Teorema de Pitágoras

Proposta de sequência de tarefas para o 8.º ano - 3.º ciclo

Autores: Professores das turmas piloto do 8º ano – 3º ciclo de escolaridade

Ano Lectivo 2009 / 2010

Novembro de 2010

Introdução

Tópico:

- Teorema de Pitágoras
  - Demonstração e utilização

A cadeia de tarefas que apresentamos é um contributo para a planificação do tópico Teorema de Pitágoras tendo como princípio orientador o propósito principal de ensino de Geometria, no 3º ciclo:

Desenvolver nos alunos o sentido espacial, com ênfase na visualização e na compreensão de propriedades de figuras geométricas no plano e no espaço, a compreensão das transformações geométricas e da noção de demonstração, bem como a utilização destes conhecimentos e capacidades para resolver problemas em contextos diversos.

Em particular, trabalha os seguintes objectivos gerais de aprendizagem

• desenvolver a visualização e o raciocínio geométrico e ser capazes de os usar;
• compreender a noção de demonstração e ser capazes de fazer raciocínios dedutivos;
• ser capazes de resolver problemas, comunicar e raciocinar matematicamente em contextos geométricos e trigonométricos.

Para o tópico do Teorema de Pitágoras (Demonstração e utilização) o programa refere explicitamente os seguintes objectivos específicos:

• Compor e decompor polígonos recorrendo a triângulos e quadriláteros.
• Decompor um triângulo por uma mediana e um triângulo rectângulo pela altura referente à hipotenusa.
• Demonstrar o Teorema de Pitágoras.
• Resolver problemas no plano e no espaço aplicando o Teorema de Pitágoras.

E indica nas Notas que acompanham os objectivos específicos

• Obter uma fórmula para calcular a área de um trapézio a partir da sua decomposição.
• Relacionar os triângulos obtidos na decomposição de um triângulo rectângulo pela altura referente à hipotenusa e na decomposição de um triângulo por uma das suas medianas.
• Na demonstração do Teorema de Pitágoras, recorrer, por exemplo, à decomposição de quadrados.
• Fazer uma referência ao recíproco do Teorema de Pitágoras.
• Solicitar a determinação da área do hexágono regular e do comprimento da diagonal espacial do cubo e do paralelepípedo.

A articulação com as aprendizagens anteriores é feita recorrendo aos tópicos já estudados: congruência, semelhança, equivalência de figuras e operações com binómios, particularmente, os casos notáveis.

Das capacidades transversais, demos destaque especial ao raciocínio dedutivo e à comunicação matemática.

Nas tarefas sucedem-se actividades em que os alunos compõem e decompõem figuras, constroem figuras equivalentes e obtêm a fórmula da área do trapézio. De seguida, conjecturam o resultado do Teorema de Pitágoras com composições e decomposições de figuras.

Com o resultado admitido, apresenta-se uma tarefa com aplicações e problemas onde se recorre ao Teorema de Pitágoras. Finalmente, propõe-se aos alunos várias demonstrações do teorema puramente geométricas ou recorrendo a figuras e a expressões algébricas.

Proposta de planificação

Blocos previstos	Tópico	Objectivos específicos	Notas	Tarefas	Instrumentos
5	**Teorema de Pitágoras** • Demonstração e utilização	✓ Compor e decompor polígonos recorrendo a triângulos e quadriláteros. ✓ Decompor um triângulo por uma mediana e um triângulo rectângulo pela altura referente à hipotenusa. ✓ Demonstrar o Teorema de Pitágoras. ✓ Resolver problemas no plano e no espaço aplicando o Teorema de Pitágoras.	Os alunos devem: -obter uma fórmula para calcular a área de um trapézio a partir da sua decomposição; -relacionar os triângulos obtidos na decomposição de um triângulo rectângulo pela altura referente à hipotenusa e na decomposição de um triângulo por uma das suas medianas; - na demonstração do Teorema de Pitágoras, recorrer, por exemplo, à decomposição de quadrados; - fazer uma referência ao recíproco do Teorema de Pitágoras; - solicitar a determinação da área do hexágono regular e do comprimento da diagonal espacial do cubo e do paralelepípedo.	**Tarefa 1** Tetraminós	Papel e lápis, tesouras, cartolina e peças de forma quadrada.
				Tarefa 2 Trapézios e triângulos	Papel e lápis, tesouras e cartolina
				Tarefa 3 Teorema de Pitágoras	AGD
				Tarefa 4 Teorema de Pitágoras – Resolução de problemas	Material de desenho, papel e lápis e calculadora.
				Tarefa 5 Teorema de Pitágoras – demonstrações.	Material de desenho, papel e lápis, cartolinas e tesouras.

Tarefa 1 – Tetraminós

- Com esta tarefa pretende-se que os alunos consolidem as noções de área e de perímetro de um polígono e desenvolvam o sentido espacial através da decomposição de polígonos.

- Tema matemático: Geometria

- Nível de ensino: 3º ciclo

- Tópicos matemáticos: Teorema de Pitágoras

- Subtópicos matemáticos: Decomposição de polígonos

- Capacidades transversais:

  Raciocínio matemático: formulação de conjecturas.
  Comunicação matemática: interpretação, representação e discussão.
  Resolução de problemas: Concepção e justificação de estratégias

- Conhecimentos prévios dos alunos:

  Conceito de área e de perímetro de um polígono.

- Aprendizagens visadas:

  Compor e decompor polígonos

- Cadeia: 1ª tarefa de "Teorema de Pitágoras – 8º ano"

- Recursos: Material de desenho, cartolina e tesouras, peças de forma quadrada.

- Duração prevista: 1 bloco de 90 minutos.

- Notas para o professor:

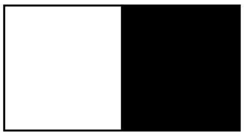
  Esta tarefa é constituída por duas partes.
  Na primeira pretende-se que os alunos investiguem e encontrem todos os tetraminós. Para o efeito, pode utilizar-se o anexo "Tetraminós – folha de registos" para os alunos desenharem (neste nível de ensino recorrer a peças de forma quadrada só em último caso).
  É aconselhável que a primeira parte da tarefa seja realizada no final de uma aula, para que os alunos possam levar para casa o anexo "construção dos tetraminós" para recortar. Assim, no início da aula seguinte, quando se realiza a segunda parte da tarefa, cada aluno tem os cinco tetraminós devidamente recortados.
  A segunda parte inicia-se com 5 puzzles que visam trabalhar a decomposição de polígonos. Para terminar esta tarefa os alunos são colocados perante um conjunto de problemas que têm por objectivo consolidar e desenvolver as noções de área e de perímetro de polígonos e o sentido espacial dos alunos.

Palavras chave: tetraminós, decomposição de polígonos, área, perímetro, puzzle

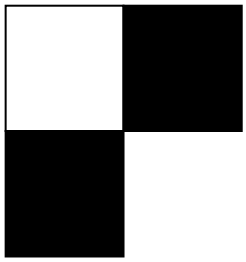
Tarefa 1 – Tetraminós

Parte 1

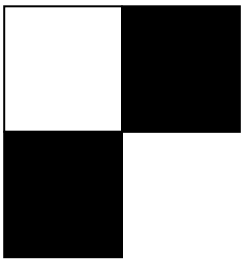
Com dois quadrados podemos construir um dominó que tem uma única forma possível:

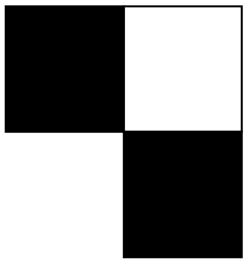


Se juntarmos um quadrado a um dominó, construímos um triminó. Encontramos duas formas diferentes.



Repara que as formas abaixo são o mesmo triminó porque se podem sobrepor.

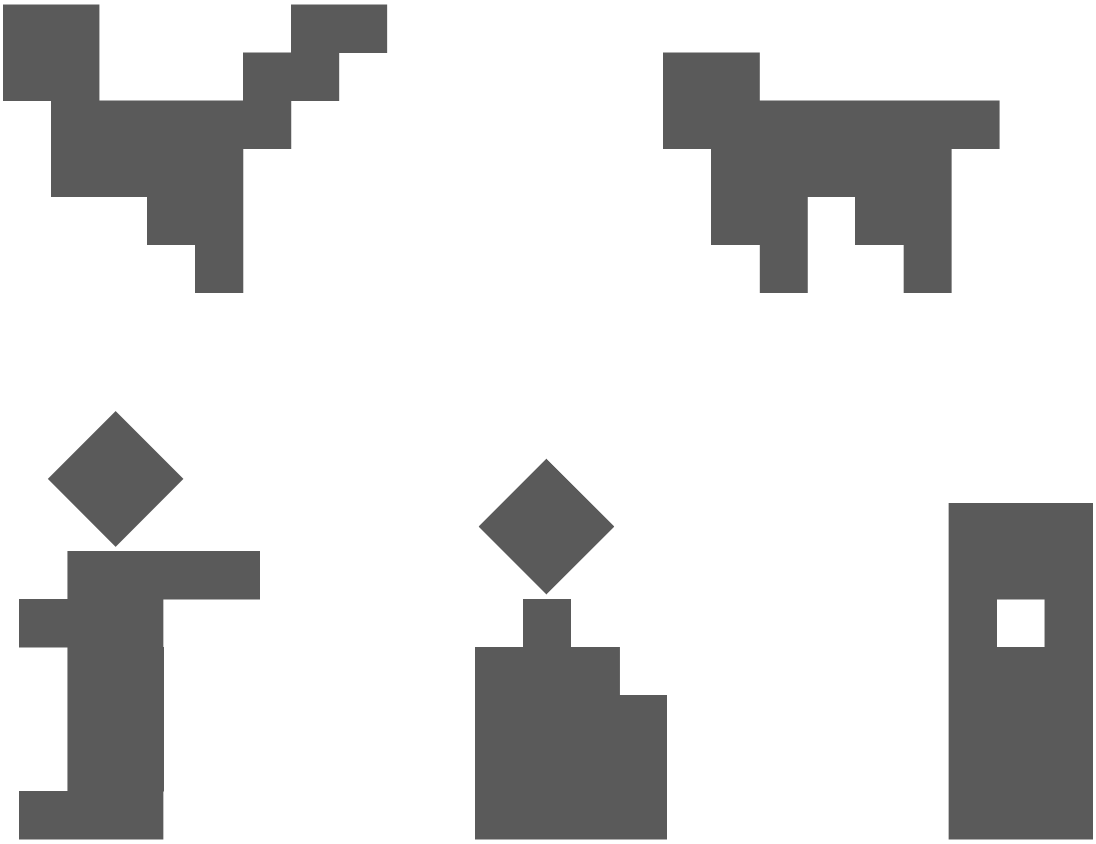




1. Constrói todos os tetraminós (peças formadas por quatro quadrados) que conseguires. Quantos construístes? Desenha-os na tua folha de registos.

Parte 2

2. Com os cinco tetraminós constrói as seguintes figuras e desenha-as na folha de registos.

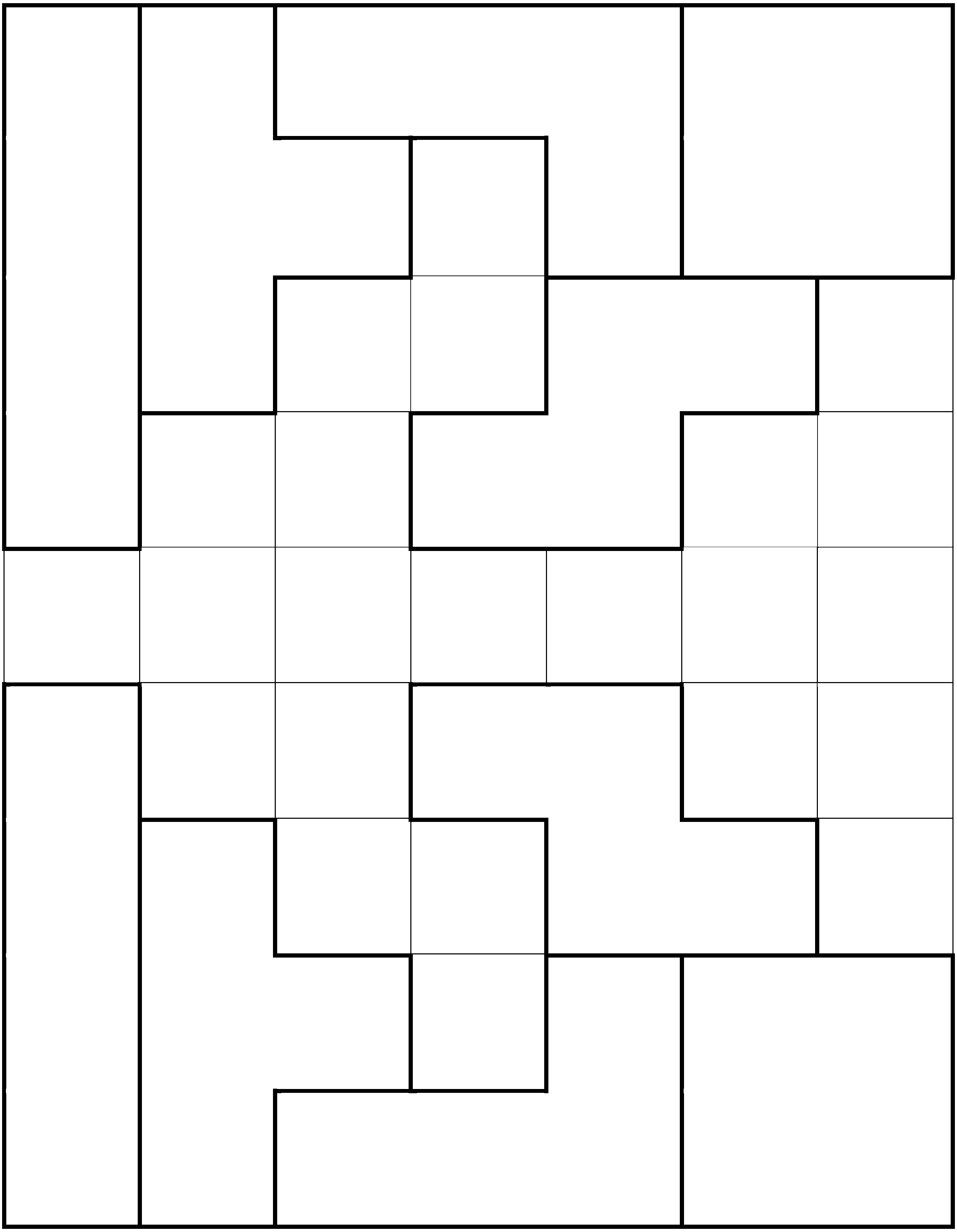


3. Utilizando alguns dos tetraminós e considerando como unidade de comprimento o lado do quadrado, constrói:
   - 3.1. Duas figuras de área 8, mas com perímetro diferente. Desenha-as e indica o perímetro de cada uma.
   - 3.2. Duas figuras com a mesma área, com o mesmo perímetro e com a mesma forma, utilizando peças diferentes. Desenha-as e indica a sua área e o seu perímetro.
   - 3.3. Duas figuras com o mesmo perímetro e áreas diferentes. Desenha-as e indica o perímetro e a área de cada uma.
   - 3.4. Figuras de área 8, 12 e 16, todas elas com perímetro 18.

4. Com os 5 tetraminós é possível construir um quadrado? Explica porquê.

Tetraminós - Folha de registos

Construção dos Tetraminós



Tarefa 2 – Trapézios e triângulos

- Nesta tarefa está sempre presente a composição e decomposição de polígonos, recorrendo a triângulos e quadriláteros.
  Pretende-se que o aluno deduza uma fórmula para calcular a área de um trapézio e justifique propriedades dos triângulos envolvendo medianas e alturas.

- Tema matemático: Geometria

- Nível de ensino: 3º ciclo

- Tópicos matemáticos: Teorema de Pitágoras

- Subtópicos matemáticos:

  -área do trapézio
  -decomposição de um triângulo por uma mediana e de um triângulo rectângulo pela altura referente à hipotenusa

- Capacidades transversais:

  Raciocínio matemático: formulação e teste de conjecturas. Demonstração.
  Comunicação matemática: interpretação, representação e discussão.
  Resolução de problemas: Concepção e justificação de estratégias

- Conhecimentos prévios dos alunos:

  Conceito de área e perímetro de uma figura.
  Composição e decomposição de polígonos recorrendo a triângulos e quadriláteros.

- Aprendizagens visadas:

  Dedução de uma fórmula para calcular a área de um trapézio a partir da sua decomposição.
  Relacionar os triângulos obtidos pela decomposição de um triângulo por uma das suas medianas, no que respeita às suas áreas.
  Relacionar os triângulos obtidos na decomposição de um triângulo rectângulo pela altura referente à hipotenusa, no que respeita à semelhança.

- Cadeia: 2ª tarefa de "Teorema de Pitágoras – 8º ano"

- Recursos: Material de desenho, cartolina e tesouras.

- Duração prevista: 1 bloco de 90 minutos

- Notas para o professor:
  Esta tarefa está claramente dividida em três partes – área do trapézio, medianas de um triângulo e decomposição de um triângulo rectângulo pela altura referente à hipotenusa - e deve ser aplicada de forma a haver momentos de discussão no final de cada parte.
  Repare-se que cada parte termina com uma aplicação dos conceitos que estiveram a trabalhar e isso permite determinar, pelo seu uso, que os conceitos abordados foram devidamente aprendidos.

Nas duas primeiras partes, as figuras estão desenhadas sobre uma malha quadriculada para facilitar a determinação das áreas. Não há referência a unidades de medida, mas se considerarmos o lado da quadrícula como a unidade de medida do comprimento podem-se calcular as áreas pedidas.
Na questão 2.3., quando se pede aos alunos uma justificação para a propriedade enunciada, pretende-se que realizem uma demonstração. Trata-se de uma propriedade cuja demonstração está ao nível dos alunos do 8º ano e o professor deve orientar o trabalho no sentido da argumentação demonstrativa.
Na parte 3 da tarefa, há todo o interesse em que os alunos tenham recortado previamente os triângulos de acordo com a folha anexa à tarefa. Devem ficar com os dois triângulos - ACH e AHB - que vão sobrepor ao triângulo ACB do enunciado.

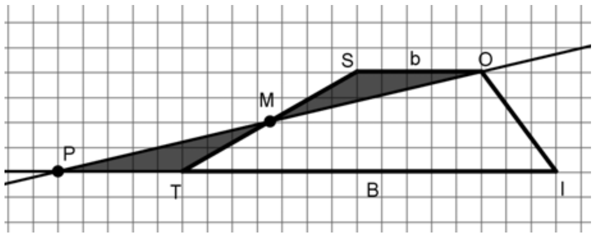
Palavras chave: área do trapézio, decomposição de figuras, mediana, triângulos equivalentes, semelhança

Tarefa 2 – Trapézios e triângulos

1. Área do trapézio

Com esta pergunta pretendemos deduzir uma fórmula da área do trapézio conhecendo a fórmula da área do triângulo.

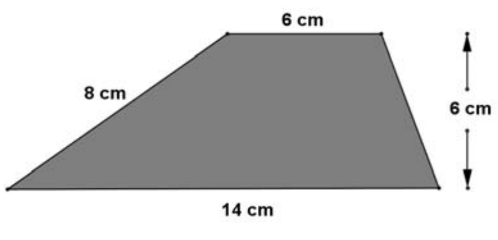
1.1. Observa a figura e em particular, o trapézio TIOS e o triângulo PIO. O ponto M é o ponto médio do segmento TS.



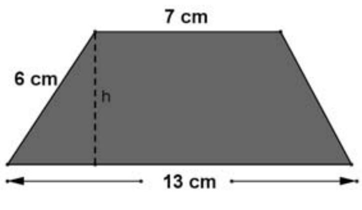
a. Explica a razão por que os triângulos MOS e PTM são congruentes.
b. Que relação há entre a área do trapézio TIOS e a área do triângulo PIO? Justifica a tua resposta.
c. Determina a área do triângulo PIO e do trapézio TIOS.
d. Compara o comprimento do segmento de recta PI com o comprimentos das bases do trapézio TIOS?
e. Escreve uma fórmula que permita calcular a área de um trapézio em função das suas bases (B e b) e da sua altura (h).

1.2.

Qual é a área deste trapézio?



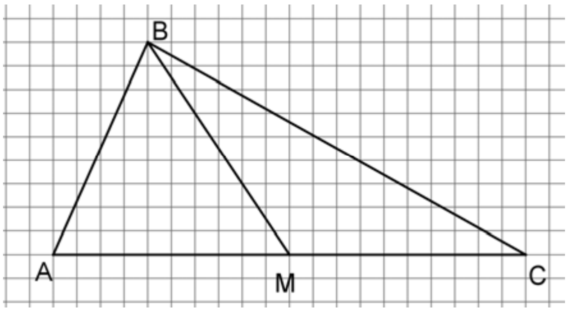
A área do trapézio é de 50 cm^2. Qual é a sua altura?



2. Medianas de um triângulo

Observa o triângulo ABC.

O segmento de recta BM é uma das medianas do triângulo ABC.



2.1. Justifica por que podemos afirmar que AM = MC.

2.2. Determina a área de cada um dos triângulos em que o triângulo ABC está dividido – triângulo ABM e triângulo BCM.

2.3. Procura uma justificação para a seguinte propriedade válida em qualquer triângulo:

"Qualquer mediana divide um triângulo em dois triângulos equivalentes."

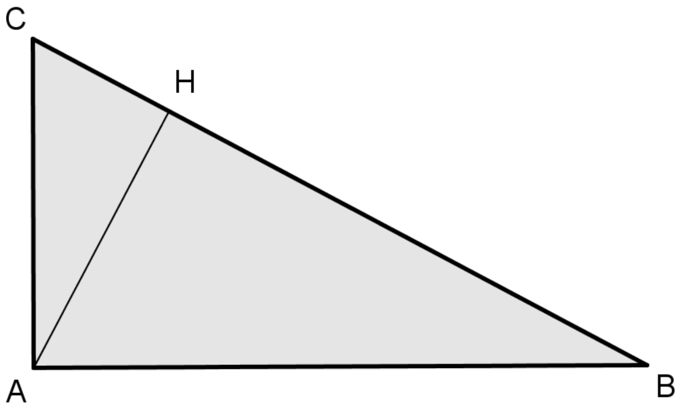
2.4. Desenha no teu caderno um triângulo igual ao triângulo ABC.

a. Divide o triângulo em três triângulos equivalentes.

b. Arranja, pelo menos três maneiras diferentes de dividir o triângulo dado em quatro triângulos equivalentes.

3. Decomposição de um triângulo rectângulo pela altura referente à hipotenusa

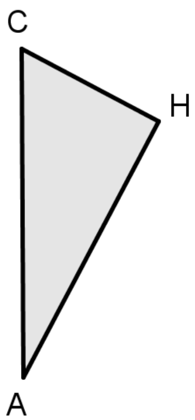
O triângulo ABC é rectângulo em A. Os lados do ângulo recto, AC e AB chamam-se catetos e o lado BC, oposto ao ângulo recto, chama-se hipotenusa. Na figura, o segmento AH é a altura referente à hipotenusa.

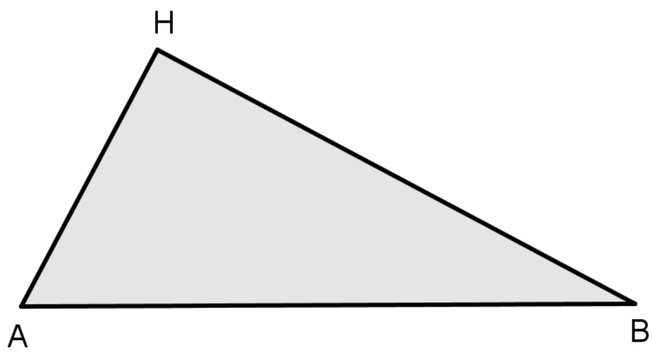


3.1. Recorta os triângulos AHC e ABH que se encontram depois do picotado.

3.2. Sobrepõe os triângulos ABC, AHC e ABH de forma que tenham um vértice em comum e as hipotenusas fiquem paralelas não coincidentes.

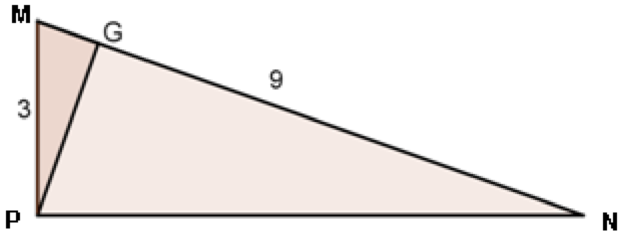
3.3.. Recorrendo aos casos de semelhança de triângulos justifica que os três triângulos são semelhantes





3.4.

Sabendo que no triângulo rectângulo MNP, o lado MN mede 9 unidades, o segmento de recta PG é a altura relativa ao lado MN e o triângulo MPG tem de área 1,41 unidades, determine:



a. a área do triângulo MNP;
b. a área do triângulo NPG;
c. a medida do segmento de recta PG.

Tarefa 3 – Teorema de Pitágoras (AGD)

- Com esta tarefa pretende-se que os alunos conjecturem e verifiquem o Teorema de Pitágoras, utilizando um ambiente de Geometria Dinâmica.

- Tema matemático: Geometria

- Nível de ensino: 3º ciclo

- Tópicos matemáticos: Teorema de Pitágoras

- Subtópicos matemáticos:

  Demonstração e utilização do Teorema de Pitágoras

- Capacidades transversais:

  Raciocínio matemático: formulação e teste de conjecturas.
  Comunicação matemática: interpretação, representação e discussão.

- Conhecimentos prévios dos alunos:

  Classificação de triângulos.

- Aprendizagens visadas:

  Conjectura e verificação do Teorema de Pitágoras.

- Cadeia: 3ª tarefa de "Teorema de Pitágoras – 8º ano"

- Recursos: Geogebra

- Duração prevista: 1 bloco de 90 minutos.

- Notas para o professor:

  Com esta tarefa pretende-se que os alunos tomem o primeiro contacto com o Teorema de Pitágoras; espera-se que, ao realizarem estas construções, conjecturem e verifiquem a relação entre a hipotenusa e os catetos de um triângulo rectângulo.
  A questão três é essencial para os alunos compreenderem que esta relação só se verifica em triângulos rectângulos.

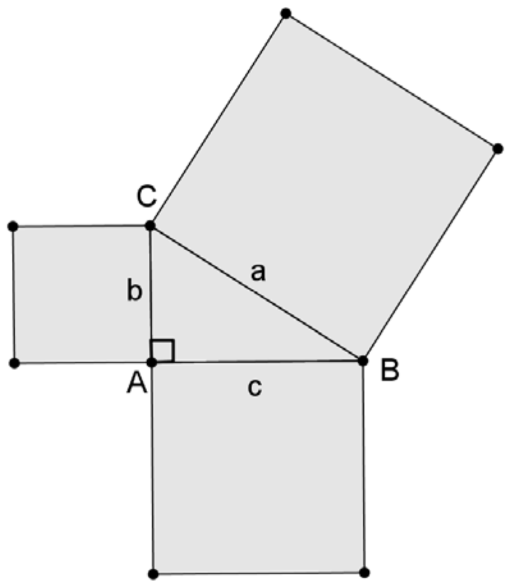
Palavras chave: Teorema de Pitágoras, Geometria Dinâmica, triângulos rectângulos

Tarefa 3 – Teorema de Pitágoras (AGD)

1.

1.1. Constrói um triângulo rectângulo escaleno.

1.2. Sobre cada lado do triângulo constrói quadrados, conforme a figura.



1.3. Usando o *software* com que te encontras a trabalhar, determina a área de cada um dos quadrados.

1.4. Estabelece uma relação entre as áreas desses quadrados.

1.5. Se arrastares um dos vértices do triângulo essa relação mantém-se?

1.6. Atribuindo letras às medidas dos comprimentos dos lados do triângulo, escreve uma expressão algébrica que traduza a relação encontrada.

2. Será que a relação entre as áreas se mantém se em vez de quadrados se construir outros polígonos regulares sobre os lados do triângulo rectângulo? Investiga com outros polígonos regulares e regista as tuas conclusões.

3. Faz agora o mesmo estudo que fizeste na pergunta 1, mas considerando um triângulo não rectângulo. Será que a relação entre as áreas dos quadrados também se verifica?

Tarefa 4 – Teorema de Pitágoras - Resolução de Problemas

- Com esta tarefa pretende-se que os alunos resolvam problemas, no plano e no espaço, aplicando o Teorema de Pitágoras.

- Tema matemático: Geometria

- Nível de ensino: 3º ciclo

- Tópicos matemáticos: Teorema de Pitágoras

- Subtópicos matemáticos:

  Resolução de Problemas no plano e no espaço aplicando o teorema de Pitágoras.

- Capacidades transversais:

  Resolução de problemas: compreensão do problema e utilização de estratégias adequadas;
  Raciocínio matemático: selecção e utilização de fórmulas e métodos matemáticos para resolver problemas.
  Comunicação matemática: interpretação de enunciados, justificação de raciocínios, desenvolvimento e discussão de argumentos.
  .

- Conhecimentos prévios dos alunos:

  Teorema de Pitágoras.

- Aprendizagens visadas:

  Aplicação do teorema de Pitágoras na resolução de problemas.
  Reconhecimento do recíproco do teorema de Pitágoras em casos particulares.
  Determinação do comprimento da diagonal espacial do cubo e do paralelepípedo.

- Cadeia: 4ª tarefa de "Teorema de Pitágoras – 8º ano"

- Recursos: papel, lápis, material de desenho e calculadora.

- Duração prevista: 1 bloco de 90 minutos

- Notas para o professor:

  A resolução de problemas deve promover a aprendizagem matemática e contribuir para que os alunos possam sentir a utilidade da matemática. Permite reconhecer e aplicar ideias matemáticas em situações da vida real e a construção de modelos matemáticos simples. Espera-se que os alunos sejam capazes de resolver as situações com autonomia.
  Para o tempo que tem disponível, o professor deve seleccionar os problemas que considerar mais significativos, sugerindo que os restantes sejam para trabalho de casa.

Palavras chave: Teorema de Pitágoras, ternos pitagóricos, triângulo rectângulo, catetos, hipotenusa, resolução de problemas

Tarefa 4 – Teorema de Pitágoras - Resolução de Problemas

1. Dados dois quadrados diferentes, desenha um terceiro quadrado cuja área seja a soma das áreas dos quadrados dados. Explica o teu raciocínio.

2.

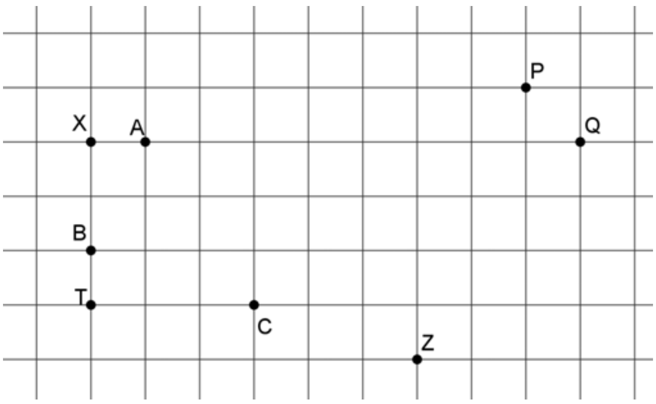
2.1. Verifica se são triângulos rectângulos, os triângulos cujos lados têm as medidas a seguir indicadas:

a. 5, 12 e 15 cm;
b. 3, 4 e 5 cm;
c. 5, 12 e 13 cm;
d. 7, 8 e 10cm;
e. 12, 16 e 20 cm.

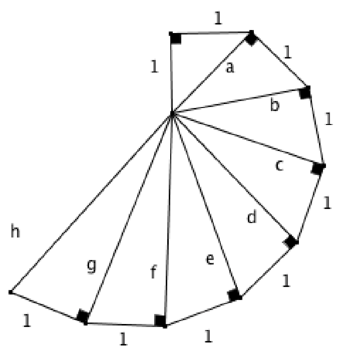
2.2. Três números inteiros que satisfaçam o Teorema de Pitágoras chamam-se ternos pitagóricos. Dá exemplos de ternos pitagóricos.

3. Determina a distância entre os pontos:

3.1. A e B:
3.2. A e C;
3.3. C e P;
3.4. Q e Z;
3.5. X e T:

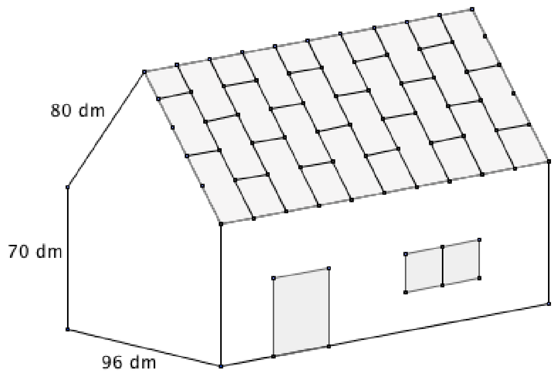


4. Os ângulos assinalados são rectos.



Quanto medem os comprimentos dos lados a, b, c, d, e, f, g e h?

5. Atendendo aos dados da figura, calcula a altura da casa.



6. Utilizando valores aproximados ao mm, determina:
   - 6.1. o comprimento da diagonal de um quadrado cujo lado mede 8cm;
   - 6.2. a altura de um triângulo equilátero cujo lado mede 8cm;
   - 6.3. o lado de um losango sabendo que as diagonais medem 12 e 16 cm, respectivamente;
   - 6.4. a área do quadrado cuja diagonal mede 32 m.
   - 6.5. a área dos hexágonos regulares cujo perímetro é 72 cm.

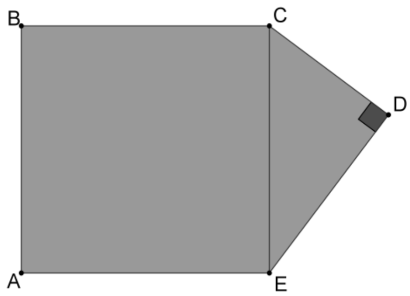
7.

ABCE é um quadrado.

AB = 10 cm; CD=6cm.

CDE é um triângulo rectângulo em D.

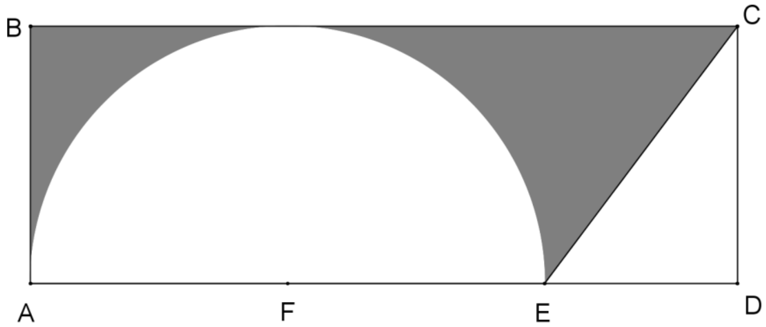
Determina a área da figura.



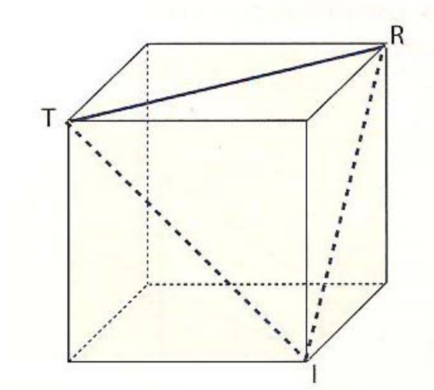
8. ABCD é um rectângulo. F é o centro do semi-círculo de diâmetro AE.

   AE = 8 cm. CE = 5 cm.

   Determine a área da parte colorida.



9. A figura mostra um cubo de 3cm de aresta.

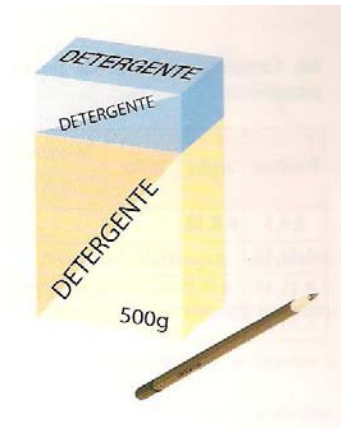


9.1. Determina o comprimento da diagonal TR, com aproximação às décimas.

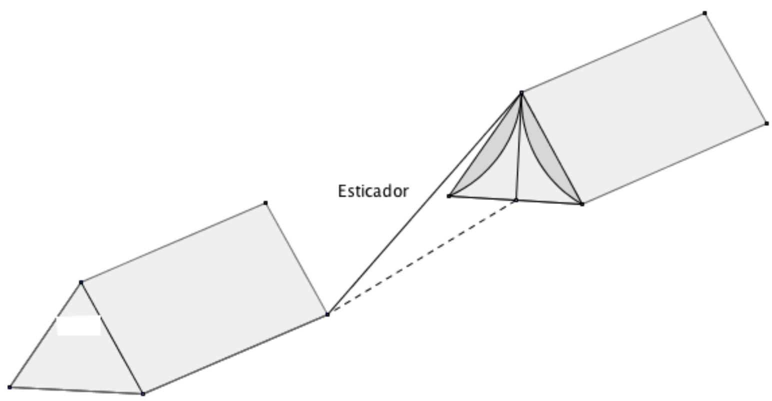
9.2. Mostra que o triângulo TRI é equilátero.

9.3. Calcula o comprimento da diagonal do cubo.

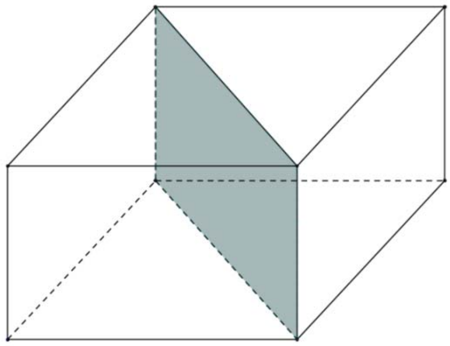
10. Temos uma caixa de detergente com as seguintes dimensões: 30cm, 15cm e 8cm.
Queremos comercializá-la oferecendo como brinde um lápis.
Qual é o maior comprimento que o lápis pode ter de forma a caber na caixa?



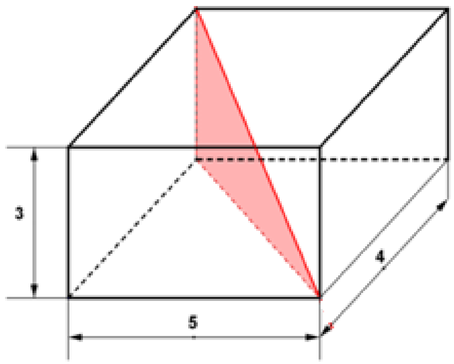
11. Um campista ao montar a sua tenda verificou que o esticador depois de colocado tocava, junto ao solo, na entrada da outra tenda. Sabendo que o esticador media 2m e que a tenda tinha 1m de altura determine a distância das duas tendas.



12. Dividiu-se o interior de uma caixa com uma folha de alumínio como mostra a figura seguinte.



12.1. Determina as dimensões que deve ter a folha de alumínio atendendo a que as dimensões da caixa, em decímetros, são
5 x 4 x 3.



12.2.Determina o comprimento da barra que deve ser colocada na diagonal da folha de alumínio.

Tarefas 5 – Teorema de Pitágoras - Demonstrações

- Com esta tarefa pretende-se continuar a trabalhar a demonstração matemática. Desde o sétimo ano de escolaridade que a demonstração tem tido o seu espaço na planificação, procurando que, gradualmente, os alunos sintam a necessidade de justificar rigorosamente os seus procedimentos e cheguem mesmo a realizar demonstrações.

- Tema matemático: Geometria

- Nível de ensino: 3º ciclo

- Tópicos matemáticos: Teorema de Pitágoras

- Subtópicos matemáticos:

  Demonstração

- Capacidades transversais:

  Raciocínio matemático: formulação e teste de conjecturas e generalizações, e desenvolvimento e avaliação de argumentos matemáticos incluindo cadeias dedutivas.
  Comunicação oral e escrita, recorrendo à linguagem natural e à linguagem matemática, interpretando, expressando e discutindo resultados, processos e ideias matemáticos.

- Conhecimentos prévios dos alunos:

  Teorema de Pitágoras

- Aprendizagens visadas:

  Confirmar conjecturas demonstrando.

- Cadeia: 5ª tarefa de "Teorema de Pitágoras – 8º ano"

- Recursos: lápis, material de desenho e materiais manipulativos.

- Duração prevista: 1 bloco de 90 minutos.

- Notas para o professor:

  Pretende-se que os alunos reconheçam algumas propriedades de figuras e relações entre elas e que com actividades sucessivas reconheçam uma demonstração geométrica e uma demonstração com recurso a expressões algébricas do Teorema de Pitágoras. Propõe-se a mesma tarefa para realizar os dois processos de demonstração dedutiva para que os alunos reconheçam duas formas diferentes, mas equivalentes, de raciocinar e comunicar.

Palavras chave: Teorema de Pitágoras, triângulo rectângulo, catetos, hipotenusa, figuras planas equivalentes, composição e decomposição de figuras, demonstração geométrica, áreas expressas por fórmulas, demonstração algébrica.

Tarefa 5 – Teorema de Pitágoras - Demonstrações

1.

1.1. Observa as seguintes figuras em que estão representadas duas decomposições do quadrado ADEF. Os triângulos sombreados são todos congruentes.

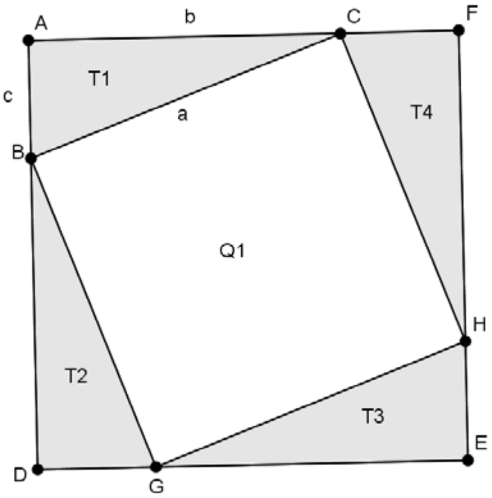


Figura 1

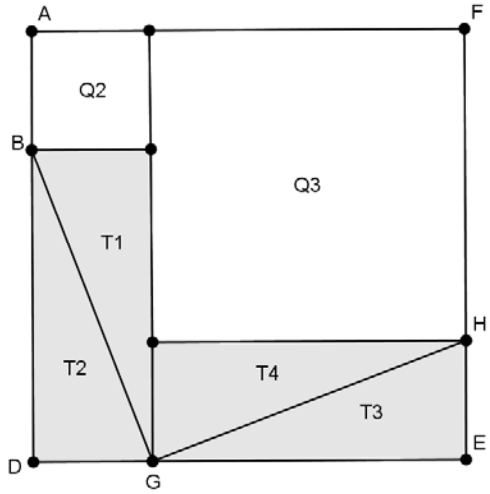


Figura 2

a. Justifica que Q1 é um quadrado.

b. Escreve uma igualdade que relacione as áreas de Q1, Q2 e Q3.

1.2. Observa agora somente a figura 1:

a. Utilizando os comprimentos **a**, **b** e **c** encontra expressões algébricas para exprimir as áreas dos seguintes polígonos:

$a_{1.}$ quadrado BCHG

$a_{2.}$ triângulo ABC

$a_{3.}$quadrado AFED

b. Escreve uma igualdade que relacione a área do quadrado AFED com a área dos cinco polígonos que o compõem.

c. Simplifica essa igualdade o mais possível.

2. Nas figuras seguintes está o pentágono FAHGE e duas das suas decomposições. Sabendo que FCBE, BDHG e EJIG são quadrados, estabelece uma relação entre a, b e c, justificando.