cap \overline{B}\right) = P(A) - P(A \cap B) \Leftrightarrow 0{,}3 = 0{,}4 - P(A \cap B) \Leftrightarrow P(A \cap B) = 0{,}4 - 0{,}3 \Leftrightarrow P(A \cap B) = 0{,}1$

E assim, o valor de $P\Big(\left(A \cup \overline{B}\right) | B\Big)$, na forma de fração irredutível, é:

$$P\Big(\left(A \cup \overline{B}\right) | B\Big) = \frac{P\Big(\left(A \cup \overline{B}\right) \cap B\Big)}{P(B)} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0{,}1}{0{,}4} = \frac{1}{4}$$

Exame – 2023, 2.ª Fase

6. Considerando a experiência aleatória que consiste em selecionar, ao acaso, um jovem que respondeu ao questionário, e os acontecimentos:
F:≪O jovem respondeu que praticava *surf*≫
K:O jovem respondeu que praticava *skate*

Temos que: $P(F) = 0{,}65$; $P(K \cap \overline{F}) = 0{,}2$ e $P(K|F) = \dfrac{4}{5} = 0{,}8$

Assim, organizando os dados numa tabela obtemos:

- $P(K \cap F) = P(K|F) \times P(F) = 0{,}8 \times 0{,}65 = 0{,}52$
- $P\left(F \cap \overline{K}\right) = P(F) - P(F \cap K) = 0{,}65 - 0{,}52 = 0{,}13$
- $P(K) = P(F \cap K) + P\left(\overline{F} \cap K\right) = 0{,}52 - 0{,}2 = 0{,}72$
- $P(\overline{K}) = 1 - P(K) = 1 - 0{,}72 = 0{,}28$

	K	$\overline{K}$	
F	0,52	0,13	0,65
$\overline{F}$	0,2		
	0,72		1

Assim, calculando a probabilidade de que o jovem selecionado que, no questionário, ter respondido que praticava surf sabendo que tinha respondido que não praticava skate, na forma de fração irredutível, é:

$$P\left(F|\overline{K}\right) = \frac{P\left(F \cap \overline{K}\right)}{P\left(\overline{K}\right)} = \frac{0{,}13}{0{,}28} = \frac{13}{28}$$

Exame – 2023, 1.ª Fase

7. Considerando a experiência aleatória que consiste analisar o passageiro que saiu em primeiro lugar do avião, e os acontecimentos:
A:≪O passageiro já tinha viajado de avião≫
F:≪O passageiro já tinha estado em Faro≫

Temos que $P\left(\overline{A}\right) = 0{,}7 = \frac{7}{10}$, $P\left(F\right) = \frac{2}{5}$ e $P\left(A|F\right) = \frac{1}{2}$

Assim, organizando os dados numa tabela obtemos:

- $P(A) = 1 - P\left(\overline{A}\right) = 1 - \frac{7}{10} = \frac{3}{10}$
- $P\left(A \cap F\right) = P\left(F\right) \times P\left(A|F\right) = \frac{2}{5} \times \frac{1}{2} = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$
- $P\left(\overline{A} \cap F\right) = P(F) - P\left(A \cap F\right) = \frac{2}{5} - \frac{1}{5} = \frac{1}{5}$
- $P\left(\overline{A} \cap \overline{F}\right) = P\left(\overline{A}\right) - P\left(\overline{A} \cap F\right) = \frac{7}{10} - \frac{1}{5} = \frac{1}{2}$
- $P\left(\overline{F}\right) = 1 - P\left(F\right) = 1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$

	A	$\overline{A}$	
F	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$
$\overline{F}$		$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{5}$
	$\frac{3}{10}$	$\frac{7}{10}$	1

Assim, a probabilidade de esta ter sido a primeira viagem de avião do passageiro, ou seja, nunca ter viajado de avião, do qual sabemos que nunca tinha estado em Faro, na forma de fração irredutível, é:

$$P\left(\overline{A}|\overline{F}\right) = \frac{P\left(\overline{A} \cap \overline{F}\right)}{P\left(\overline{F}\right)} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{5}} = \frac{5}{6}$$

Exame – 2022, 2.ª Fase

8. Considerando a experiência aleatória que consiste em escolher, ao acaso, um aluno da que participou no torneio de jogos matemáticos, e os acontecimentos:
S:≪O aluno jogo Semáforo≫
R:≪O aluno jogou Rastros≫

Temos que $P\left(S\right) = \frac{1}{2}$, $P\left(\overline{R}\right) = \frac{1}{4}$ e $P\left(S|\overline{R}\right) = \frac{1}{5}$

Assim, organizando os dados numa tabela obtemos:

- $P\left(S \cap \overline{R}\right) = P\left(\overline{R}\right) \times P\left(S|\overline{R}\right) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{20}$
- $P\left(S \cap R\right) = P(S) - P\left(S \cap \overline{R}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{20} = \frac{9}{20}$
- $P(R) = 1 - P\left(\overline{R}\right) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

	S	$\overline{S}$	
R	$\frac{9}{20}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{4}$
$\overline{R}$	$\frac{1}{20}$		$\frac{1}{4}$
	$\frac{1}{2}$		1

Assim, a probabilidade de um aluno que participou no torneio escolhido, ao acaso, não ter jogado Semáforo e ter jogado Rastros, na forma de fração irredutível, é:

$$P\left(\overline{S} \cap R\right) = P(R) - P(S \cap S) = \frac{3}{4} - \frac{9}{20} = \frac{3}{10}$$

Exame – 2022, 1.ª Fase

9. Temos que:

 - $P(B|A) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{P(A\cap B)}{P(A)} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow P(A\cap B) = \frac{1}{2}P(A)$
 - $P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B) = P(A) + \frac{3}{2}P(A) - \frac{1}{2}P(A) = P(A) + \frac{2}{2}P(A) = 2P(A)$
 - $P\left(\overline{A}\cap\overline{B}\right) = P\left(\overline{A\cup B}\right) = 1 - P(A\cup B) = 1 - 2P(A)$

 E assim, temos que:
 $$P\left(\overline{A}\cap\overline{B}\right) + 2P(A) = 1 - 2P(A) + 2P(A) = 1$$

 Exame – 2021, Ép. especial

10. Considerando a experiência aleatória que consiste em escolher, ao acaso, um sócio do clube, e os acontecimentos:
 M:≪O sócio é uma Mulher≫
 B:≪O sócio pratica badmínton≫

 Temos que $P(M) = 0{,}65$; $P\left(B|\overline{M}\right) = \frac{1}{7}$ e $P(M|B) = \frac{5}{6}$

 Assim, considerando $P(B) = k$ e organizando os dados numa tabela obtemos:

 - $P\left(\overline{M}\right) = 1 - P(M) = 1 - 0{,}65 = 0{,}35$
 - $P(M\cap B) = P(B)\times P(M|B) = k\times\frac{5}{6} = \frac{5k}{6}$
 - $P\left(\overline{M}\cap B\right) = P\left(\overline{M}\right)\times P\left(B|\overline{M}\right) = 0{,}35\times\frac{1}{7} = 0{,}05$

	B	$\overline{B}$	
M	$\frac{5k}{6}$		0,65
$\overline{M}$	0,05		0,35
	k		1

 Logo, temos que:

 $$P(B) = P(M\cap B) + P\left(\overline{M}\cap B\right) \Leftrightarrow k = \frac{5k}{6} + 0{,}05 \Leftrightarrow \frac{6k}{6} - \frac{5k}{6} = 0{,}05 \Leftrightarrow \frac{k}{6} = 0{,}05 \Leftrightarrow k = 0{,}3$$

 Assim, temos que:
 $$P(M\cap B) = \frac{5k}{6} \underset{k=0,3}{=} \frac{5\times 0{,}3}{6} = 0{,}25$$

 Logo, a probabilidade de o sócio escolhido ser uma mulher que pratica ténis, na forma de percentagem, é 40%, é:
 $$P\left(M\cap\overline{B}\right) = P(M) - P(M\cap B) = 0{,}65 - 0{,}25 = 0{,}4$$

 Exame – 2021, 2.ª Fase

11. Considerando a experiência aleatória que consiste em escolher, ao acaso, um aluno da escola, e os acontecimentos:
Pt:≪O estudante ser português≫
R:≪O estudante ser um rapaz≫

Temos que $P\left(\overline{R}\right) = 60\%$ e $P\left(R \cap \overline{Pt}\right) = 15\%$

Assim, organizando os dados numa tabela obtemos:

- $P(R) = 100 - P\left(\overline{R}\right) = 100\% - 60\% = 40\%$
- $P\left(Pt \cap R\right) = 40\% - 15\% = 25\%$

	Pt	$\overline{Pt}$	
R	25%	15%	40%
$\overline{R}$			60%
			100%

Assim, a probabilidade de um aluno da escola escolhido, ao acaso, ser português sabendo que era um rapaz, na forma de percentagem, é 62,5%, porque:

$$P(Pt|R) = \frac{P(Pt \cap R)}{P(R)} = \frac{25}{40} = 0{,}625$$

Resposta: **Opção D**

Exame – 2021, 1.ª Fase

12. Considerando a experiência aleatória que consiste em escolher, ao acaso, um dos hóspedes do hotel, e os acontecimentos:
E:≪O hóspede ter participado na caminhada na serra da Estrela≫
Z:≪O hóspede ter participado ter participado na descida do rio Zêzere≫

Temos que $P\left(E\right) = 0{,}8$; $P(Z) = 0{,}5$ e $P\left(\overline{E}|Z\right) = 0{,}3$

Assim, organizando os dados numa tabela obtemos:

- $P\left(\overline{E} \cap Z\right) = P(Z) \times P\left(\overline{E}|R\right) = 0{,}5 \times 0{,}3 = 0{,}15$
- $P\left(E \cap Z\right) = P(Z) - P\left(\overline{E} \cap Z\right) = 0{,}5 - 0{,}15 = 0{,}35$

	Z	$\overline{Z}$	
E	0,35	0,45	0,8
$\overline{E}$	0,15		
	0,5		1

Assim, a probabilidade do hóspede, selecionado ao acaso, ter participado na caminhada na serra da Estrela e não ter participado na descida do rio Zêzere, na forma de percentagem, é 45%, porque

$$P\left(E \cap \overline{Z}\right) = P\left(E\right) - P\left(E \cap Z\right) = 0{,}8 - 0{,}35 = 0{,}45$$

Exame – 2020, Ép. especial

13. De acordo com os acontecimentos A e B definidos, e os dados do enunciado, temos que:
    - $P(A) = 0{,}3$
    - $P(B) = 0{,}4$
    - $P\left(\overline{A} \cup \overline{B}\right) = 0{,}9$

    Assim, usando as Leis de De Morgan, e o teorema do acontecimento contrário, temos que:

$$P\left(\overline{A} \cup \overline{B}\right) = 0{,}9 \Leftrightarrow P\left(\overline{A \cap B}\right) = 0{,}9 \Leftrightarrow 1 - P(A \cap B) = 0{,}9 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P(A \cap B) = 1 - 0{,}9 \Leftrightarrow P(A \cap B) = 0{,}1$$

E assim, podemos calcular $P(A \cup B)$:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0{,}3 + 0{,}4 - 0{,}1 = 0{,}6$$

Como $A \cap (A \cup B) = (A \cap A) \cup (A \cap B) = A \cup (A \cap B) = A$, porque $(A \cap B) \subset A$, então, usando a definição de probabilidade condicionada, podemos calcular $P\big(A|(A \cup B)\big)$, e apresentar o resultado na forma de fração irredutível:

$$P\big(A|(A \cup B)\big) = \frac{P\big(A \cap (A \cup B)\big)}{P(A \cup B)} = \frac{P\big(A\big)}{P(A \cup B)} = \frac{0{,}3}{0{,}6} = \frac{\frac{3}{10}}{\frac{6}{10}} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

Exame – 2020, 2.ª Fase

14. Podemos observar que:

$$P(A \cap B) = \frac{1}{3}P(A) \Leftrightarrow \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow P(B|A) = \frac{1}{3}$$

E assim, designando por a o número de bolas azuis e por b o número de bolas brancas que existiam inicialmente no saco, temos que o número de bolas brancas na segunda extração, sabendo que a primeira bola extraída foi azul, é b e o número total de bolas é $a - 1 + b$

Assim, como a probabilidade de retirar uma bola branca na segunda extração, sabendo que foi retirada uma bola azul na primeira extração, é $\frac{1}{3}$, temos que:

$$P(B|A) = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{b}{a-1+b} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow 3b = a - 1 + b \Leftrightarrow 3b - b + 1 = a \Leftrightarrow 2b + 1 = a$$

Desta forma, como b é um número natural, $2b + 1$ é um número ímpar, ou seja, a, o número de bolas azuis que inicialmente existia no saco era ímpar.

Exame – 2020, 1.ª Fase

15. Considerando a experiência aleatória que consiste em escolher, ao acaso, um aluno da turma, e os acontecimentos:
Q:≪O aluno está matriculado na disciplina de Química≫
H:≪O aluno é um rapaz≫

Temos que $P\left(\overline{H}\right) = 2 \times P(Q)$; $P\left(\overline{H}|Q\right) = \frac{1}{3}$ e $P\left(\overline{Q}|H\right) = \frac{1}{2}$

Assim, considerando $P(Q) = k$ e organizando os dados numa tabela obtemos:

- $P\left(\overline{H}\right) = 2k$
- $P\left(\overline{H} \cap Q\right) = P(Q) \times P\left(\overline{H}|Q\right) = k \times \frac{1}{3} = \frac{k}{3}$
- $P(H) = 1 - P\left(\overline{H}\right) = 1 - 2k$
- $P\left(\overline{Q} \cap H\right) = P(H) \times P\left(\overline{Q}|H\right) = (1-2k) \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - k$
- $P(H \cap Q) = P(H) - P\left(\overline{Q} \cap H\right) = 1 - 2k - \left(\frac{1}{2} - k\right) =$
$= 1 - 2k - \frac{1}{2} + k = \frac{1}{2} - k$

	Q	$\overline{Q}$	
H	$\frac{1}{2} - k$	$\frac{1}{2} - k$	$1 - 2k$
$\overline{H}$	$\frac{k}{3}$		$2k$
	k		1

Assim, temos que probabilidade do aluno escolhido ao acaso estar matriculado na disciplina de Química é o valor de k, ou seja a solução da equação:

$$P(Q) = P(H \cap Q) + P\left(\overline{H} \cap Q\right) \Leftrightarrow k = \frac{1}{2} - k + \frac{k}{3} \Leftrightarrow 6k = 3 - 6k + 2k \Leftrightarrow 10k = 3 \Leftrightarrow k = \frac{3}{10}$$

Exame – 2019, Ép. especial

16. Considerando a experiência aleatória que consiste em escolher, ao acaso, um aluno da escola, e os acontecimentos:
R:≪O aluno é um rapaz≫
D:≪O aluno frequenta o décimo ano≫

Temos que $P(R|D) = \frac{3}{5}$; $P(R) = \frac{11}{21}$ e $P(R \cap D) = \frac{1}{7}$

Assim, organizando os dados numa tabela obtemos:

- $P(D) = \frac{P(R \cap D)}{P(R|D)} = \frac{\frac{1}{7}}{\frac{3}{5}} = \frac{5}{21}$
- $P\left(\overline{D}\right) = 1 - P(D) = 1 - \frac{5}{21} = \frac{16}{21}$
- $P\left(R \cap \overline{D}\right) = P(R) - P(D \cap R) = \frac{11}{21} - \frac{1}{7} = \frac{8}{21}$

	R	$\overline{R}$	
D	$\frac{1}{7}$		$\frac{5}{21}$
$\overline{D}$	$\frac{8}{21}$		$\frac{16}{21}$
	$\frac{11}{21}$		1

Assim, a probabilidade de o aluno escolhido ser uma rapariga e não frequentar o 10.º ano, na forma de dízima, arredondado às centésimas, é:

$$P\left(\overline{R} \cap \overline{D}\right) = P\left(\overline{D}\right) - P\left(R \cap \overline{D}\right) = \frac{16}{21} - \frac{8}{21} = \frac{8}{21} \approx 0{,}38$$

Exame – 2019, 2.ª Fase

17. Considerando a experiência aleatória que consiste em retirar, ao acaso, uma bola da caixa, e os acontecimentos:

- A: A bola ser amarela
- L: A bola ter o logotipo desenhado

Designando por n o número de bolas que a caixa contém, de acordo com o enunciado, temos que:

- $P(A) = \frac{10}{n}$
- $P(L|A) = \frac{3}{10}$
- $P\left(\overline{A} \cup \overline{L}\right) = \frac{15}{16}$

Desta forma, usando as leis de DeMorgan, e a probabilidade do acontecimento contrário, temos que:

$$P\left(\overline{A} \cup \overline{L}\right) = P\left(\overline{A \cap L}\right) = 1 - P(A \cap L)$$

E assim, vem que:

$$P\left(\overline{A} \cup \overline{L}\right) = \frac{15}{16} \Leftrightarrow 1 - P(A \cap L) = \frac{15}{16} \Leftrightarrow 1 - \frac{15}{16} = P(A \cap L) \Leftrightarrow \frac{1}{16} = P(A \cap L)$$

Logo, recorrendo à definição de probabilidade condicionada, podemos determinar o valor de n, ou seja, o número de bolas que a caixa contém:

$$P(L|A) = \frac{P(L \cap A)}{P(A)} \Leftrightarrow \frac{3}{10} = \frac{\frac{1}{16}}{\frac{10}{n}} \Leftrightarrow \frac{3 \times 10}{10 \times n} = \frac{1}{16} \Leftrightarrow \frac{3}{n} = \frac{1}{16} \Leftrightarrow 16 \times 3 = n \Leftrightarrow 48 = n$$

Exame – 2019, 1.ª Fase

18. Como $P(A \cup B) \leq 1$ e $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$, temos que:

$$P(A) + P(B) - P(A \cap B) \leq 1 \Leftrightarrow 0{,}6 + 0{,}7 - P(A \cap B) \leq 1 \Leftrightarrow 1{,}3 - P(A \cap B) \leq 1 \Leftrightarrow$$

$$-P(A \cap B) \leq 1 - 1{,}3 \Leftrightarrow -P(A \cap B) \leq -0{,}3 \Leftrightarrow P(A \cap B) \geq 0{,}3$$

Assim, usando a definição de probabilidade condicionada e como $P(A) = 0{,}6$, vem que:

$$P(A \cap B) \geq 0{,}3 \Leftrightarrow \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \geq \frac{0{,}3}{0{,}6} \Leftrightarrow P(B|A) \geq \frac{3}{6} \Leftrightarrow P(B|A) \geq \frac{1}{2}$$

Exame – 2018, Ép. especial

19. Considerando a experiência aleatória que consiste em escolher, ao acaso, um atleta do clube, e os acontecimentos:
B:≪O atleta praticar basquetebol≫
F:≪O atleta praticar futebol≫

Temos que $P\left(B\right)=\frac{1}{5}$; $P(F)=\frac{2}{5}$ e $P\left(\overline{B}|\overline{F}\right)=\frac{3}{4}$

Assim, organizando os dados numa tabela obtemos:

- $P\left(\overline{F}\right)=1-P\left(F\right)=1-\frac{2}{5}=\frac{3}{5}$
- $P\left(\overline{B}\cap\overline{F}\right)=P\left(\overline{F}\right)\times P\left(\overline{B}|\overline{F}\right)=\frac{3}{5}\times\frac{3}{4}=\frac{9}{20}$
- $P\left(\overline{B}\cap F\right)=P\left(\overline{B}\right)-P\left(\overline{B}\cap\overline{F}\right)=\frac{4}{5}-\frac{9}{20}=\frac{16-9}{20}=\frac{7}{20}$
- $P\left(B\cap F\right)=P(F)-P\left(\overline{B}\cap F\right)=\frac{2}{5}-\frac{7}{20}=\frac{1}{20}$

	F	$\overline{F}$	
B	$\frac{1}{20}$		
$\overline{B}$	$\frac{7}{20}$	$\frac{9}{20}$	$\frac{4}{5}$
	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$	1

Desta forma, como $P\left(B\cap F\right)>0$, temos que, existe pelo menos, um atleta do clube que pratica as duas modalidades desportivas.

Exame – 2018, 2.ª Fase

20. Considerando a experiência aleatória que consiste em escolher, ao acaso, um aluno da escola, e os acontecimentos:
I:≪O aluno estudar Inglês≫
E:≪O aluno estudar Espanhol≫
Temos que:

- como o número de alunos que estudam Espanhol e Inglês é igual, então $P(I)=P(E)$
- como a probabilidade de um aluno estudar pelo menos uma das duas línguas é dada por $P(I\cup E)$ e como a probabilidade de um aluno estudar as duas línguas é dada por $P(I\cap E)$, logo $P(I\cup E)=4\times P(I\cap E)$

Podemos ainda verificar que:

$$P(I\cup E)=P(I)+P(E)-P(I\cap E)\ \Leftrightarrow\ 4\times P(I\cap E)=P(E)+P(E)-P(I\cap E)\ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ 4\times P(I\cap E)+P(I\cap E)=2\times P(E)\ \Leftrightarrow\ 5\times P(I\cap E)=2\times P(E)\ \Leftrightarrow\ P(I\cap E)=\frac{2}{5}\times P(E)$$

Desta forma, recorrendo à definição de probabilidade condicionada vem que a probabilidade, de um aluno estudar Inglês, sabendo que estuda Espanhol, é:

$$P(I|E)=\frac{P(I\cap E)}{P(E)}=\frac{\frac{2}{5}\times P(E)}{P(E)}=\frac{2}{5}=0{,}4$$

O que corresponde a uma probabilidade de 40%

Exame – 2018, 1.ª Fase

21. No contexto do problema $P\left(B|\overline{A}\right)$ é a probabilidade de retirar uma bola branca da caixa C_2 após terem sido lá colocadas duas bolas retiradas da caixa C_1 que não têm a mesma cor.
Como é sabido que ocorre o acontecimento $\overline{A}$, ou seja, que as bolas retiradas da caixa C_1 não têm a mesma cor, então duas as bolas retiradas da caixa C_1 são uma preta e uma branca.

Como a caixa C_2 tem sete bolas antes da realização da experiência, e serão colocadas nesta caixa 2 bolas, a caixa C_2 ficará com 9 bolas, ou seja o número de casos possíveis é 9, pelo que o número de casos favoráveis é 6, porque o valor da probabilidade é $\frac{2}{3}$:

$$P\left(B|\overline{A}\right) = \frac{2}{3} = \frac{2\times 3}{3\times 3} = \frac{6}{9}$$

Assim, o número de casos favoráveis é 6, ou seja, existem 6 bolas brancas na caixa C_2, num total de 9, ou seja, existem 3 bolas pretas na caixa C_2.

Como foram lá colocadas 1 bola preta e 1 bola branca, inicialmente,na caixa C_2 existiam:

- $6 - 1 = 5$ bolas brancas
- $3 - 1 = 2$ bolas pretas

Exame – 2017, Ép. especial

22. De acordo com os acontecimentos A e B definidos, e os dados do enunciado, temos que:
- $P\left(\overline{A}\cup\overline{B}\right) = 0{,}82$
- $P\left(B|A\right) = \frac{1}{3}$

Assim, usando as Leis de De Morgan, e o teorema do acontecimento contrário, temos que:

$$P\left(\overline{A}\cup\overline{B}\right) = 0{,}82 \ \Leftrightarrow\ P\left(\overline{A\cap B}\right) = 0{,}82 \ \Leftrightarrow\ 1 - P\left(A\cap B\right) = 0{,}82 \ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ P\left(A\cap B\right) = 1 - 0{,}82 \ \Leftrightarrow\ P\left(A\cap B\right) = 0{,}18$$

Usando a definição de probabilidade condiciona, podemos calcular $P(A)$:

$$P\left(B|A\right) = \frac{1}{3} \ \Leftrightarrow\ \frac{P(A\cap B)}{P(A)} = \frac{1}{3} \ \Leftrightarrow\ \frac{0{,}18}{P(A)} = \frac{1}{3} \ \Leftrightarrow\ 0{,}18\times 3 = P(A) \ \Leftrightarrow\ P(A) = 0{,}54$$

Exame – 2017, 2.ª Fase

23. Considerando a experiência aleatória que consiste em escolher, ao acaso, um aluno da turma, e os acontecimentos:
V:≪O aluno ter olhos verdes≫
R:≪O aluno é um rapaz≫
Temos que $P(V|R) = \frac{1}{4}$ e $P(V \cap R) = \frac{1}{10}$

Assim, temos que:

$$P(R) = \frac{P(V \cap R)}{P(V|R)} = \frac{\frac{1}{10}}{\frac{1}{4}} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$$

Ou seja a probabilidade de escolher um aluno da turma e ele ser rapaz, ou seja, a proporção de rapazes relativamente ao total de alunos da turma é $\frac{2}{5}$. Como existem 20 alunos na turma o número de rapazes da turma é:

$$\frac{2}{5} \times 20 = \frac{40}{5} = 8$$

Resposta: **Opção B**

Exame – 2017, 1.ª Fase

24. No contexto da situação descrita, $P(A \cap B)$é a probabilidade de que a primeira bola extraída tenha um número par e que a segunda bola extraída também tenha um número par, ou seja, a probabilidade de que as duas bolas tenham um número par.

No caso de a extração ser feita com reposição, para calcular a probabilidade de que a segunda bola tenha um número par, sabendo que a primeira também tem um número par, devemos considerar 8 casos possíveis (as 8 bolas do saco, porque a primeira bola foi reposta), e 4 casos favoráveis (as 4 bolas com um número par, porque como a primeira bola foi reposta, existem 4 números pares), ou seja:

$$P(B|A) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

No caso de a extração ser feita sem reposição, para calcular a probabilidade de que a segunda bola tenha um número par, sabendo que a primeira também tem um número par, devemos considerar 7 casos possíveis (porque das 8 bolas do saco, foi extraída uma que não foi reposta), e 3 casos favoráveis (porque das 4 bolas com um número par existentes inicialmente, uma foi retirada e não foi reposta), ou seja:

$$P(B|A) = \frac{3}{7}$$

Assim, como a probabilidade de que a primeira bola extraída tenha um número par é $P(A) = \frac{1}{2}$, temos que os valores de $P(A \cap B)$ são:

- Com reposição: $a = P(A \cap B) = P(A) \times P(B|A) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$
- Sem reposição: $b = P(A \cap B) = P(A) \times P(B|A) = \frac{1}{2} \times \frac{3}{7} = \frac{3}{14}$

Exame – 2016, Ép. especial

25. Como $P\left(\overline{A}\cap\overline{B}\right) = P\left(\overline{A\cup B}\right) = 1 - P\left(A\cup B\right)$, temos que:

$$P\left(\overline{A}\cap\overline{B}\right) = 0{,}6 \Leftrightarrow 1 - P\left(A\cup B\right) = 0{,}6 \Leftrightarrow P\left(A\cup B\right) = 1 - 0{,}6 \Leftrightarrow P\left(A\cup B\right) = 0{,}4$$

Como $P\left(A\cup B\right) = P(A) + P(B) - P(A\cap B) \Leftrightarrow P\left(A\cap B\right) = P(A) + P(B) - P(A\cup B)$, temos que:

$$P\left(A\cap B\right) = 0{,}2 + 0{,}3 - 0{,}4 = 0{,}1$$

E assim, vem que:

$$P\left(A|B\right) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{0{,}1}{0{,}3} = \frac{1}{3}$$

Resposta: **Opção A**

Exame – 2016, 2.ª Fase

26. No contexto da situação descrita $P(B|A)$ é a probabilidade de que, retirando uma ficha da caixa U e uma ficha da caixa V, o produto dos números das fichas retiradas seja ímpar, sabendo que a soma dos números das fichas retiradas é igual a 10.
Como se retira uma bola de cada caixa, o número de casos possíveis é 4 e correspondem a pares de bolas (em que cada uma é retirada de uma caixa) cuja soma é 10, ou seja:

$$(1{,}9);\ (2{,}8);\ (3{,}7) \text{ e } (4{,}6)$$

De entre estes pares os que correspondem a produtos ímpares são (1,9), porque $\times 9 = 9$ e (3,7), porque $3\times 7 = 21$; (os restantes pares de números, por serem constituídos por números pares resultam num produto par).
Assim, existem 2 casos favoráveis, e, recorrendo à Regra de Laplace para o cálculo da probabilidade, e escrevendo o resultado na forma de fração irredutível, vem:

$$P(B|A) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

Exame – 2016, 1.ª Fase

27. Como $P\left(A|B\right) = \dfrac{P(A\cap B)}{P(B)} \Leftrightarrow P(A\cap B) = P\left(A|B\right)\times P(B)$ vem que:

$$P(A\cap B) = \frac{1}{6}\times\frac{3}{10} = \frac{3}{60} = \frac{1}{20}$$

Como $P\left(A\cup B\right) = P(A) + P(B) - P(A\cap B)$, temos que:

$$P\left(A\cup B\right) = \frac{2}{5} + \frac{3}{10} - \frac{1}{20} = \frac{8}{20} + \frac{6}{20} - \frac{1}{20} = \frac{13}{20}$$

Resposta: **Opção C**

Exame – 2016, 1.ª Fase

28. Como $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$, substituindo os valores conhecidos, podemos calcular $P(A)$:

$$0{,}7=P(A)+0{,}4-0{,}2 \Leftrightarrow 0{,}7-0{,}4+0{,}2=P(A) \Leftrightarrow 0{,}5=P(A)$$

Como $P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}$, vem que

$$P(B|A)=\frac{0{,}2}{0{,}5}=\frac{2}{5}=0{,}4$$

Resposta: **Opção D**

Exame – 2015, Ép. especial

29. No contexto da situação descrita $P(A|B)$ é a probabilidade de que, retirando ao acaso uma bola do saco, ela seja preta sabendo que tem um número par.
Como existem apenas 4 bolas numeradas com números pares (nomeadamente as bolas com os números 2, 4, 6 e 8), temos que o número de casos possíveis é 4.
Destas, apenas as bolas com os números 2 e 4 são pretas (porque ”As bolas numeradas de 1 a 5 são pretas”), pelo que existem 2 casos favoráveis, e assim, recorrendo à Regra de Laplace para o cálculo da probabilidade, vem:

$$P(A|B)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$$

Resposta: **Opção B**

Exame – 2015, 2.ª Fase

30. Considerando a experiência aleatória que consiste em escolher, ao acaso, um funcionário da empresa, e os acontecimentos:
M:≪O funcionário ser mulher≫
C:≪O funcionário residir em Coimbra≫

Temos que $P\left(\overline{C}\right)=0{,}6$; $P(M)=P\left(\overline{M}\right)$ e $P\left(\overline{C}|\overline{M}\right)=0{,}3$

Assim, organizando os dados numa tabela obtemos:

- $P(C)=1-P\left(\overline{C}\right)=1-0{,}6=0{,}4$
- $P(M)=1-P\left(\overline{M}\right) \underset{P(M)=P\left(\overline{M}\right)}{\Leftrightarrow} P(M)=1-P(M)\Leftrightarrow$
  $\Leftrightarrow\ P(M)+P(M)=1 \Leftrightarrow 2P(M)=1 \Leftrightarrow P(M)=0{,}5$
- $P\left(\overline{C}\cap\overline{M}\right)=P\left(\overline{M}\right)\times P\left(\overline{C}|\overline{M}\right)=0{,}5\times 0{,}3=0{,}15$
- $P\left(M\cap\overline{C}\right)=P\left(\overline{C}\right)-P\left(\overline{C}\cap\overline{M}\right)=0{,}6-0{,}15=0{,}45$
- $P\left(M\cap C\right)=P(M)-P\left(\overline{D}\right)=0{,}5-0{,}45=0{,}05$

	M	$\overline{M}$	
C	0,05		0,4
$\overline{C}$	0,45	0,15	0,6
	0,5	0,5	1

Assim, calculando a probabilidade de o funcionário escolhido ser mulher, sabendo que reside em Coimbra, e escrevendo o resultado na forma de fração irredutível, temos

$$P\left(M|C\right)=\frac{P(M\cap C)}{P(C)}=\frac{0{,}05}{0{,}4}=\frac{5}{40}=\frac{1}{8}$$

Exame – 2015, 1.ª Fase

31. Considerando a experiência aleatória que consiste em escolher, ao acaso, um aluno nesta turma, e os acontecimentos:
R:≪O aluno ser rapariga≫
D:≪O aluno está inscrito no desporto escolar≫
Temos que $P\left(\overline{R}\right) = 0{,}6$; $P(D) = 0{,}8$ e $P\left(\overline{D}|\overline{R}\right) = 0{,}2$
Assim, organizando os dados numa tabela obtemos:

- $P(R) = 1 - P\left(\overline{R}\right) = 1 - 0{,}6 = 0{,}4$
- $P\left(\overline{D}\right) = 1 - P(D) = 1 - 0{,}8 = 0{,}2$
- $P\left(\overline{D} \cap \overline{R}\right) = P\left(\overline{R}\right) \times P\left(\overline{D}|\overline{R}\right) = 0{,}6 \times 0{,}2 = 0{,}12$
- $P\left(R \cap \overline{D}\right) = P\left(\overline{D}\right) - P\left(\overline{D} \cap \overline{R}\right) = 0{,}2 - 0{,}12 = 0{,}08$
- $P\left(R \cap D\right) = P(R) - P\left(R \cap \overline{D}\right) = 0{,}4 - 0{,}08 = 0{,}32$

	R	$\overline{R}$	
D	0,32		0,8
$\overline{D}$	0,08	0,12	0,2
	0,4	0,6	1

Assim, calculando a probabilidade de um aluno dessa turma, escolhido ao acaso, ser rapariga, sabendo que está inscrito no desporto escolar e, escrevendo o resultado na forma de fração irredutível, temos

$$P\left(R|D\right) = \frac{P(R \cap D)}{P(D)} = \frac{0{,}32}{0{,}8} = \frac{2}{5}$$

Exame – 2014, Ép. especial

32. Sabemos que $P(B|\overline{A}) = \dfrac{P\left(B \cap \overline{A}\right)}{P\left(\overline{A}\right)} \Leftrightarrow P\left(B \cap \overline{A}\right) = P(B|\overline{A}) \times P\left(\overline{A}\right)$
Como $P(A) = 0{,}4$, temos que $P\left(\overline{A}\right) = 1 - P(A) = 1 - 0{,}4 = 0{,}6$
Como $P(B|\overline{A}) = 0{,}8$ e $P\left(\overline{A}\right) = 0{,}6$, temos que $P\left(B \cap \overline{A}\right) = 0{,}8 \times 0{,}6 = 0{,}48$
Como $P\left(B \cap \overline{A}\right) = P(B \setminus A) = P(B - A)$, temos que

$$P\left(B \cap \overline{A}\right) = P(B) - P(A \cap B) \Leftrightarrow P(B) = P\left(B \cap \overline{A}\right) + P(A \cap B)$$

Como $P\left(B \cap \overline{A}\right) = 0{,}48$ e $P(A \cap B) = 0{,}2$, vem que

$$P(B) = 0{,}48 + 0{,}2 = 0{,}68$$

Resposta: **Opção C**

Exame – 2014, 1.ª Fase

33. De acordo com o enunciado $P(A|B)$ é a probabilidade de, lançar o dado o dado duas vezes, e obter um número negativo no primeiro lançamento, sabendo que o produto dos dois números obtidos é positivo.
Como sabemos que o produto dos números obtidos é positivo, pode ter resultado da multiplicação de dois números positivos ou de dois números negativos.

De acordo com a Regra de Laplace, a probabilidade é calculada pelo quociente do número de casos favoráveis pelo número de casos possíveis, sendo os casos possíveis equiprováveis.
Assim, temos que o número de casos possíveis resulta de considerar o produto de dois números negativos (1×1) ou dois números positivos (3×3), ou seja, um total de $1 + 9 = 10$ casos possíveis.
Destes, apenas um (1) caso é favorável, nomeadamente o que corresponde à hipótese do produto positivo ter resultado da multiplicação de dois valores negativos, o que garante que o número saído no primeiro lançamento é negativo.
Assim temos que

$$P(A|B) = \frac{1}{10}$$

Exame – 2014, 1.ª Fase

34. A probabilidade de o professor escolhido ensinar Matemática, sabendo que é do sexo feminino, pode ser escrita como $P\left(B|\overline{A}\right)$ e $P\left(B|\overline{A}\right) = \dfrac{P\left(B \cap \overline{A}\right)}{P\left(\overline{A}\right)}$
Como $\overline{A \cup \overline{B}} = \overline{A} \cap B$, então $P(\overline{A} \cap B) = 1 - P(A \cup \overline{B})$
Assim, temos que $P(\overline{A} \cap B) = 1 - 0{,}92 = 0{,}08$ e que $P\left(\overline{A}\right) = 1 - P(A) = 1 - 0{,}44 = 0{,}56$, logo

$$P\left(B|\overline{A}\right) = \frac{P\left(B \cap \overline{A}\right)}{P\left(\overline{A}\right)} = \frac{P\left(\overline{A} \cap B\right)}{P\left(\overline{A}\right)} = \frac{0{,}08}{0{,}56} = \frac{1}{7}$$

Resposta: **Opção C**

Teste Intermédio 12.º ano – 30.04.2014

35. Considerando a experiência aleatória que consiste em escolher, ao acaso, um dos dados da coleção, e os acontecimentos:
O:≪O dado escolhido é octaédrico≫
V:≪O dado escolhido é verde≫
A probabilidade pedida pode ser escrita como $P(O|V)$
Temos que $P\left(\overline{V}\right) = 0{,}1 = \dfrac{1}{10}$; $P\left(\overline{O}\right) = 3 \times P(O)$ e $P\left(\overline{O}|\overline{V}\right) = 0{,}2 = \dfrac{2}{10}$
Como $P(O) + P\left(\overline{O}\right) = 1$, temos que $P(O) + 3 \times P(O) + P\left(\overline{O}\right) = 1 \Leftrightarrow 4 \times P(O) = 1 \Leftrightarrow P(O) = \dfrac{1}{4}$
Assim, organizando os dados numa tabela obtemos:

- $P(\overline{O} \cap \overline{V}) = P\left(\overline{V}\right) \times P(\overline{O}|\overline{V}) = \dfrac{1}{10} \times \dfrac{2}{10} = \dfrac{1}{50}$
- $P\left(\overline{O}\right) = 1 - P(O) = 1 - \dfrac{1}{4} = \dfrac{3}{4}$
- $P\left(\overline{O} \cap V\right) = P\left(\overline{O}\right) - P\left(\overline{O} \cap \overline{V}\right) = \dfrac{3}{4} - \dfrac{1}{50} = \dfrac{73}{100}$
- $P(V) = 1 - P\left(\overline{V}\right) = 1 - \dfrac{1}{10} = \dfrac{9}{10}$
- $P(O \cap V) = P(V) - P\left(\overline{O} \cap V\right) = \dfrac{9}{10} - \dfrac{73}{100} = \dfrac{17}{100}$

	V	$\overline{V}$	
O	$\frac{17}{100}$		$\frac{1}{4}$
$\overline{O}$	$\frac{73}{100}$	$\frac{1}{50}$	$\frac{3}{4}$
	$\frac{9}{10}$	$\frac{1}{10}$	1

Assim, calculando a probabilidade de, escolher um dado octaédrico, sabendo que é verde, e escrevendo o resultado na forma de fração irredutível, temos

$$P(O|V) = \frac{P(O \cap V)}{P(V)} = \frac{\frac{17}{100}}{\frac{9}{10}} = \frac{17}{90}$$

Teste Intermédio 12.º ano – 29.11.2013

36. Considerando a experiência aleatória que consiste em escolher, ao acaso, uma lâmpada produzida nessa empresa, e os acontecimentos:
F:≪A lâmpada escolhida é fluorescente≫
T:≪A lâmpada escolhida tem a forma tubular≫
Temos que $P(F) = 0{,}55$, $P(T|F) = 0{,}5$ e $P\left(\overline{T}|\overline{F}\right) = 0{,}9$
Assim, organizando os dados numa tabela obtemos:

- $P\left(\overline{F}\right) = 1 - P(F) = 1 - 0{,}55 = 0{,}45$
- $P(T \cap F) = P(F) \times P(T|F) = 0{,}55 \times 0{,}5 = 0{,}275$
- $P\left(\overline{T} \cap F\right) = P(F) - P(T \cap F) = 0{,}55 - 0{,}275 = 0{,}275$
- $P\left(\overline{T} \cap \overline{F}\right) = P\left(\overline{F}\right) \times P\left(\overline{T}|\overline{F}\right) = 0{,}45 \times 0{,}9 = 0{,}405$
- $P\left(\overline{T}\right) = P\left(\overline{T} \cap \overline{F}\right) + P\left(\overline{T} \cap F\right) = 0{,}275 + 0{,}405 = 0{,}68$
- $P(T) = 1 - P\left(\overline{T}\right) = 1 - 0{,}68 = 0{,}32$

	F	$\overline{F}$	
T	0,275		0,32
$\overline{T}$	0,275	0,405	0,68
	0,55	0,45	1

Assim, calculando a probabilidade de, ao escolher, ao acaso, uma lâmpada produzida nessa empresa, ela ser fluorescente, sabendo que tem a forma tubular, e escrevendo o resultado com arredondamento às centésimas, temos

$$P\left(F|T\right) = \frac{P(F \cap T)}{P(T)} = \frac{0{,}275}{0{,}32} \approx 0{,}86$$

Exame – 2013, Ép. especial

37. Pelas leis de De Morgan, e pelo teorema do acontecimento contrário, temos que:

$$P\left(\overline{A} \cup \overline{B}\right) = P\left(\overline{A \cap B}\right) = 1 - P(A \cap B)$$

Assim, vem que:

$$P\left(\overline{A} \cup \overline{B}\right) - P(A \cap B) = \frac{5}{9} \Leftrightarrow 1 - P(A \cap B) - P(A \cap B) = \frac{5}{9} \Leftrightarrow 1 - 2P(A \cap B) = \frac{5}{9} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1 - \frac{5}{9} = 2P(A \cap B) \Leftrightarrow \frac{4}{9} = 2P(A \cap B) \Leftrightarrow \frac{2}{9} = P(A \cap B)$$

Como $P(B|A) = \dfrac{P(B \cap A)}{P(A)} \Leftrightarrow P(A) = \dfrac{P(B \cap A)}{P(B|A)}$; $P(B \cap A) = \dfrac{2}{9}$ e $P(B|A) = \dfrac{2}{7}$, temos que

$$P(A) = \frac{P(B \cap A)}{P(B|A)} = \frac{\frac{2}{9}}{\frac{2}{7}} = \frac{7}{9}$$

Logo, temos que $P\left(\overline{A}\right) = 1 - P(A) = 1 - \dfrac{7}{9} = \dfrac{2}{9}$
E que $P\left(\overline{A} \cup \overline{B}\right) = 1 - P(A \cap B) = 1 - \dfrac{2}{9} = \dfrac{7}{9}$
Se repararmos que $\overline{A} \cap \overline{B} = \emptyset$, ou seja que $\overline{A}$ e $\overline{B}$ são acontecimentos incompatíveis (porque não existem números pares iguais ou maiores que 3), temos que:

$$P\left(\overline{A} \cup \overline{B}\right) = P\left(\overline{A}\right) + P\left(\overline{B}\right) \Leftrightarrow P\left(\overline{A} \cup \overline{B}\right) - P\left(\overline{A}\right) = P\left(\overline{B}\right)$$

E assim a probabilidade de sair o número 3, ou seja ocorrer o acontecimento $\overline{B}$, é,

$$P\left(\overline{B}\right) = \frac{7}{9} - \frac{2}{9} = \frac{5}{9}$$

Exame – 2013, 2.ª Fase

38.

38.1. Considerando a experiência aleatória que consiste em retirar, ao acaso, uma bola da caixa, e os acontecimentos:

B:≪A bola retirada é branca≫

I:≪A bola retirada tem número ímpar≫

Temos que $P\left(\overline{B}\right) = \frac{2}{5}$, $P\left(\overline{I}|\overline{B}\right) = \frac{20}{100} = \frac{1}{5}$ e $P(I|B) = \frac{40}{100} = \frac{2}{5}$

Assim, organizando os dados numa tabela obtemos:

- $P\left(\overline{I} \cap \overline{B}\right) = P\left(\overline{B}\right) \times P\left(\overline{I}|\overline{B}\right) = \frac{2}{5} \times \frac{1}{5} = \frac{2}{25}$
- $P(B) = 1 - P\left(\overline{B}\right) = 1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$
- $P(I \cap B) = P(B) \times P(I|B) = \frac{3}{5} \times \frac{2}{5} = \frac{6}{25}$
- $P\left(B \cap \overline{I}\right) = P(B) - P(B \cap I) = \frac{3}{5} - \frac{6}{25} = \frac{9}{25}$
- $P\left(\overline{I}\right) = P\left(B \cap \overline{I}\right) + P\left(\overline{B} \cap \overline{I}\right) = \frac{9}{25} + \frac{2}{25} = \frac{11}{25}$

	B	$\overline{B}$	
I	$\frac{6}{25}$		
$\overline{I}$	$\frac{9}{25}$	$\frac{2}{25}$	$\frac{11}{25}$
	$\frac{3}{5}$	$\frac{2}{5}$	1

Assim, calculando a probabilidade de, ao retirar, ao acaso, uma bola da caixa, ela ser preta, sabendo que tem um número par, e escrevendo o resultado na forma de fração irredutível, temos:

$$P\left(\overline{B}|\overline{I}\right) = \frac{P\left(\overline{B} \cap \overline{I}\right)}{P\left(\overline{I}\right)} = \frac{\frac{2}{25}}{\frac{11}{25}} = \frac{2}{11}$$

38.2. Como a caixa tem n bolas e 2 em cada 5 são pretas, o número de bolas pretas é $n \times \frac{2}{5}$

Logo, o número de bolas brancas é $n \times \frac{3}{5}$

Como a extração é feita sem reposição, a probabilidade da primeira bola extraída ser branca é $\frac{n \times \frac{3}{5}}{n} = \frac{3}{5}$ e a probabilidade da segunda bola ser branca, sabendo que a primeira também é branca é $\frac{n \times \frac{3}{5} - 1}{n-1}$

Assim, usando a probabilidade conhecida podemos escrever e resolver a equação:

$$\frac{3}{5} \times \frac{n \times \frac{3}{5} - 1}{n-1} = \frac{7}{20} \Leftrightarrow \frac{\frac{3n}{5} - \frac{5}{5}}{n-1} = \frac{35}{60} \Leftrightarrow \frac{3n-5}{5(n-1)} = \frac{35}{60} \Leftrightarrow \frac{3n-5}{n-1} = \frac{5 \times 35}{5 \times 12} \underset{n \neq 1}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow\ 12(3n-5) = 35(n-1) \Leftrightarrow 36n - 60 = 35n - 35 \Leftrightarrow 36n - 35n = 60 - 35 \Leftrightarrow n = 25$$

Exame – 2013, 1.ª Fase

39. Pelas leis de De Morgan, e usando o teorema do acontecimento contrário temos que
$P\left(\overline{A}\cup\overline{B}\right)=P\left(\overline{A\cap B}\right)=1-P(A\cap B)$, e assim $\frac{15}{16}=1-P(A\cap B)\ \Leftrightarrow P(A\cap B)=1-\frac{15}{16}=\frac{1}{16}$

Assim, organizando este e os restantes dados do enunciado numa tabela obtemos:

- $P\left(\overline{B}\right)=1-P(B)=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$
- $P\left(A\cap\overline{B}\right)=P\left(\overline{B}\right)\times P\left(A|\overline{B}\right)=\frac{3}{4}\times\frac{7}{12}=\frac{21}{48}$

E assim

$$P(A)=P(A\cap B)+P\left(A\cap\overline{B}\right)=\frac{1}{16}+\frac{21}{48}=\frac{1}{2}$$

	A	$\overline{A}$	
B	$\frac{1}{16}$		$\frac{1}{4}$
$\overline{B}$	$\frac{21}{48}$		$\frac{3}{4}$
	$\frac{1}{2}$		1

Exame – 2013, 1.ª Fase

40. No contexto da situação descrita, $P(B|A)$ representa a probabilidade de que, na extração das bolas do saco, a bola com o número 2 seja a segunda bola retirada, sabendo que bolas com o número 0 não saem em extrações sucessivas.
Como existem 4 bolas com o número 0, e sabemos que não saem em extrações sucessivas, significa que entre duas bolas com o número 0 existe sempre uma bola com outro número, e como no total são 7 bolas, significa que as bolas com o número 0 saem em todas as extrações de ordem ímpar, ou seja são as bolas que saem nas 1ª, 3ª, 5ª e 7ª extrações.
Desta forma, a bola com o número 2 pode ocupar sair na 2ª, 4ª ou 6ª posições, ficando as restantes ocupadas com as restantes duas posições bolas com as bolas de número 3.
Com o objetivo de usar a Regra de Laplace, podemos considerar 3 casos possíveis, correspondendo às 3 posições de ordem par que a bola 2 pode ocupar na ordenação, uma vez que esta escolha define imediatamente uma sequência em que as bolas com o número 0 não saem em extrações sucessivas.
Considerando os 3 casos possíveis, apenas 1 é favorável, precisamente a situação em que a bola 2 saem na 2ª posição.
Desta forma, temos que

$$P(B|A)=\frac{1}{3}$$

Teste Intermédio 12.º ano – 24.05.2013

41.

41.1. Considerando a experiência aleatória que consiste em escolher ao acaso um aluno da turma, e os acontecimentos:
R:≪O aluno é uma rapariga≫
S:≪O aluno pretende frequentar um curso na área da saúde≫

Temos que $P(R) = \frac{1}{2}$, $P(S) = \frac{3}{4}$ e $P\left(R|\overline{S}\right) = \frac{2}{7}$

Assim, organizando os dados numa tabela obtemos:

- $P\left(\overline{S}\right) = 1 - P(S) = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$
- $P\left(R \cap \overline{S}\right) = P\left(\overline{S}\right) \times P\left(R|\overline{S}\right) = \frac{1}{4} \times \frac{2}{7} = \frac{2}{28} = \frac{1}{14}$
- $P(S \cap R) = P(R) - P\left(\overline{S} \cap R\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{14} = \frac{3}{7}$

	R	$\overline{R}$	
S	$\frac{3}{7}$		$\frac{3}{4}$
$\overline{S}$	$\frac{1}{14}$		$\frac{1}{4}$
	$\frac{1}{2}$		1

Assim, calculando a probabilidade de, ao escolher, ao acaso, um aluno da turma ele pretender frequentar um curso da área de saúde, sabendo que é uma rapariga, e escrevendo o resultado na forma de fração irredutível, temos:

$$P(S|R) = \frac{P(S \cap R)}{P(R)} = \frac{\frac{3}{7}}{\frac{1}{2}} = \frac{6}{7}$$

41.2. Como o número de rapazes é igual ao número de raparigas, e existem n rapazes, o número total de alunos é $2n$.
Ao selecionar dois alunos da turma, a probabilidade de que o primeiro aluno selecionado seja um rapaz é $\frac{n}{2n} = \frac{1}{2}$

A probabilidade de selecionar um segundo rapaz, sabendo que o primeiro aluno selecionado também é um rapaz, é $\frac{n-1}{2n-1}$
Assim, usando a probabilidade conhecida podemos escrever e resolver a equação:

$$\frac{1}{2} \times \frac{n-1}{2n-1} = \frac{13}{54} \Leftrightarrow \frac{n-1}{2n-1} = \frac{26}{54} \underset{n \neq \frac{1}{2}}{\Leftrightarrow} 54(n-1) = 26(2n-1) \Leftrightarrow 54n - 54 = 52n - 26 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 54n - 52n = 54 - 26 \Leftrightarrow 2n = 28 \Leftrightarrow n = 14$$

Teste Intermédio 12.º ano – 28.02.2013

42. Considerando a experiência aleatória que consiste em escolher, ao acaso, um funcionário desta empresa, e os acontecimentos:
T:≪O funcionário aposta no totoloto≫
E:≪O funcionário aposta no euromilhões≫
Temos que $P(E) = 0{,}8$, $P(T|E) = 0{,}25$ e $P\left(\overline{T} \cap \overline{E}\right) = 0{,}05$

Organizando os dados numa tabela obtemos:

- $P(T \cap E) = P(E) \times P(T|E) = 0{,}8 \times 0{,}25 = 0{,}2$
- $P\left(\overline{E}\right) = 1 - P(E) = 1 - 0{,}8 = 0{,}2$
- $P\left(T \cap \overline{E}\right) = P\left(\overline{E}\right) - P\left(\overline{T} \cap \overline{E}\right) = 0{,}2 - 0{,}05 = 0{,}15$

	T	$\overline{T}$	
E	0,2		0,8
$\overline{E}$	0,15	0,05	0,2
	0,35		1

Assim, a probabilidade de, ao escolher, ao acaso, um funcionário dessa empresa, ele apostar no totoloto é

$$P(T) = P(T \cap E) + P\left(T \cap \overline{E}\right) = 0{,}2 + 0{,}15 = 0{,}35$$

Exame – 2012, Ép. especial

43. Considerando a experiência aleatória que consiste em escolher, ao acaso, um aluno dessa escola, e os acontecimentos:
R:≪O aluno é um rapaz≫
E:≪O aluno tem excesso de peso≫
Temos que $P\left(\overline{R}\right) = 0{,}55$, $P\left(E|\overline{R}\right) = 0{,}3$ e $P\left(\overline{E}|R\right) = 0{,}4$

Assim, organizando os dados numa tabela obtemos:

- $P\left(E \cap \overline{R}\right) = P\left(\overline{R}\right) \times P\left(E|\overline{R}\right) = 0{,}55 \times 0{,}3 = 0{,}165$
- $P(R) = 1 - P\left(\overline{R}\right) = 1 - 0{,}55 = 0{,}45$
- $P\left(\overline{E} \cap R\right) = P(R) \times P\left(\overline{E}|R\right) = 0{,}45 \times 0{,}4 = 0{,}18$
- $P(R \cap E) = P(R) - P\left(\overline{E} \cap R\right) = 0{,}45 - 0{,}18 = 0{,}27$
- $P(E) = P(R \cap E) + P\left(\overline{R} \cap E\right) = 0{,}27 + 0{,}165 = 0{,}435$

	R	$\overline{R}$	
E	0,27	0,165	0,435
$\overline{E}$	0,18		
	0,45	0,55	1

Assim, calculando a probabilidade de o aluno escolhido ser rapaz, sabendo que tem excesso de peso, e escrevendo o resultado na forma de fração irredutível, temos

$$P(R|E) = \frac{P(R \cap E)}{P(E)} = \frac{0{,}27}{0{,}435} = \frac{18}{29}$$

Exame – 2012, 1.ª Fase

44. Considerando a experiência aleatória que consiste em escolher, ao acaso, um frango do aviário e aplicar o teste para detetar a presença do vírus, e os acontecimentos:
I:≪O frango estar infetado≫
T:≪O teste dar positivo≫
Temos que $P(I) = \frac{50}{500} = 0{,}1$, $P\left(\overline{I}\right) = \frac{50}{500} = 0{,}1$ $P\left(T|I\right) = 0{,}96$ e $P\left(\overline{T}|\overline{I}\right) = 0{,}9$

Assim, organizando os dados numa tabela obtemos:

- $P\left(I \cap T\right) = P\left(I\right) \times P\left(T|I\right) = 0{,}1 \times 0{,}96 = 0{,}096$
- $P\left(I \cap \overline{T}\right) = P(I) - P\left(I \cap T\right) = 0{,}1 - 0{,}096 = 0{,}004$
- $P\left(\overline{I} \cap \overline{T}\right) = P\left(\overline{I}\right) \times P\left(\overline{T}|\overline{I}\right) = 0{,}9 \times 0{,}9 = 0{,}81$
- $P\left(\overline{T}\right) = P\left(I \cap \overline{T}\right) + P\left(\overline{I} \cap \overline{T}\right) = 0{,}004 + 0{,}81 = 0{,}814$

	I	$\overline{I}$	
T	0,096		
$\overline{T}$	0,004	0,81	0,814
	0,1	0,9	1

Assim, calculando a probabilidade do aluno escolhido frango escolhido não estar infetado, sabendo que teste deu negativo, e escrevendo o resultado na forma de dízima, arredondado às milésimas, temos

$$P\left(\overline{I}|\overline{T}\right) = \frac{P\left(\overline{I} \cap \overline{T}\right)}{P\left(\overline{T}\right)} = \frac{0{,}81}{0{,}814} \approx 0{,}995$$

Teste Intermédio 12.º ano – 13.03.2012

45. Considerando a experiência aleatória que consiste em escolher, ao acaso, um aluno da turma, e os acontecimentos:
R:≪O aluno ser uma rapariga≫
I:≪O ter Inglês≫
O número de raparigas que tem Inglês é $20 - 4 = 16$
Assim, como a turma tem 18 raparigas, o número de raparigas que não tem Inglês é $18 - 16 = 2$
Logo a probabilidade de selecionar um aluno que não tem inglês, de entre o conjunto das raparigas é

$$P\left(\overline{I}|R\right) = \frac{2}{18} = \frac{1}{9}$$

Resposta: **Opção A**

Exame – 2011, Prova especial

46. No contexto da situação descrita, $P(J|I)$ é a probabilidade de que ao lançar 4 vezes o tetraedro, a soma dos números registados nos quatro lançamentos seja menor do que 10, sabendo que nos 3 primeiros lançamentos saiu sempre o número dois.
Como sabemos que a soma relativa aos 3 primeiros lançamentos é $2 + 2 + 2 = 6$, para que a soma dos 4 lançamentos seja inferior a 10, no último lançamento podem sair as faces com os números, um (que resultará na soma 7), dois (soma 8) ou três (soma 9).
Assim, usando a Regra de Laplace, para a determinação da probabilidade, temos 4 casos possíveis, correspondentes às faces que podem sair no quarto lançamento, e 3 casos favoráveis, correspondendo às faces que correspondem a uma soma inferior a 10, pelo que

$$P(J|I) = \frac{3}{4}$$

Exame – 2011, Prova especial

47. Considerando a experiência aleatória que consiste em escolher, ao acaso, um jovem inscrito no clube, e os acontecimentos:
A:≪O jovem pratica andebol≫
F:≪O jovem pratica futebol≫
Sabemos que existem 28 jogadores que jogam apenas futebol e 12 que jogam futebol e andebol, ou seja, o número total de praticantes de futebol é de $28 + 12 = 40$
De entre estes, apenas 12 jogam andebol, pelo que a probabilidade de selecionar ao acaso um jovem inscrito, de entre os praticantes de futebol, e ele também jogar andebol é

$$P(A|F) = \frac{12}{40} = \frac{3}{10}$$

Resposta: **Opção B**

Exame – 2011, Ép. especial

48. Considerando a experiência aleatória que consiste em escolher ao acaso um funcionário da empresa, e os acontecimentos:
L:≪O funcionário é licenciado≫
Q:≪O funcionário tem idade não inferior a 40 anos≫
Temos que $P(L) = \frac{60}{100} = \frac{3}{5}$, $P\left(\overline{Q}|L\right) = \frac{80}{100} = \frac{4}{5}$ e $P\left(\overline{Q}|\overline{L}\right) = \frac{10}{100} = \frac{1}{10}$

Assim, organizando os dados numa tabela obtemos:

- $P\left(L \cap \overline{Q}\right) = P\left(L\right) \times P\left(\overline{Q}|L\right) = \frac{3}{5} \times \frac{4}{5} = \frac{12}{25}$
- $P\left(\overline{L}\right) = 1 - P(L) = 1 - \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$
- $P\left(\overline{L} \cap \overline{Q}\right) = P\left(\overline{L}\right) \times P\left(\overline{Q}|\overline{L}\right) = \frac{2}{5} \times \frac{1}{10} = \frac{2}{50} = \frac{1}{25}$
- $P\left(\overline{Q}\right) = P\left(L \cap \overline{Q}\right) + P\left(\overline{L} \cap \overline{Q}\right) = \frac{12}{25} + \frac{1}{25} = \frac{13}{25}$
- $P(L \cap Q) = P(L) - P\left(L \cap \overline{Q}\right) = \frac{3}{5} - \frac{12}{25} = \frac{3}{25}$
- $P(Q) = 1 - P\left(\overline{L}\right) = 1 - \frac{13}{25} = \frac{12}{25}$

	L	$\overline{L}$	
Q	$\frac{3}{25}$		$\frac{12}{25}$
$\overline{Q}$	$\frac{12}{25}$	$\frac{1}{25}$	$\frac{13}{25}$
	$\frac{3}{5}$	$\frac{2}{5}$	1

Assim, calculando a probabilidade de, ao escolher, ao acaso, um funcionário desta empresa e ele ser licenciado, sabendo que tem uma idade não inferior a 40 anos, e escrevendo o resultado na forma de fração irredutível, temos:

$$P(L|Q) = \frac{P(L \cap Q)}{P(Q)} = \frac{\frac{3}{25}}{\frac{12}{25}} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$$

Exame – 2011, 2.ª Fase

49. A igualdade da opção A é válida para acontecimentos contrários, a igualdade da opção B é válida para acontecimentos incompatíveis e a condição da opção C é válida para acontecimentos não equiprováveis.
Como A e B são dois acontecimentos independentes, sabemos que $P(A) \times P(B) = P(A \cap B)$ e assim temos que

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{P(A) \times P(B)}{P(A)} = P(B)$$

Resposta: **Opção D**

Exame – 2011, 1.ª Fase

50. Considerando a experiência aleatória que consiste em seleccionar, ao acaso, um cliente desta companhia aérea, e os acontecimentos:
B:≪O cliente ter comprado um bilhete para Berlim≫
V:≪O cliente faz a viagem sem perder o voo≫
Temos que $P\left(\overline{V}|B\right) = \frac{5}{100} = 0{,}05$, $P\left(V|\overline{B}\right) = \frac{92}{100} = 0{,}92$ e $P(B) = \frac{30}{100} = 0{,}3$

Assim, organizando os dados numa tabela obtemos:

- $P\left(\overline{V} \cap B\right) = P(B) \times P\left(\overline{V}|B\right) = 0{,}3 \times 0{,}05 = 0{,}015$
- $P\left(\overline{B}\right) = P(B) = 1 - 0{,}3 = 0{,}7$
- $P\left(V \cap \overline{B}\right) = P\left(\overline{B}\right) \times P\left(V|\overline{B}\right) = 0{,}7 \times 0{,}92 = 0{,}644$
- $P\left(\overline{V} \cap \overline{B}\right) = P\left(\overline{B}\right) - P\left(V \cap \overline{B}\right) = 0{,}7 - 0{,}664 = 0{,}056$

	B	$\overline{B}$	
V		0,644	
$\overline{V}$	0,015	0,056	0,071
	0,3	0,7	1

Assim, calculando a probabilidade de um passageiro desta companhia aérea perder o voo, e escrevendo o resultado na forma de dízima, temos

$$P\left(\overline{V}\right) = P\left(\overline{V} \cap B\right) + P\left(\overline{V} \cap \overline{B}\right) = 0{,}015 + 0{,}056 = 0{,}071$$

Exame – 2011, 1.ª Fase

51. Podemos observar que existem $8 + 2 = 10$ alunos do sexo masculino.
Destes, apenas 2 têm 18 anos, pelo que a probabilidade de selecionar, ao acaso, de entre os rapazes da turma, um que tenha 18 anos, é

$$P(B|A) = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$$

Resposta: **Opção D**

Teste Intermédio 12.º ano – 19.01.2011

52. Organizando os dados numa tabela obtemos:

- $P(A \cap B) = P(B) \times P(A|B) = 0{,}2 \times 0{,}3 = 0{,}06$
- $P\left(\overline{B}\right) = 1 - P(B) = 1 - 0{,}3 = 0{,}7$
- $P\left(\overline{B} \cap \overline{Q}\right) = P\left(\overline{B}\right) \times P\left(\overline{A}|\overline{B}\right) = 0{,}7 \times 0{,}4 = 0{,}28$
- $P\left(A \cap \overline{B}\right) = P\left(\overline{Q}\right) - P\left(\overline{A} \cap \overline{B}\right) = 0{,}7 - 0{,}28 = 0{,}42$
- $P(A) = P(A \cap B) + P\left(A \cap \overline{B}\right) = 0{,}06 + 0{,}42 = 0{,}48$

	A	$\overline{A}$	
B	0,06		0,3
$\overline{B}$	0,42	0,28	0,7
	0,48		1

Assim, calculando a probabilidade e escrevendo o resultado na forma de fração irredutível, temos:

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0{,}06}{0{,}48} = \frac{1}{8}$$

Teste Intermédio 12.º ano – 19.01.2011

53. No contexto da situação descrita, $P(L|J)$ é a probabilidade de que lançando os dois dados e usando os números indicados pelos dados como coordenadas do ponto Q, este ponto pertença ao terceiro quadrante, sabendo que o número indicado pelo dado A é negativo.
Como é sabido que a abcissa do ponto Q é negativa, este ponto pertence ao terceiro quadrante se a ordenada também for negativa, o que ocorre 1 em cada 6 vezes, visto que das 6 faces do dado B, apenas uma tem um número negativo inscrito.
Assim, usando a Regra de Laplace, e escrevendo o resultado na forma de fração, temos

$$P(L|J) = \frac{1}{6}$$

Exame – 2010, 2.ª Fase

54. Considerando a experiência aleatória que consiste em escolher, ao acaso, um dos alunos da escola , e os acontecimentos:
C:≪O aluno tem computador portátil≫
D:≪O aluno sabe o nome do diretor≫

Temos que $P(C) = \frac{1}{5}$; $P\left(\overline{D}\right) = \frac{1}{2}$ e $P\left(C|\overline{D}\right) = \frac{1}{3}$

Assim, organizando os dados numa tabela obtemos:

- $P\left(C|\overline{D}\right) = P\left(\overline{D}\right) \times P(C|\overline{D}) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$
- $P(C \cap D) = P(C) - P\left(C|\overline{D}\right) = \frac{1}{5} - \frac{1}{6} = \frac{1}{30}$
- $P(D) = 1 - P\left(\overline{D}\right) = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}$

	C	$\overline{C}$	
D	$\frac{1}{30}$	$\frac{7}{15}$	$\frac{1}{2}$
$\overline{D}$	$\frac{1}{6}$		$\frac{1}{2}$
	$\frac{1}{5}$		1

Assim, calculando a probabilidade de um aluno dessa escola, escolhido ao acaso, não ter computador portátil e saber o nome do diretor, e escrevendo o resultado na forma de fração irredutível, temos

$$P\left(\overline{C} \cap D\right) = P(D) - P(C \cap D) = \frac{1}{2} - \frac{1}{30} = \frac{7}{15}$$

Exame – 2010, 1.ª Fase

55. No contexto da experiência aleatória definida, $P(A|B)$ é a probabilidade de que os números sejam iguais, sabendo que a soma dos números saídos nas duas bolas é igual a 1.
Como todas as bolas têm números inteiros e não é possível que a soma de dois números inteiros iguais seja 1, então é impossível que os números extraídos sejam iguais, sabendo que a soma é 1, ou seja

$$P(A|B) = 0$$

Teste Intermédio 12.º ano – 15.03.2010

56. No contexto da experiência aleatória definida, $P(A|B)$ é a probabilidade de selecionar um cartão com um número inferior a $\sqrt{30}$, sabendo que o cartão escolhido tem a forma de um círculo.
Como $\sqrt{30} \approx 5{,}48$ e, dos números dos 4 cartões com a forma de um círculo, apenas um deles é maior que $\sqrt{30}$, nomeadamente o 7, então, recorrendo à Regra de Laplace, temos 1 caso possível e 4 casos favoráveis, pelo que

$$P(A|B) = \frac{1}{4}$$

Resposta: **Opção B**

Teste Intermédio 12.º ano – 04.12.2009

57. Considerando a experiência aleatória que consiste em selecionar, ao acaso um atleta participante no encontro desportivo, e com o objetivo de utilizar a igualdade indicada, e uma vez que sabemos que "Metade dos atletas portugueses que participam no encontro são do sexo feminino", podemos definir que $P(B|A) = \frac{1}{2}$, para os acontecimentos:
A:≪O atleta é português≫
B:≪O atleta é do sexo feminino≫
E assim, para além de $P(B|A) = \frac{1}{2}$, sabemos também que $P\left(\overline{A} \cup \overline{B}\right) = \frac{90}{100} = \frac{9}{10}$ e que $P\left(\overline{A}\right) = 1 - P(A)$

Assim, substituindo em $P(A) \times [P(B|A) - 1] + P\left(\overline{A} \cup \overline{B}\right) = P\left(\overline{A}\right)$, vem:

$$P(A) \times \left(\frac{1}{2} - 1\right) + \frac{9}{10} = 1 - P(A) \Leftrightarrow P(A) \times \left(-\frac{1}{2}\right) + P(A) = 1 - \frac{9}{10} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}P(A) = \frac{1}{10} \Leftrightarrow P(A) = \frac{2}{10} \Leftrightarrow P(A) = \frac{1}{5}$$

Como existiam 200 participantes no encontro, e sabemos que o número de portugueses é $\frac{1}{5}$, temos que o número de atletas portugueses é $\frac{1}{5} \times 200 = \frac{200}{5} = 40$

Teste Intermédio 12.º ano – 04.12.2009

58. Considerando a experiência aleatória que na realização dos dois testes no mesmo dia, pelo estudante, e os acontecimentos:
T_1:≪Ter positiva no primeiro teste≫
T_2:≪Ter positiva no segundo teste≫

Temos que $P(T_1) = 0{,}7$; $P(T_2) = 0{,}8$ e $P\left(\overline{T_1} \cap \overline{T_2}\right) = 0{,}1$
Pelo teorema do acontecimento contrário, vem que $P\left(\overline{T_1}\right) = 1 - P(T_1) = 1 - 0{,}7 = 0{,}3$
Assim,a probabilidade de o estudante ter negativa no segundo teste, sabendo que teve negativa no primeiro teste, é

$$P\left(\overline{T_2}|\overline{T_1}\right) = \frac{P\left(\overline{T_1} \cap \overline{T_2}\right)}{P\left(\overline{T_1}\right)} = \frac{0{,}1}{0{,}3} = \frac{1}{3}$$

Resposta: **Opção C**

Exame – 2009, 2.ª Fase

59. Como $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$, temos que:

$$P(A \cap B) = 0{,}3 + 0{,}4 - 0{,}5 = 0{,}2$$

Logo, a probabilidade de se realizar A, sabendo que B se realiza, é

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0{,}2}{0{,}4} = \frac{1}{2}$$

Resposta: **Opção D**

Exame – 2009, 1.ª Fase

60. No contexto da situação descrita $P\left((B \cap C)|A\right)$ é a probabilidade de a segunda bola retirada da caixa seja amarela e tenha um número par, sabendo que a primeira bola retirada é verde.
De acordo com a Regra de Laplace, a probabilidade é calculada pelo quociente do número de casos favoráveis pelo número de casos possíveis, sendo os casos possíveis equiprováveis.
Como a caixa tem 20 bolas e sabemos que foi extraída uma bola de cor verde, que não foi resposta, ficaram na caixa 19 bolas, ou seja, existem 19 casos possíveis, para a extração da segunda bola.
Como sabemos que a primeira bola extraída é verde, logo tem um número inferior ou igual a 10, pelo que das bolas amarelas que estão na caixa, numeradas de 11 a 20, 5 têm números pares. Logo, o número de casos favoráveis é 5.
Desta forma temos que $P\left((B \cap C)|A\right) = \frac{5}{19}$

Exame – 2009, 1.ª Fase

61. No contexto da situação descrita, $P\left(B|\overline{A}\right)$ é a probabilidade de que, ao retirar sucessivamente e sem reposição duas bolas do saco, o número da segunda bola retirada seja par, sabendo que ao número da primeira bola retirada não seja para, isto é, sabendo que o número da primeira bola retirada seja ímpar.
Assim, quando se faz a extração da segunda bola, existem no saco 10 bolas (menos uma que as 11 que estavam inicialmente porque a primeira bola não foi reposta), das quais 5 têm um número par (porque sabemos que na primeira extração não foi retirada nenhuma das bolas com número par).
Desta forma, recorrendo à Regra de Laplace existem 10 casos possíveis e 5 favoráveis, pelo que

$$P\left(B|\overline{A}\right) = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$$

Teste Intermédio 12.º ano – 11.03.2009

62. Com o objetivo de usar a fórmula $P(A|B) - P(\overline{B}) \times P(A|B) = P(A) \times P(B|A)$, podemos verificar que

$$P(A|B) - P(\overline{B}) \times P(A|B) = P(A) \times P(B|A) \Leftrightarrow P(A|B)\left(1 - P(\overline{B})\right) = P(A) \times P(B|A) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P(A|B) \times P(B) = P(A) \times P(B|A) \Leftrightarrow P(A|B) = \frac{P(A) \times P(B|A)}{P(B)}$$

Como se pretende calcular a probabilidade de um aluno da turma, escolhido ao acaso, ser praticante de desporto, sabendo que é uma rapariga, vamos definir os acontecimentos:
A:≪O aluno é praticante de desporto≫
B:≪O aluno é uma rapariga≫

E assim temos que $P(A) = 0{,}6$, $P(B) = 0{,}4$ e $P(B|A) = 0{,}5$
Logo, a probabilidade de um aluno da turma, escolhido ao acaso, ser praticante de desporto, sabendo que é uma rapariga, é

$$P(A|B) = \frac{0{,}6 \times 0{,}5}{0{,}4} = \frac{0{,}3}{0{,}4} = 0{,}75$$

A que corresponde uma probabilidade de 75%

Teste Intermédio 12.º ano – 10.12.2008

63. Como na experiência aleatória descrita, foi definido que ≪*Se sair o número 5, tira-se uma bola da caixa A*≫, para calcular a probabilidade de a bola retirada ser verde, consideramos apenas o conteúdo da caixa A (duas bolas verdes e uma bola amarela).
Assim temos que existem 2 bolas verdes (número de casos favoráveis) num total de 3 bolas (número de casos possíveis), pelo que a probabilidade é de $\frac{2}{3}$

Resposta: **Opção D**

Exame – 2008, 2.ª Fase

64. Se a probabilidade de a bola retirada da caixa B ser azul é igual a $\frac{1}{2}$, e na caixa B só existem bolas verdes e azuis, então o número de bolas azuis e verde é igual.
Como a composição inicial era de 3 bolas verdes e 4 bolas azuis, então a bola retirada da caixa A (e colocada na caixa B) tinha cor verde.

Exame – 2008, 1.ª Fase

65. Sabemos que $P(A \cup B) = 5P(A \cap B)$, pelo que, substituindo na igualdade $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$, vem que:

$$5P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Leftrightarrow 5P(A \cap B) + P(A \cap B) = P(A) + P(B) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 6P(A \cap B) = P(A) + P(B)$$

Como $P(A) = P(B)$, temos que

$$\Leftrightarrow 6P(A \cap B) = P(B) + P(B) \Leftrightarrow 6P(A \cap B) = 2P(B) \Leftrightarrow P(A \cap B) = \frac{2}{6}P(B) \Leftrightarrow P(A \cap B) = \frac{1}{3}P(B)$$

Assim, a probabilidade de A acontecer, sabendo que B aconteceu é dada por

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{3}P(B)}{P(B)} \underset{P(B) \neq 0}{=} \frac{1}{3}$$

Resposta: **Opção D**

Teste Intermédio 12.º ano – 29.04.2008

66. Assumir a ocorrência do acontecimento $\overline{M}$, significa que as bolas retiradas da caixa 1 (e colocadas na caixa 2) não têm a mesma cor, ou seja, são de cores diferentes.
Como na caixa 1, só existia uma bola de cor verde e as restantes eram azuis, se foram retiradas duas bolas de cores diferentes, sabemos que estas duas bolas eram, uma de cor verde e outra de cor azul.
Assim, a caixa 2 passou a ter duas bolas de cor verde e uma de cor azul, pelo que ao retirar uma bola da caixa 2, temos 3 bolas possíveis, das quais duas são verdes, pelo que, recorrendo à Regra de Laplace, temos

$$P\left(V|\overline{M}\right) = \frac{2}{3}$$

Resposta: **Opção C**

Teste Intermédio 12.º ano – 17.01.2008

67. Quando se lançam dois dados numerados de 1 a 6, existem apenas 3 hipóteses de obter uma soma igual a 4 ($3+1$, $1+3$ e $2+2$).
Assim, para calcular a probabilidade de ter saído o mesmo número, em ambos os dados, sabendo que a soma dos números saídos foi quatro, consideramos 3 casos possíveis e apenas 1 favorável ($2+2$), pelo que, a probabilidade é $\frac{1}{3}$

Resposta: **Opção C**

Exame – 2007, 2.ª Fase

68. Como a extração é feita sem reposição, no final da terceira extração restam 2 bolas no saco.
Como sabemos que as primeiras 3 extrações formaram a sucessão de letras TIM, existem apenas duas hipóteses para formar a sucessão das 5 letras: TIMOR e TIMRO, uma vez, que depois de extraída a quarta bola, não existe nenhuma incerteza relativamente à última.
Assim, a probabilidade de que, no final do processo, fique formada a palavra TIMOR, sabendo-se que, ao fim da terceira extração, estava formada a sucessão de letras TIM é $\frac{1}{2}$

Resposta: **Opção C**

Exame – 2007, 1.ª Fase

69. Como $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ quaisquer que sejam os acontecimentos A e B, e neste caso, $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$, podemos concluir que $P(A \cap B) = 0$

Assim, temos que $P(A|B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = \dfrac{0}{P(B)} = 0$

Resposta: **Opção A**

Teste Intermédio 12.º ano – 15.03.2007

70. Sabemos que um número é múltiplo de 10, se for múltiplo de 5 e de 2 simultaneamente; ou seja, no contexto da situação descrita $C = A \cap B$, pelo que $P(C) = P(A \cap B)$
Assim, vem que

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \Leftrightarrow P(B|A) = \frac{P(C)}{P(A)} \Leftrightarrow P(A) = \frac{P(C)}{P(B|A)}$$

Substituindo os valores de $P(C)$ e de $P(A|B)$ vem que $P(A) = \frac{\frac{3}{8}}{\frac{15}{16}} = \frac{2}{5}$

Resposta: **Opção B**

Teste Intermédio 12.º ano – 07.12.2006

71. No contexto da situação descrita, $P(B|A)$ é a probabilidade de sair bola com número 1 na segunda extração sabendo que a bola saída na primeira extração tinha o mesmo número.
Assim, como sabemos que na primeira extração saiu bola com o número 1, ela foi resposta no saco e foram adicionadas mais 10 bolas com o número 1, pelo que no saco ficaram $10 + 4 = 14$ bolas numeradas com o número 1, 5 com o número 2 e 1 com o número 3.
Desta forma o número de casos possíveis para a extração da segunda bola é de $14 + 5 + 1 = 20$ e o número de casos favoráveis é de 14.
Assim, recorrendo à Regra de Laplace temos que

$$P(B|A) = \frac{14}{20} = \frac{7}{10}$$

Teste Intermédio 12.º ano – 07.12.2006

72. No contexto da situação descrita, $P(C|D)$ é a probabilidade de saírem números cujo produto é 16, sabendo que são números iguais.
Analogamente, $P(D|C)$ é a probabilidade de saírem números iguais, sabendo que o produto desses números é 16.

Para determinar $P(C|D)$, temos que o número de casos possíveis é 6, porque como um dos dados está numerado de 1 a 6 (e também existem estes números no outro dado), existem 6 pares de números iguais. Destes apenas 1 resulta num produto 16, o que acontece quando ambos os números são quatro ($4 \times 4 = 16$), e assim, recorrendo à Regra de Laplace temos que:

$$P(C|D) = \frac{1}{6}$$

Para determinar $P(D|C)$, observamos que o número de casos possíveis é 2, porque como 16 é múltiplo de 2, 4 e 8, só é possível obter um produto igual a 16 em duas combinações ($4 \times 4 = 16$ e $2 \times 8 = 16$). Como destas duas apenas uma resulta do produto de números iguais ($4 \times 4 = 16$), recorrendo à Regra de Laplace temos que:

$$P(D|C) = \frac{1}{2}$$

Exame – 2006, Ép. especial

73. Como $P(B|A)$ é a probabilidade de, ao selecionar um aluno ao acaso, escolher um rapaz, sabendo que o aluno tem 7 anos, existem 9 casos possíveis, que correspondem ao total de alunos com 7 anos ($2 + 7 = 9$). Como se pretende que o aluno seja um rapaz, o número de casos favoráveis é 2, que corresponde ao número de rapazes com 7 anos.
Assim, recorrendo à Regra de Laplace temos que $P(B|A) = \frac{2}{9}$

Exame – 2006, 2.ª Fase

74. No contexto da situação descrita, $P(B|A)$ é a probabilidade de que a segunda bola extraída da caixa seja branca, sabendo que a primeira bola extraída é preta.
Como $P(B|A) = \frac{1}{2}$, então no momento da extração da segunda bola, o número de bolas pretas e brancas, dentro da caixa é igual.
Como é sabido que a primeira bola extraída é preta, no momento da extração da segunda bola, ainda estão as 10 bolas brancas na caixa.
Assim, como no momento da extração da segunda bola, existem 10 bolas brancas e o mesmo número de bolas pretas, e já tinha sido extraída uma bola preta, sem ter sido reposta, o número de bolas pretas que estão inicialmente na caixa é $10 + 1 = 11$

Exame – 2006, 1.ª Fase

75. Considerando a experiência aleatória que consiste em escolher, ao acaso, um dos alunos da turma , e os acontecimentos:
A:≪O aluno pratica andebol≫
B:≪O aluno pratica basquetebol≫
Temos que $P(A) = 0{,}5$, $P(B) = 0{,}7$ e $P(A \cup B) = 1$ (porque todos os alunos da turma praticam pelo menos um dos desportos).
Pretendemos determinar o valor de $P(B|A)$, que é dado por

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Assim, como $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$, vem que

$$P(A \cap B) = 0{,}5 + 0{,}7 - 1 = 0{,}2$$

e logo, temos que:

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0{,}2}{0{,}5} = 0{,}4$$

Resposta: **Opção D**

Teste Intermédio 12.º ano – 17.03.2006

76. Considerando a experiência aleatória que consiste em selecionar, ao acaso, um jovem, participante no acampamento, e os acontecimentos:
F:≪O jovem ser uma rapariga≫
N:≪O jovem ser de nacionalidade portuguesa≫
Temos que $P(N) = \frac{1}{4} = 0{,}25$, $P(F) = 0{,}52$ e $P\left(\overline{F}|N\right) = \frac{3}{5} = 0{,}6$

Assim, organizando os dados numa tabela obtemos:

- $P\left(\overline{F} \cap N\right) = P(N) \times P\left(\overline{F}|N\right) = 0{,}25 \times 0{,}6 = 0{,}15$
- $P(N \cap F) = P(N) - P\left(\overline{F} \cap N\right) = 0{,}25 - 0{,}15 = 0{,}1$

	N	$\overline{N}$	
F	0,1	0,42	0,52
$\overline{F}$	0,15		
	0,25		1

Assim, calculando a probabilidade de o prémio sair a um jovem do sexo feminino que seja de nacionalidade estrangeira, temos:

$$P\left(\overline{N} \cap F\right) = P(F) - P(N \cap F) = 0{,}52 - 0{,}1 = 0{,}42$$

a que corresponde um probabilidade de 42 %

Teste Intermédio 12.º ano – 07.12.2005

77. No contexto da situação descrita, $P(B|A)$ é a probabilidade de que a Catarina e o Filipe ficarem sentados ao lado um do outro, sabendo que o Diogo, a Elsa e o Filipe, se sentam em lugares consecutivos, ficando a Elsa no meio.
Como sabemos que a Elsa se sentou entre o Diogo e o Filipe, em lugares consecutivos, e a mesa é circular e tem 6 lugares, existem 3 lugares disponíveis - um junto do Filipe, e outros dois (que não estão junto do Filipe).
Assim, a Catarina deve sentar-se num dos 3 lugares disponíveis (número de casos possíveis), sendo que em apenas 1 deles, ficará sentada ao lado do Filipe (número de casos favoráveis).
Assim, recorrendo à Regra de Laplace, temos que $P(B|A) = \frac{1}{3}$

Exame – 2005, Ép. especial (cód. 435)

78. No contexto da situação descrita $P(X|Y) = \frac{1}{2}$ significa que, de entre as figuras pintadas de preto, metade são quadrados.
Assim, o único conjunto que obedece a esta condição é o da opção (B).
Podemos observar apenas as figuras pintadas de preto e verificar que

- na opção (A), temos que $P(X|Y) = \frac{2}{2} = 1$
- na opção (B), temos que $P(X|Y) = \frac{1}{2}$
- na opção (C), temos que $P(X|Y) = \frac{1}{3}$
- na opção (B), temos que $P(X|Y) = \frac{1}{1} = 1$

Resposta: **Opção B**

Exame – 2005, 2.ª Fase (cód. 435)

79. Considerando a experiência aleatória que extrair sucessivamente duas bolas da caixa, não repondo a primeira bola na caixa, antes de retirar a segunda, e os acontecimentos:
A: ≪a primeira bola retirada é preta≫
B: ≪a segunda bola retirada é branca≫

Temos que $P(B|A)$ é a probabilidade de que a segunda bola retirada seja branca, sabendo que a primeira é preta. Como a primeira bola retirada não é reposta, antes da segunda extração existem 7 bolas - 2 pretas e 5 brancas, pelo que, usando a Regra de Laplace, vem que

$$P(B|A) = \frac{5}{7}$$

Da mesma forma, $P\left(B|\overline{A}\right)$ é a probabilidade de que a segunda bola retirada seja branca, sabendo que a primeira não é preta, ou seja, é branca. Nestas circunstâncias, o conteúdo da caixa, antes da segunda extração é de 3 bolas pretas e 4 brancas, num total de 7 bolas, pelo que

$$P\left(B|\overline{A}\right) = \frac{4}{7}$$

Logo, como $P(B|A) \neq P\left(B|\overline{A}\right)$ então A e B **não** são independentes.

Exame – 2004, Ép. especial (cód. 435)

80. No contexto da situação descrita $P(B|A)$ é a probabilidade de lançar um dado equilibrado, com as faces numeradas de 1 a 6 e sair um número menor do que 4, sabendo que saiu face par.
Como é sabido que saiu face par, o número de casos possíveis é 3 (correspondendo às faces 2, 4 ou 6). Destes 3 casos apenas 1 é favorável (o 2).
Assim, recorrendo à Regra de Laplace, temos que $P(B|A) = \frac{1}{3}$

Exame – 2004, 2.ª Fase (cód. 435)

81.

81.1. Como o Manuel vai comprar pão em 40% dos dias e a Adelaide nos restantes dias, a Adelaide vai comparar pão em 60% dos dias ($100-40=60$), ou seja, vai comprar pão em mais dias que o Manuel, pelo que é mais provável que o vizinho encontre, na padaria, a Adelaide.

81.2. Considerando a experiência aleatória que consiste em selecionar, ao acaso um dia, e os acontecimentos:
A:≪A Adelaide foi comprar pão≫
C:≪A Adelaide comprou pão de centeio≫
Temos que $P(A)=0{,}6$ e $P\left(\overline{C}|A\right)=0{,}2$ e pretendemos calcular $P(A\cap C)$

Como $P(C|A)=1-P\left(\overline{C}|A\right)$, temos que $P(C|A)=1-0{,}2=0{,}8$ (ou seja, quando a Adelaide vai comprar pão, compra pão de centeio em 80% das vezes).

Assim, como $P(C|A)=\dfrac{P(A\cap C)}{P(A)} \Leftrightarrow P(A\cap C)=P(C|A)\times P(A)$, pelo que a probabilidade de que, num dia escolhido ao acaso, seja a Adelaide a ir à padaria e traga pão de centeio é

$$P(A\cap C)=0{,}8\times 0{,}6=0{,}48$$

o que corresponde a uma probabilidade de 48%

Exame – 2003, Prova para militares (cód. 435)

82. Como $P(A|B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)} \Leftrightarrow P(B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(A|B)}$, vem que

$$P(B)=\frac{0{,}1}{0{,}25}=0{,}4$$

Como $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B) \Leftrightarrow P(A)=P(A\cup B)-P(B)+P(A\cup B)$, temos que

$$P(A)=0{,}8-0{,}4+0{,}1=0{,}5$$

Como $P\left(\overline{A}\right)=1-P(A)$, vem que

$$P\left(\overline{A}\right)=1-0{,}5=0{,}5$$

Logo $P(A)=0{,}5=P\left(\overline{A}\right)$

Exame – 2003, 2.ª Fase (cód. 435)

83. Considerando a experiência aleatória que consiste em selecionar um português ao acaso, e os acontecimentos:
N:≪Ser Rhésus negativo≫
A:≪Ter sangue do tipo A≫
Temos que $P(N)=6{,}5+1{,}2+0{,}4+6{,}7=14{,}8\%$ e $P(A\cap N)=6{,}5\%$

Assim, calculando a probabilidade de escolher um português ao acaso, ele ter sangue do tipo A, sabendo que é Rhésus negativo, é

$$P(A|N)=\frac{P(A\cap N)}{P(A)}=\frac{6{,}5\%}{14{,}8\%}\approx 0{,}44$$

a que corresponde um probabilidade aproximada de 44%

Exame – 2003, 1.ª Fase – 2ª chamada (cód. 435)

84. No contexto da situação descrita $P(Y|X)$ é a probabilidade de sair bola verde, depois de lançar o dado, escolher a caixa e retirar uma bola da caixa escolhida, sabendo que saiu face par no lançamento do dado.
Como sabemos que saiu face para no lançamento do dado, e como 1 não é par, então a bola é retirada da caixa B.
Como a caixa B contém seis bolas verdes e uma bola amarela, existem 6 casos favoráveis (número de bolas verdes), e 7 casos possíveis (número de bolas na caixa), pelo que, recorrendo à Regra de Laplace, temos

$$P(Y|X)=\frac{6}{7}$$

Exame – 2003, 1.ª Fase – 1.ª chamada (cód. 435)

85. Como se sabe que a probabilidade de a segunda bola extraída ser preta, sabendo que a primeira bola extraída foi verde, é $\frac{1}{2}$, então na caixa, antes da segunda extração existem o mesmo número de bolas verdes e pretas.
Assim, como antes da primeira extração existiam 6 bolas verdes e uma foi retirada, e a segunda extração é feita sem reposição da primeira bola, então, antes da segunda extração existem 5 bolas verdes.
Logo, como antes da segunda extração o número de bolas verdes é igual ao número de bolas pretas, antes da segunda extração, e também inicialmente, o número de bolas pretas na caixa é 5.

Resposta: **Opção B**

Exame – 2002, Prova para militares (cód. 435)

86. No contexto da situação descrita $P\left((F_2 \cap C_2)|E_1\right)$ é a probabilidade de sair uma figura de copas - carta que é simultaneamente figura e do naipe de copas - na segunda extração, sabendo que saiu uma carta de espadas na primeira extração.
Assim, como a extração das duas cartas é feita suessivamente e sem reposição, antes da segunda extração existem $52-1=51$ cartas, porque a carta retirada não voltou a ser colocada no baralho, ou seja, 51 casos possíveis para a segunda extração.
Como sabemos que a primeira carta extraída era uma carta de espadas, todas as figuras de copas continuam no baralho, incluindo as 3 figuras de copas, pelo que o número de casos favoráveis é 3.
Assim, recorrendo à Regra de Laplace, vem que

$$P\left((F_2 \cap C_2)|E_1\right) = \frac{3}{51}$$

Exame – 2002, 2.ª Fase (cód. 435)

87. Como a afirmação só se reporta ao conjunto dos dias em que ≪o João vai de autocarro para a escola≫, este acontecimento é condicionante da probabilidade referida. Assim, só podemos afirmar que ≪o João chega atrasado à escola≫ em metade das vezes, se considerarmos que foi de autocarro para a escola, ou seja a afirmação ≪*Metade dos dias em que vai de autocarro para a escola, o João chega atrasado*≫ é equivalente a ≪*A probabilidade de o João chegar atrasado à escola, sabendo que foi de autocarro, é 0,5*≫, ou seja, $P(B|A) = 0{,}5$

Resposta: **Opção D**

Exame – 2002, 1.ª Fase – 2.ª chamada (cód. 435)

88. Considerando a experiência aleatória que consiste em escolher, aleatoriamente, uma rapariga de Vale do Rei, e os acontecimentos:
L:≪A rapariga tem cabelo louro≫
V:≪A rapariga tem olhos verdes≫
Temos que $P(V) = \frac{1}{4}$; $P(L) = \frac{1}{3}$ e $P(V|L) = \frac{1}{2}$

Assim, organizando os dados numa tabela obtemos:

- $P\left(\overline{V}\right) = 1 - P(V) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$
- $P\left(\overline{L}\right) = 1 - P(L) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$
- $P(V \cap L) = P(V|L) \times P(L) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$
- $P\left(V \cap \overline{L}\right) = P(V) - P(V \cap L) = \frac{1}{4} - \frac{1}{6} = \frac{1}{12}$

	L	$\overline{L}$	
V	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{4}$
$\overline{V}$		$\frac{7}{12}$	$\frac{3}{4}$
	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	1

Assim, calculando a probabilidade de escolher aleatoriamente uma rapariga de Vale do Rei, ela não ser loura nem ter olhos verdes, é

$$P\left(\overline{V} \cap \overline{L}\right) = P\left(\overline{V}\right) - P\left(\overline{V} \cap \overline{L}\right) = \frac{2}{3} - \frac{1}{12} = \frac{8}{12} - \frac{1}{12} = \frac{7}{12}$$

Exame – 2002, 1.ª Fase – 1.ª chamada (cód. 435)

89. Considerando a experiência aleatória que consiste em selecionar, aleatoriamente, um estudante da turma, e os acontecimentos:
I:≪O estudante ter escolhido a disciplina de Inglês≫
A:≪O estudante ter escolhido a disciplina de Alemão≫
Temos que $P(I) = 0{,}25$; $P(A) = 0{,}15$ e $P(A \cap I) = 0{,}1$

Assim, a probabilidade de um estudante dessa turma, selecionado aleatoriamente, ter escolhido Alemão sabendo que ele escolheu Inglês, é

$$P(A|I) = \frac{P(A \cap I)}{P(I)} = \frac{0{,}1}{0{,}25} = \frac{10}{25} = \frac{2}{5}$$

Resposta: **Opção C**

Exame – 2001, Prova para militares (cód. 435)

90. No contexto da situação descrita $P(B|A)$ é a probabilidade de ficarem, na caixa, menos bolas brancas do que pretas, sabendo que sai face 5 no primeiro lançamento do dado.
Como sabemos que sai face 5 no primeiro lançamento o conteúdo da caixa, antes do segundo lançamento passou a ser de 1 bola branca, porque se retiraram 5 das 6 que estavam no interior da caixa.
Assim, para que fiquem na caixa menos bolas brancas que pretas, devem ser colocadas 2, 3, 4, 5 ou 6 bolas pretas, ou seja, existem 5 casos favoráveis em 6 possíveis para o segundo lançamento do dado.
Assim, recorrendo à Regra de Laplace, temos que

$$P(B|A) = \frac{5}{6}$$

Exame – 2001, Ép. especial (cód. 435)

91. No contexto da situação descrita $P(C|A \cap B)$ é a probabilidade de que a comissão seja formada só por raparigas, sabendo que o presidente e o tesoureiro são ambos, raparigas.
Como é sabido que o presidente e o tesoureiro são ambos raparigas, então, antes da extração da terceira folha de papel, no saco estão 23 nomes - os 25 iniciais, menos os dois que foram entretanto retirados para a definição dos cargos de presidente e tesoureiro. Assim, antes da terceira extração, existem 23 casos possíveis.
Como a turma tem 15 raparigas, e já se sabe que foram selecionadas 2, restam 13. Para que ≪a comissão é formada só por raparigas≫, ou seja, para que ocorra o acontecimento C, na terceira extração deve sair o nome de uma rapariga, ou seja, existem 13 casos favoráveis.
Assim, recorrendo à Regra de LaPlace, vem que

$$P(C|A \cap B) = \frac{13}{23}$$

Exame – 2001, 2.ª Fase (cód. 435)

92. Como $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Leftrightarrow P(B) = P(A \cup B) - P(A) + P(A \cap B)$, ou seja

$$P(B) = 0{,}8 - 0{,}6 + 0{,}1 = 0{,}3$$

Como $P(A|B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$, temos que

$$P(A|B) = \frac{0{,}1}{0{,}3} = \frac{1}{3}$$

Resposta: **Opção C**

Exame – 2001, 1.ª Fase – 2ª chamada (cód. 435)

93. Considerando a experiência aleatória que consiste em escolher, aleatoriamente, um dos carros vendidos no *stand*, e os acontecimentos:
A:≪O automóvel está equipado com alarme≫
R:≪O automóvel está equipado com rádio≫
Temos que $P(A \cap R) = 0{,}15$; $P\left(\overline{A} \cap \overline{R}\right) = 0{,}2$ e $P(A) = 0{,}45$

Assim, organizando os dados numa tabela obtemos:

	A	$\overline{A}$	
R	0,15		
$\overline{R}$		0,2	
	0,45		1

93.1. Pretendemos calcular $P\left(R \cap \overline{A}\right)$, e temos que

$$P\left(\overline{A}\right) = 1 - P(A) = 1 - 0{,}45 = 0{,}55$$

E assim:

$$P\left(R \cap \overline{A}\right) = P\left(\overline{A}\right) - P\left(\overline{A} \cap \overline{R}\right) = 0{,}55 - 0{,}2 = 0{,}35$$

Logo a probabilidade da Marina acertar é de 35%

93.2. A probabilidade da Marina ganhar a aposta é $P(R|A)$. Calculando o valor da probabilidade e escrevendo o resultado na forma de fração irredutível, temos

$$P(R|A) = \frac{P(A \cap R)}{P(A)} = \frac{0{,}15}{0{,}45} = \frac{15}{45} = \frac{1}{3}$$

Prova modelo – 2001 (cód. 435)

94. Considerando a experiência aleatória que consiste em extrair, sucessivamente e sem reposição, duas cartas de um baralho completo e os acontecimentos:
E_1:≪Sair carta de espadas na primeira extração≫
E_2:≪Sair carta de espadas na segunda extração≫

Assim, vem que a probabilidade de pelo menos uma das cartas extraídas não seja do naipe de espadas, é equivalente a considerar que a primeira carta não é de espadas, ou a segunda carta não é de espadas, isto é, $P\left(\overline{E_1} \cup \overline{E_2}\right)$
Assim, como

- $P(E_1) = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$
- $P(E_2|E_1) = \frac{12}{51}$ (na segunda extração restam 12 cartas de espadas num total de 51 cartas)

Assim, utilizando a igualdade $P\left(\overline{E_1} \cup \overline{E_2}\right) = 1 - P(E_1) \times P(E_2|E_1)$, e escrevendo o resultado na forma de fração irredutível, vem que

$$P\left(\overline{E_1} \cup \overline{E_2}\right) = 1 - \frac{1}{4} \times \frac{12}{51} = \frac{16}{17}$$

Exame – 2000, 2.ª Fase (cód. 435)

95. Considerando a experiência aleatória que consiste em selecionar, ao acaso, um dos 10 iogurtes desta marca e os acontecimentos:
V:≪O iogurte está dentro do prazo de validade≫
E:≪O iogurte está estragado≫

Assim, de acordo com o enunciado temos que

- $P(E|V) = 0{,}005$
- $P\left(E|\overline{V}\right) = 0{,}65$

Como se pretende calcular a probabilidade de escolher, ao acaso, um dos dez iogurtes ele estar estragado, podemos considerar que o iogurte estragado pode ser um dos 8 iogurtes dentro do prazo, ou então um dos 2 que estão fora do prazo, e a soma das respetivas probabilidades:

$$P(E) = P(V) \times P(E|V) + P\left(\overline{V}\right) \times P\left(E|\overline{V}\right)$$

$$P(E) = \frac{8}{10} \times 0{,}005 + \frac{2}{10} \times 0{,}65 = 0{,}134$$

Exame – 2000, 1.ª Fase – 2.ª chamada (cód. 435)

96. Podemos interpretar que se é garantida a ocorrência do acontecimento A, então a probabilidade do próprio acontecimento ocorrer é 1, ou seja $P(A|A) = 1$
Em alternativa podemos verificar que $A \cap A = A$, pelo que, recorrendo à definição de probabilidade condicionada, vem

$$P(A|A) = \frac{P(A \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A)}{P(A)} = 1$$

Resposta: **Opção B**

Exame – 2001, 1.ª Fase – 1.ª chamada (cód. 435)

97. Como $P(B_2|B_1)$ é a probabilidade de que a bola retirada em segundo lugar seja branca, sabendo que a que foi retirada em primeiro lugar também era branca, sabemos que o conteúdo da caixa (antes da segunda extração, o conteúdo da caixa era de 4 bolas brancas e 5 bolas pretas.
Assim, existem 4 bolas brancas (casos favoráveis), num total de 9 bolas (casos possíveis), pelo que recorrendo à Regra de Laplace temos $p = \frac{4}{9}$

Resposta: **Opção C**

Prova modelo – 2000 (cód. 435)

98. Como é sabido que os dois primeiros lançamentos já foram realizados, e para que os números saídos nos quatro lançamentos sejam diferentes, no terceiro lançamento existem apenas 4 faces que têm números diferentes dos primeiros dois lançamentos, e no quarto lançamento, apenas 3 faces têm números diferentes dos três anteriores, pelo que a probabilidade é:

$$p = \frac{4}{6} \times \frac{3}{6} = \frac{4 \times 3}{6^2}$$

Resposta: **Opção D**

Exame – 1999, 1.ª Fase – 1.ª chamada (cód. 135)

99. Para calcular a probabilidade da segunda bola retirada ser par, sabendo que a primeira também é par, como a primeira bola não foi reposta, temos 11 casos possíveis $(12 - 1 = 11)$ correspondentes às 11 bolas que ainda estão no saco, e 5 casos favoráveis $(6 - 1 = 5)$ correspondentes às 5 bolas com o número par que ainda permanecem no saco.
Assim, recorrendo à Regra de Laplace, temos que a probabilidade é $\frac{5}{11}$

Resposta: **Opção D**

Exame – 1998, 2.ª Fase (cód. 135)(prog. antigo)