

**MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO**  
**DIRECÇÃO GERAL DE INOVAÇÃO E DE DESENVOLVIMENTO CURRICULAR**

**ENSINO RECORRENTE DE NÍVEL SECUNDÁRIO**

**MATEMÁTICA B**

**10º, 11º anos**

**Curso Científico-humanístico de Artes Visuais**

**Autores**

Arsélio Almeida Martins  
Cristina Maria Cruchinho da Fonseca  
Ilda Maria Couto Lopes  
Jaime Carvalho e Silva (Coordenador)  
Maria Graziela Fonseca

**Homologação**

03/12/2005

## ÍNDICE

<b>PARTE1</b> .....	<b>3</b>
INTRODUÇÃO.....	3
<b>PARTE 2</b> .....	<b>3</b>
APRESENTAÇÃO DO PROGRAMA .....	3
ORIENTAÇÕES GERAIS.....	4
APLICAÇÕES E MODELAÇÃO.....	5
COMUNICAÇÃO MATEMÁTICA.....	5
TECNOLOGIA .....	6
ORGANIZAÇÃO POR MÓDULOS CAPITALIZÁVEIS.....	7
AVALIAÇÃO.....	9
<b>PARTE 3</b> .....	<b>10</b>
MÓDULO 1 .....	10
MÓDULO 2 .....	16
MÓDULO 3 .....	21
MÓDULO 4 .....	26
MÓDULO 5 .....	30
MÓDULO 6.....	34
<b>BIBLIOGRAFIA</b> .....	<b>37</b>

## **PARTE1**

### **Introdução.**

Pelos princípios e métodos de trabalho praticados, a Matemática é uma componente essencial da formação para o exercício da cidadania em sociedades democráticas e tecnologicamente avançadas, tendo por base a autonomia e a solidariedade. O conhecimento científico em geral, matemático em particular, é uma ferramenta essencial da independência empreendedora de cada cidadão que tem de ser responsável e consciente pelo ambiente em que vive e pelas relações em que está envolvido.

Genericamente, a Matemática é parte imprescindível da cultura humanística e científica que permite ao cidadão ganhar flexibilidade para se adaptar a mudanças tecnológicas ou outras e para se sentir motivado a continuar a sua formação ao longo da vida. A Matemática contribui para a construção da língua com a qual se relaciona, facilitando a selecção, avaliação e integração das mensagens necessárias e úteis, ao mesmo tempo que fornece acesso a fontes de conhecimento científico a ser mobilizado sempre que necessário.

Finalmente, a Matemática é uma das bases teóricas essenciais e necessárias de todos os grandes sistemas de interpretação da realidade que garantem a intervenção social com responsabilidade e dão sentido à condição humana.

São finalidades desta disciplina:

- Desenvolver a capacidade de usar a Matemática como instrumento de interpretação e intervenção no real;
- Desenvolver a capacidade de seleccionar a Matemática relevante para cada problema da realidade;
- Desenvolver as capacidades de formular e resolver problemas, de comunicar, assim como a memória, o rigor, o espírito crítico e a criatividade;
- Promover o aprofundamento de uma cultura científica, técnica e humanística que constitua suporte cognitivo e metodológico tanto para a inserção plena na vida profissional como para o prosseguimento de estudos;
- Contribuir para uma atitude positiva face à Ciência;
- Promover a realização pessoal mediante o desenvolvimento de atitudes de autonomia e solidariedade;
- Criar capacidades de intervenção social pelo estudo e compreensão de problemas e situações da sociedade actual e bem assim pela discussão de sistemas e instâncias de decisão que influenciam a vida dos cidadãos, participando desse modo na formação para uma cidadania activa e participativa.

## **PARTE 2**

### **Apresentação do Programa**

A Matemática aparece, para o Curso Científico-humanístico de Artes Visuais do Ensino Recorrente, como uma disciplina bienal, de opção na componente de formação específica a que é atribuída uma carga horária semanal de 4,5h dividida em unidades lectivas de 90 minutos ao longo de 33 semanas.

A componente de formação específica destina-se a proporcionar a aquisição e o desenvolvimento de um conjunto de saberes e competências de base do respectivo curso, em que a Matemática é considerada uma das disciplinas essenciais.

## Curso Científico-humanístico de Artes Visuais do Ensino Recorrente Matemática B

A Matemática é uma disciplina muito rica que, num mundo em mudança, abrange ideias tão díspares como as que são utilizadas na vida de todos os dias, na generalidade das profissões, em inúmeras áreas científicas e tecnológicas mais matematizadas e, ao mesmo tempo, é uma disciplina que tem gerado contribuições significativas para o conhecimento humano ao longo da história.

Embora o programa de Matemática B esteja organizado por grandes temas matemáticos, estes têm de ser escolhidos de tal modo que competências fundamentais sejam contempladas e têm de estar ligados a necessidades reais e fornecer instrumentos de compreensão do real com utilidade compreensível imediata. Devem ainda poder ser motor de compreensão da Matemática como um todo em que cada tema se relaciona com outros e em que a aprendizagem de cada assunto beneficia a aprendizagem de outros. Cada assunto, embora desenvolvido mais detalhadamente dentro da leccionação de um tema, deve ser assunto interessante e útil na abordagem dos diversos temas.

Para estes estudantes não é fundamental o desenvolvimento de competências ao nível do domínio das regras lógicas e dos símbolos. Se é legítimo ensinar a manejar as ferramentas de cálculo, o essencial da aprendizagem da Matemática deve ser procurado ao nível das ideias para a resolução de problemas e para as aplicações da Matemática. O uso das ferramentas deve ser ensinado e aprendido no contexto das ideias e da resolução de problemas interessantes, enfim em situações que exijam o seu manejo e em que seja vantajoso o seu conhecimento, privilegiando mesmo características típicas do ensino experimental. A Matemática, nas suas conexões com todos os ramos de saber, é uma contribuição decisiva para a consciência da necessidade da educação e da formação ao longo da vida, com vista a enfrentar mudanças profissionais e as incontornáveis adaptações às inovações científicas, tecnológicas e artísticas.

Os temas a abordar, estruturados em seis módulos capitalizáveis segundo o modelo curricular do curso científico-humanístico de Artes Visuais do ensino recorrente, são os seguintes: números e geometria, incluindo trigonometria; funções reais e análise infinitesimal; estatística e probabilidades; matemática discreta.

A abordagem da Geometria inclui assuntos elementares de geometria sintética e métrica, geometria analítica e trigonometria, com as competências de cálculo numérico a elas associadas, com permanentes preocupações de contextualização.

A abordagem das Funções Reais considerará as grandes famílias de funções, desde as algébricas inteiras, passando pelas fraccionárias e acabando nas transcendentais - exponenciais e logarítmicas ou trigonométricas. Haverá uma ênfase natural nas aplicações, com particular relevo para as questões de taxa de variação e optimização.

A abordagem da Estatística e das Probabilidades elementares completará as aprendizagens básicas, com algumas noções novas e ferramentas que não foram abordadas no ensino básico.

A Matemática Discreta aparecerá não apenas em ligação com as probabilidades, mas também em várias situações que requerem modelos discretos, como o das sucessões e progressões.

### **Orientações gerais**

Espera-se que os estudantes se apropriem de conceitos e de técnicas matemáticas enquanto enfrentam situações, de tal modo que, face a problemas realistas, possam mobilizar os conhecimentos científicos adequados para dar respostas próprias. Pretende-se que o estudante seja capaz de formar uma opinião própria, participando nas decisões ou que consiga ele próprio tomá-las.

Entende-se aqui que cada competência implica um corpo coerente de conhecimentos, atitudes ou capacidades (e habilidades na escolha e depois no manejo das ferramentas, quaisquer que elas sejam), que só os resultados operados na acção autónoma dos estudantes garantem que tenham sido desenvolvidas para serem úteis na vida.

Para desenvolver a competência matemática consideram-se os seguintes princípios fundamentais.

1. No ensino que parte de propostas de trabalho relevantes e com significado para os estudantes, a mediação do professor é um dos processos essenciais na estruturação das aprendizagens significativas e no desenvolvimento da competência matemática dos estudantes. Disponibilizando as ferramentas matemáticas necessárias e participando na organização das ideias, com este tipo de ensino desenvolve-se a capacidade de utilizar a Matemática na interpretação e intervenção na realidade. A análise de situações da vida real, a identificação de modelos matemáticos que permitam a sua interpretação e resolução, a selecção de estratégias para resolver problemas, a formulação de hipóteses e previsão de resultados são orientações que contribuem para a formação de estudantes que manifestem vontade de aprender e gosto pela pesquisa. Neste âmbito há oportunidade para apreciar o contributo da Matemática para a compreensão e resolução de problemas do Homem através do tempo.
2. A aprendizagem baseada no trabalho autónomo sobre as situações apresentadas (que podem apresentar vários níveis de resolução) e em actividades que aprofundem os conceitos introduzidos no decurso dos trabalhos, contribui para o desenvolvimento da autoconfiança dos estudantes criando-lhes oportunidades para se exprimirem, fundamentarem as suas opiniões e revelarem espírito crítico, de rigor e confiança nos seus raciocínios.
3. A participação da Matemática no desenvolvimento das competências profissionais contribui para o desenvolvimento da comunicação (dos conceitos, dos raciocínios ou das ideias) com clareza e progressivo rigor lógico. A definição de trabalhos de grupo, de acordo com as motivações dos estudantes, propicia o desenvolvimento do espírito de tolerância, de cooperação, do respeito pela opinião dos outros e a aceitação das diferenças, e pode contribuir para o desenvolvimento de interesses culturais e do gosto pela pesquisa.

### **Aplicações e Modelação**

As aplicações e os problemas extraídos do mundo real e das profissões estão no centro deste programa. As aplicações integradas num contexto significativo para os estudantes, são usadas como ponto de partida para cada novo assunto, sendo parte do processo de construção de conceitos matemáticos dos estudantes e usadas como fonte de exercícios. Sendo as actividades de modelação e resolução de problemas centrais neste programa, recomenda-se fortemente que se cumpram os seguintes critérios:

- a teoria e as aplicações devem estar interligadas;
- os problemas apresentados devem estimular os processos de pensamento em vez da aplicação de algoritmos;
- os contextos das situações problemáticas apresentadas devem integrar diferentes ideias matemáticas;
- alguns dos problemas a seleccionar devem ser abertos, obrigando os estudantes a escolher as ferramentas matemáticas mais adequadas.

A escolha de situações ricas e variadas é essencial para o cumprimento destes critérios; recomenda-se a colaboração activa dos professores de Matemática e de outras disciplinas.

Os estudantes (individualmente ou em grupo) devem ter a possibilidade de escolher as suas próprias estratégias de resolução de problemas; o facto de se poder confrontar diferentes processos de resolução de problemas permite fomentar a aprendizagem de uma forma crítica, valorizando o trabalho efectuado.

### **Comunicação Matemática**

Tendo em conta a estreita dependência entre os processos de estruturação do pensamento e da linguagem, é absolutamente necessário que as actividades tenham em conta a correcção da comunicação oral e escrita. O estudante deve verbalizar os raciocínios e discutir processos, confrontando-os com outros. Deve ser capaz de argumentar com lógica. É necessário proporcionar ao

estudante oportunidade para expor um tema preparado, a resolução de um problema ou a parte que lhe cabe num trabalho de grupo. Os trabalhos escritos, individuais ou de grupo, quer sejam pequenos relatórios, monografias, ..., devem ser apresentados de forma clara, organizada e com aspecto gráfico cuidado.

### **Tecnologia**

O uso de tecnologias de cálculo, com capacidades gráficas e de comunicação, é fundamental para a criação e o desenvolvimento de competências úteis a todos os desempenhos profissionais. Pelas suas especificidades, a calculadora gráfica e o computador completarão os meios à disposição dos professores e estudantes para executar os diferentes aspectos de uma verdadeira actividade matemática. Com efeito permitem:

- obter rapidamente uma representação do problema, de um conceito, a fim de lhe dar sentido e favorecer a sua apropriação pelo estudante;
- ligar aspectos diferentes (gráfico, numérico e algébrico) de um mesmo conceito ou de uma mesma situação;
- explorar situações fazendo aparecer de forma dinâmica diferentes configurações;
- proceder de forma rápida à verificação de certos resultados.

Não é possível atingir os objectivos deste programa sem recorrer à dimensão gráfica, e essa dimensão só é plenamente atingida quando os estudantes traçam uma grande quantidade e variedade de gráficos com apoio de tecnologia adequada (calculadoras gráficas e computadores). O trabalho de modelação matemática só será plenamente atingido se for possível trabalhar na sala de aula as diversas fases do processo, embora não seja exigível que se tratem todas simultaneamente e em todas as ocasiões; em particular, é fundamental a utilização de sensores de recolha de dados acoplados a calculadoras gráficas ou computadores para, em algumas situações, os estudantes tentarem identificar modelos matemáticos que permitam a sua interpretação.

Ao usar a calculadora gráfica ou o computador, os estudantes devem aprender a elaborar conjecturas em função do que se lhes apresenta, sendo incentivados a analisar criticamente tudo o que observam, sendo capazes nomeadamente de não se deixar confundir com as escalas e sabendo escolher com cuidado o rectângulo de visualização.

Um estudante pode ser confrontado com situações em que erros de aproximação conduzam a resultados absurdos; quando isso acontecer deve saber analisar criticamente a situação, usando dados do problema em causa. Como forma de diminuir a possibilidade de ocorrência de situações dessas, deve ser feita a recomendação genérica de, nos cálculos intermédios, se tomar um grau de aproximação substancialmente superior ao grau de aproximação que se pretende para o resultado.

As calculadoras gráficas (que são também calculadoras científicas completíssimas), devem ser entendidas não só como instrumentos de cálculo mas essencialmente como meios incentivadores do espírito de pesquisa e o seu uso é obrigatório. Torna-se assim muito recomendável o uso da calculadora gráfica nos seguintes tipos de actividade matemática:

- abordagem numérica de problemas;
- uso de métodos gráficos para resolver equações e inequações;
- modelação, simulação e resolução de situações problemáticas;
- uso de cenários visuais gerados pela calculadora para ilustrar conceitos matemáticos;
- uso de métodos visuais para resolver equações e inequações que não podem ser resolvidas, ou cuja resolução é impraticável, com métodos algébricos;
- condução de experiências matemáticas, elaboração e análise de conjecturas;
- estudo e classificação do comportamento de diferentes classes de funções;

- investigação e exploração de várias ligações entre diferentes representações para uma situação problemática.

Os estudantes devem ter oportunidade de entender que aquilo que a calculadora apresenta no seu ecrã pode ser uma visão distorcida da realidade; é importante que os estudantes descrevam os raciocínios utilizados e interpretem aquilo que se lhes apresenta de modo que não se limitem a “copiar” o que vêem.

O computador, pelas suas potencialidades, nomeadamente nos domínios da geometria dinâmica e da representação gráfica de funções e da simulação, permite actividades não só de exploração e pesquisa como de recuperação e desenvolvimento, pelo que constitui um valioso apoio a estudantes e professores, sendo por isso obrigatória a sua utilização neste programa.

Vários tipos de programas de computador são muito úteis e enquadram-se no espírito do programa. O número de programas disponíveis no mercado português aumenta constantemente, havendo muito *software* de distribuição livre, como o editado pelo Ministério da Educação no âmbito dos projectos Minerva e Nónio Século XXI.

Os estudantes devem ter oportunidade de trabalhar directamente com um computador, com a frequência possível de acordo com o material disponível. Nesse sentido, as escolas devem disponibilizar o material necessário para que tal tipo de trabalhos se possa realizar com regularidade, recomendando-se que se constituam **Laboratórios de Matemática**.

Estando todas as escolas secundárias ligadas à Internet o professor não deve deixar de tirar todo o partido deste meio de comunicação. Na bibliografia final são indicados alguns sítios recomendados que contêm ligações a outros de interesse. Para o trabalho com os estudantes apresentam-se como bons exemplos os de projectos do tipo “Pergunta Agora” em que os estudantes podem colocar dúvidas (este projecto pode ser acedido a partir da página da APM – [www.apm.pt](http://www.apm.pt) -). Como exemplo de um projecto de interesse geral e para a divulgação da Matemática aponta-se o “Atractor-Matemática Interactiva” que pode ser visto em: [www.atractor.pt](http://www.atractor.pt).

Os recursos escolhidos deverão ter em vista tanto a sua utilização no Laboratório de Matemática como nas salas de aula indiferenciadas. Nesse sentido é considerado indispensável neste programa o uso de calculadoras gráficas (para trabalho regular na sala de aula ou para demonstrações com todos os estudantes, usando uma calculadora com “view-screen”), uma sala de computadores com programas adequados para trabalho tão regular quanto possível e um computador ligado a um “data-show” ou um projector de vídeo para demonstrações, simulações ou para trabalho na sala de aula com todos os estudantes ao mesmo tempo.

### **Organização por módulos capitalizáveis**

Para o ensino recorrente de nível secundário, os temas de estudo são distribuídos por módulos capitalizáveis, mas concebidos de tal modo que precedências necessárias (ao nível da articulação de conhecimentos e técnicas) sejam garantidas na sequência da leccionação em ambiente de turma. Para além dos temas - Geometria, Álgebra e Análise, Estatística e Probabilidades e Números - que contêm o essencial dos diversos módulos, em cada um destes vão sinalizados os assuntos dos temas transversais que nele podem ser desenvolvidos. Os temas transversais referem-se a heurísticas, resolução de problemas e actividades investigativas, comunicação matemática, história da matemática ou relação entre tecnologia e matemática.

O ensino de todos estes temas tem de ser suportado em actividades propostas a cada trabalhador-estudante e a grupos de estudantes que contemplem a modelação matemática, o trabalho experimental e o estudo de situações realistas adequadas a cada curso sobre as quais se coloquem questões significativas, resolução de problemas não rotineiros e conexões entre temas matemáticos, aplicações da matemática noutras disciplinas e com relevância para interesses profissionais, recorrendo com frequência a ferramentas computacionais adequadas. Neste sentido, considera-se que as Aplicações e Modelação Matemática constituem um grande tema central, sendo metodologia de trabalho privilegiada na construção dos conceitos matemáticos em todos os módulos.

Curso Científico-humanístico de Artes Visuais do Ensino Recorrente  
Matemática B

Esta organização por módulos obriga os professores à leccionação de determinados temas por períodos lectivos e à avaliação sumativa dos alunos da modalidade de frequência presencial de cada módulo no final do período respectivo. Ao mesmo tempo, indica aos alunos da modalidade de frequência não presencial os temas de estudo de cada módulo (ou módulos) a capitalizar, bem como a sequência modular que é obrigatória para a capitalização.

Considera-se importante que no início do ensino secundário - primeiro módulo - as primeiras duas semanas sirvam para resolver problemas significativos que mobilizem conceitos prévios considerados verdadeiramente essenciais e estruturantes .

**Quadro Resumo**  
Distribuição dos temas

Tema Central Aplicações e Modelação Matemática	
<p><b>Módulo 1 - Geometria no Plano e no Espaço. Trigonometria Básica e Generalizações</b> Resolução de problemas de geometria no plano e no espaço. O método das coordenadas para estudar Geometria no plano e no espaço. Problemas de trigonometria básica e sua generalização.</p> <p><b>Módulo 2 - Funções e Gráficos. Generalidades. Funções Polinomiais. Funções Trigonométricas</b> Funções. Gráficos e representação gráfica. Estudo intuitivo de propriedades da funções quadráticas e cúbicas e dos seus gráficos. Modelação matemática de situações envolvendo fenómenos periódicos.</p> <p><b>Módulo 3 - Estatística. Modelos de Probabilidade</b> Estatística – Generalidades. Organização e interpretação de caracteres estatísticos (qualitativos e quantitativos). Referência a distribuições bidimensionais (abordagem gráfica e intuitiva). Fenómenos aleatórios e conceito frequentista de probabilidade. Modelo Normal.</p>	<p><b>Módulo 4 - Movimentos não lineares. Funções Racionais. Taxa de variação.</b> Investigação das características das funções racionais. Modelação de situações envolvendo fenómenos não periódicos. Modelação de situações envolvendo variações de uma função; taxa de variação média, taxa de variação instantânea.</p> <p><b>Módulo 5 - Modelos Discretos e Modelos Contínuos não Lineares</b> Modelos discretos (sucessões, progressões geométricas). Modelos contínuos não lineares (as exponenciais, as logarítmicas e as logísticas).</p> <p><b>Módulo 6 – Problemas de Optimização</b> Aplicações da Taxa de Variação. Programação Linear</p>
<p><b>Temas Transversais</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Comunicação Matemática</li> <li>• Resolução de Problemas e Actividades Investigativas</li> <li>• História da Matemática</li> <li>• Tecnologia e Matemática</li> </ul>	

O Tema "Modelos de Probabilidades" - que consta do 11º ano do ensino regular, está incluído no 10º ano do programa do Ensino Recorrente por razões de organização pedagógica.



### **Avaliação**

Na modalidade de frequência presencial e para a avaliação sumativa, os professores devem “recorrer a uma variedade de instrumentos de avaliação adequados à diversidade de aprendizagens e aos contextos em que ocorrem”, dentro de cada módulo. Não podem, por isso, ser reduzidos a um “teste” tradicional no fim de cada módulo ou período. Dito de outro modo, a avaliação formativa e sumativa deve servir para dar informação ao “aluno e ao professor sobre o desenvolvimento e a qualidade do processo educativo, permitindo o estabelecimento de metas intermédias”.

### **PARTE 3**

#### **Módulo 1**

<b>Geometria no Plano e no Espaço.</b>	<b>Trigonometria Básica e Generalizações</b> 12 semanas - 36 unidades lectivas de 90 minutos
--	---

**Geometria no Plano e no Espaço**                                      **6 semanas - 18 unidades lectivas de 90 minutos**

#### **Competências a desenvolver**

Na Geometria no Plano e no Espaço, a competência matemática inclui os seguintes aspectos:

- a capacidade para apreciar a geometria no mundo real e o reconhecimento e a utilização de ideias geométricas em diversas situações e na comunicação;
- a aptidão para utilizar a visualização, a representação e o raciocínio espacial na análise de situações problemáticas realistas e na resolução de problemas;
- a aptidão para formular argumentos válidos recorrendo à visualização e ao raciocínio espacial, explicitando-os em linguagem corrente;
- a aptidão para reconhecer e analisar propriedades de figuras geométricas, nomeadamente recorrendo a materiais manipuláveis e à tecnologia;
- a aptidão para descrever a realidade, enfrentar situações e resolver problemas utilizando diversos sistemas matemáticos (relações entre elementos do espaço e propriedades e coordenadas.)

#### **Objectivos de aprendizagem**

Na Geometria no Plano e no Espaço, os objectivos de aprendizagem são os seguintes:

- construir modelos (maquetes e desenhos) úteis e adequados à resolução de problemas, com recurso a medições e escalas;
- resolver problemas usando modelos físicos e geométricos (de incidência, paralelismo e perpendicularidade; secções, áreas e volumes);
- comunicar, oralmente e por escrito, aspectos dos processos de trabalho e crítica dos resultados;
- identificar as vantagens do uso de um referencial;
- instalar um referencial numa figura (ou uma figura num referencial) de forma a obter “as melhores coordenadas”;
- escrever condições definidoras de conjuntos de pontos e lugares geométricos;
- resolver problemas de geometria no plano e no espaço, por vários processos e perspectivas de abordagem (sintética e analítica).

#### **Temas/conteúdos**

Resolução de problemas de geometria no plano e no espaço.

Alguns tópicos que poderão ser estudados na resolução de problemas ou em investigações:

- problemas que envolvam proporções, semelhanças, áreas, volumes, números, operações, transformações geométricas, expressões algébricas, ...
- estudo de alguns padrões geométricos planos (frisos);

- estudo das pavimentações regulares;
- estudo de alguns problemas de empacotamento;
- composição e decomposição de figuras tridimensionais;
- um problema histórico e sua ligação com a História da Geometria.

O método das coordenadas para estudar geometria no plano e no espaço.

- Referenciais cartesianos ortonormados no plano e no espaço. Correspondência entre o plano e  $\mathbb{R}^2$  entre o espaço e  $\mathbb{R}^3$
- Equação reduzida da recta no plano e equação  $x=x_0$ .

### Recursos

Na leccionação da geometria, o professor deve ter em atenção a observação de aspectos geométricos da realidade construída. E deve utilizar modelos geométricos pré-construídos e sempre que possível modelos construídos pelos estudantes, bem como deve recorrer a programas de geometria dinâmica ou vídeos.

O ensino e a aprendizagem da Geometria precisa de

- material de desenho para o quadro e para o trabalho individual (régua, esquadro, compasso, transferidor,...);
- material para o estudo da Geometria no espaço (sólidos geométricos, construídos em diversos materiais: placas, arames, palhinhas, acetatos, acrílico, plástico, “polydron”, sólidos de enchimento,...);
- quadro quadriculado e papel milimétrico;
- meios audiovisuais (retroprojector, acetatos e canetas, diapositivos, vídeo, ...);
- livros para consulta e manuais;
- computadores e “software” de geometria dinâmica.

### Sugestões metodológicas

Neste módulo, para resolver eventuais dificuldades na transição de ciclo ou no recomeço da escolaridade, após interrupção mais ou menos prolongada, os professores, durante as primeiras três semanas de aulas, devem apresentar aos estudantes um conjunto de problemas motivadores que podem e devem ser adequados ao nível e às características de cada turma e curso.

Pretende-se que se detectem e corrijam falhas de conhecimentos em questões básicas, ao mesmo tempo que se estabelece uma articulação com o novo ciclo de vida escolar através de problemas que envolvam proporções, semelhanças, áreas, volumes, números, operações, transformações geométricas, expressões algébricas, e que contemplem conexões. Devem ser integradas algumas actividades para consolidar e fazer uso de conhecimentos essenciais e básicos já adquiridos e que procuram desenvolver capacidade de visualização, estando sempre que possível ligados à manipulação de modelos geométricos.

Pretende-se que os problemas a propor ponham em evidência o desenvolvimento de capacidades de experimentação, o raciocínio matemático (com destaque para o raciocínio geométrico) e a análise crítica, conduzindo ao estabelecimento de conjecturas e à sua verificação.

A seguir são apresentados enunciados dos problemas que deverão ser propostos aos estudantes. Esta lista pode ser parcial ou totalmente substituída por outra que, em termos gerais, contemple os mesmos conhecimentos e capacidades; esses outros problemas deverão, de preferência, ser retirados de documentos oficiais relativos ao Ensino Básico.

Curso Científico-humanístico de Artes Visuais do Ensino Recorrente  
Matemática B

- Construção de caixas sem tampa, a partir de uma folha rectangular. Medidas de grandezas associadas a essas caixas.
- Porque é que há só 5 sólidos platónicos?
- Estudo da possível “semelhança” entre garrafas de água de uma dada marca de 33cl, 50cl, 75cl e 1,5l.
- Que relação existe entre o volume de um cubo com o do tetraedro cujas arestas são as diagonais faciais do cubo? Que polígonos é possível obter cortando um tetraedro por um plano paralelo a duas aresta? Qual o perímetro e a área dos polígonos que constituem as secções?
- Que efeito tem uma redução de 50% numa fotocopiadora?

Tanto em geometria plana como em geometria do espaço, a prática de manipulação e observação de figuras e modelos tem um papel central e decisivo no ensino das noções matemáticas que estão em jogo. O professor deve propor actividades de construção, de manipulação de modelos e ligadas a problemas históricos, fazendo surgir, a partir do problema e do caminho que se faz para a sua resolução, uma grande parte dos resultados teóricos que pretende ensinar ou recordar. A exploração de programas computacionais pode ajudar eficazmente o estudante a desenvolver a percepção dos objectos do plano e do espaço e a fazer conjecturas acerca de relações ou acerca de propriedades de objectos geométricos.

Devem dar-se a conhecer problemas históricos e propor ao estudante a resolução de pelo menos um. Será também conveniente dar a conhecer um pouco da História da Geometria à qual estão ligados os nomes dos maiores matemáticos de todos os tempos (Euclides, Arquimedes, Newton, Descartes, Euler, Hilbert, entre muitos outros).

Os conhecimentos dos estudantes sobre transformações geométricas devem ser tidos em consideração para serem utilizados e ampliados na resolução de problemas concretos.

Mesmo quando há lugar a resolver um problema por via analítica o professor deve incentivar o esboço de figuras geométricas de modo a tirar proveito da visualização do problema e a desenvolver capacidades de representação, ou seja, não se deve deixar que o estudante se limite à resolução exclusiva de equações e à utilização de fórmulas. Para além disso, deve apelar-se sempre à descrição, com algum detalhe, do processo utilizado, justificando-o adequadamente.

Devem apresentar-se aos estudantes problemas que possam ser resolvidos por vários processos (perspectiva sintética, geometria analítica, transformações geométricas, utilização de programas de geometria dinâmica).

Ao estudante devem ser propostas actividades que o levem a sentir a necessidade e vantagem do uso de um referencial, quer no plano quer no espaço. O professor pode fornecer figuras e/ou um referencial numa grelha e pedir a colocação da figura ou do referencial para obter as melhores coordenadas experimentando com várias figuras no plano e no espaço. Será vantajoso que o professor aproveite os problemas com que iniciou o módulo, recorrendo aos modelos já utilizados. No plano, o estudante deve descobrir as relações entre as coordenadas de pontos simétricos relativamente ao eixo das abcissas, ao eixo das ordenadas e à bissectriz dos quadrantes ímpares. No espaço, o estudante deve descobrir as relações entre pontos simétricos relativamente aos planos coordenados e aos eixos coordenados.

O conhecimento da equação reduzida da recta deverá permitir que o estudante saiba escrever a equação de qualquer recta cujo gráfico lhe seja apresentado, sem para isso ser necessário fazer exercícios repetitivos.

Devem explorar-se sempre que possível a conexão da Geometria com outras áreas da Matemática e o seu desenvolvimento deve ser aproveitado noutros módulos. Todas as actividades devem estar ligadas à manipulação de modelos geométricos concretos.

**Trigonometria Básica e Generalizações**

**6 semanas - 18 unidades lectivas de 90 minutos**

**Competências a desenvolver**

Na Trigonometria Básica e Generalizações, a competência matemática inclui os seguintes aspectos:

- a aptidão para fazer e investigar matemática recorrendo à modelação com uso das tecnologias;
- a aptidão para elaborar, analisar e descrever modelos associados a fenómenos reais utilizando a trigonometria básica e conceitos trigonométricos generalizados;
- a aptidão para elaborar, analisar e descrever modelos associados a fenómenos reais;
- a capacidade de comunicar oralmente e por escrito as situações problemáticas e os seus resultados;
- a capacidade de apresentar de forma clara, organizada e com aspecto gráfico cuidado os trabalhos escritos, individuais ou de grupo, quer sejam pequenos relatórios, monografias, ...
- a capacidade de usar uma heurística para a resolução de problemas.

**Objectivos de aprendizagem**

Neste módulo de Geometria no plano e no Espaço e na Trigonometria Básica e Generalizações, os objectivos de aprendizagem são os seguintes:

- construir modelos (maquetes e desenhos) úteis e adequados à resolução de problemas, com recurso a medições e escalas;
- resolver problemas usando modelos físicos e geométricos (de incidência, paralelismo e perpendicularidade; secções, áreas e volumes);
- comunicar, oralmente e por escrito, aspectos dos processos de trabalho e crítica dos resultados;
- identificar as vantagens do uso de um referencial;
- instalar um referencial numa figura (ou uma figura num referencial) de forma a obter “as melhores coordenadas”;
- escrever condições definidoras de conjuntos de pontos e lugares geométricos;
- resolver problemas de geometria no plano e no espaço, por vários processos e perspectivas de abordagem (sintética e analítica).

**Temas/conteúdos**

**Trigonometria Básica e Generalizações**

- Motivação: exemplos de movimentos periódicos.
- Generalização das noções de ângulo e arco; radiano.
- Referencial polar no plano;
- Ângulos orientados e medidas das suas amplitudes
- Seno, co-seno e tangente de um número real.
- Resolução de equações trigonométricas muito simples.

- Utilização das relações entre seno, co-seno e tangente.
- Utilização da relação  $\text{sen}^2(x) + \text{cos}^2(x) = 1$

**Resolução de problemas** concretos de determinação de distâncias a locais inacessíveis, alturas de edifícios, árvores, monumentos onde seja necessário escolher as razões trigonométricas mais adequadas à descrição da situação.

**História da Matemática** através de pesquisa referente à trigonometria e sua importância no desenvolvimento da Humanidade (por exemplo, na época dos Descobrimentos Portugueses).

### Recursos

O ensino/aprendizagem da trigonometria pressupõe a possibilidade de uso de materiais e equipamentos diversificados:

- material de desenho para o quadro e para o trabalho individual (régua, esquadro, compasso, transferidor,...);
- quadro quadriculado e papel milimétrico;
- instrumentos de medida: quadrante, sextante, astrolábio, compasso de agrimensor, etc.
- meios audiovisuais (retroprojector, acetatos e canetas, diapositivos, vídeo, ...);
- livros para consulta e manuais;
- calculadoras gráficas com possibilidade de utilização de programas e “viewscreen”;
- computadores e projectores de vídeo, “datashow”; “software” de geometria dinâmica analítica e produção de gráficos;

### Sugestões metodológicas

O professor precisa de propor problemas de diversos tipos para relembrar a semelhança de triângulos e as razões trigonométricas de ângulos agudos. São exemplos possíveis o cálculo de distâncias directamente inacessíveis. A generalização das noções deve ser intuitiva e sistematizada a partir de actividades que considerem movimentos circulares. São exemplos possíveis a “roda gigante” das feiras, a roda da bicicleta, motores, etc. É imprescindível a insistência no círculo trigonométrico.

As situações apresentadas podem considerar a recolha e tratamento de dados. As primeiras respostas a eventuais perguntas podem ser encontradas de forma ingénua e com recurso à tecnologia e representações informais. Exemplos de situações: movimento pendular, movimento do braço na marcha, movimento das marés, roda da bicicleta ou outras situações com movimentos circulares, moldes de peças, etc. Deve introduzir-se uma actividade que permita passar do círculo trigonométrico para o conjunto dos pontos  $(x, \text{sen}x)$  no plano cartesiano.

### Sugestões de avaliação

Na modalidade de frequência presencial, a avaliação é contínua, estando os alunos integrados em turmas com sujeição ao dever de assiduidade.

Para a avaliação sumativa destes estudantes, os professores devem recorrer a vários instrumentos de avaliação (testes, trabalhos e relatórios, estudos e composições, etc) adequados à diversidade de aprendizagem e aos contextos em que ocorrem, não ocupando mais de 4 unidades lectivas de 90 minutos. Actividades como construção de modelos necessários para a compreensão e representação de situações em estudo e relatórios respectivos podem e devem ser apreciadas como provas de avaliação.

A forma de transformação dos dados recolhidos em classificações é da estrita competência do

Curso Científico-humanístico de Artes Visuais do Ensino Recorrente  
Matemática B

departamento curricular, sendo que esta classificação obtida é decisiva para a capitalização do módulo, ao fim das 12 primeiras semanas (ou do 1º período). Recomendamos vivamente que o peso dos testes escritos não ultrapasse metade do peso do conjunto dos diferentes momentos de avaliação.

## Módulo 2

Funções e Gráficos: Generalidades; Funções Polinomiais; Funções Trigonométricas  
11 semanas - 33 unidades lectivas de 90 minutos

### Funções e Gráficos - Generalidades. Funções Polinomiais.

6 semanas - 18 unidades lectivas de 90 minutos

#### Competências a desenvolver

Neste módulo de funções, a competência matemática inclui os seguintes aspectos:

- a aptidão para fazer e investigar matemática recorrendo à modelação com uso das tecnologias;
- a aptidão para elaborar, analisar e descrever modelos associados a fenómenos reais utilizando diversos tipos de funções;
- a capacidade de comunicar oralmente e por escrito as situações problemáticas e os seus resultados;
- a capacidade de apresentar de forma clara, organizada e com aspecto gráfico cuidado os trabalhos escritos, individuais ou de grupo, quer sejam pequenos relatórios, monografias, ...
- a capacidade de usar uma heurística para a resolução de problemas.

#### Objectivos de aprendizagem

Neste módulo de funções, os objectivos de aprendizagem são os seguintes:

- elaborar modelos para situações da realidade do mundo do trabalho, da indústria, do comércio ou do mundo empresarial utilizando diversos tipos de funções;
- fazer o estudo de funções (domínio, extremos se existirem, zeros, intervalos de monotonia) descrevendo e interpretando no contexto da situação;
- reconhecer que o mesmo tipo de função pode ser um modelo de diferentes situações realistas;
- traduzir representações descritas por tabelas ou gráficos;
- analisar os efeitos das mudanças de parâmetros nos gráficos de funções;
- usar cenários visuais gerados pela calculadora para ilustrar conceitos matemáticos;
- usar métodos gráficos para resolver condições cuja resolução com métodos algébricos não esteja ao alcance dos estudantes;
- utilizar linguagem matemática adequada na elaboração, análise e justificação de conjecturas ou na comunicação de conclusões.

#### Temas/conteúdos

Resolução de Problemas envolvendo funções.

Esta resolução de problemas abrange progressivamente os seguintes temas:

Função, gráfico (gráfico cartesiano de uma função em referencial ortogonal) e representação gráfica.

- Estudo intuitivo de propriedades das funções e dos seus gráficos tanto a partir de um gráfico particular como usando a calculadora gráfica, para as seguintes classes de funções:



Curso Científico-humanístico de Artes Visuais do Ensino Recorrente  
Matemática B

- funções quadráticas;
- funções cúbicas.

As propriedades sugeridas são: domínio, contradomínio, pontos notáveis (intersecção com os eixos coordenados), monotonia, continuidade, extremos (relativos e absolutos), simetrias em relação ao eixo dos  $xy$  e à origem, limites nos ramos infinitos.

Este estudo deve incluir:

- a análise dos efeitos das mudanças de parâmetros nos gráficos das famílias de funções dessas classes (considerando apenas a variação de um parâmetro de cada vez);
- transformações simples de funções: considerado o gráfico da função  $y=f(x)$ , esboçar o gráfico das funções definidas por  $y=f(x)+a$ ,  $y=f(x+a)$ ,  $y=af(x)$ ,  $y=f(ax)$ , com  $a$  número real positivo ou negativo, e descrever o resultado com recurso à linguagem das transformações geométricas.

### Recursos

O ensino e a aprendizagem das funções reais de variável real pressupõe a possibilidade de uso de materiais e equipamentos diversificados:

- material de desenho para o quadro e para o trabalho individual (régua, esquadro, compasso, transferidor,...);
- quadro quadriculado e papel milimétrico;
- meios audiovisuais (retroprojector, acetatos e canetas, diapositivos, vídeo, ...);
- livros para consulta e manuais;
- calculadoras gráficas com possibilidade de utilização de programas e “viewscreen”;
- computadores e projectores de vídeo, “datashow”; “software” de geometria dinâmica analítica e produção de gráficos;
- sensores de recolha de dados quer para as calculadoras gráficas quer para os computadores.

Prevê-se a possibilidade de recorrer a fontes para fornecimento de dados, incluindo CD-ROM e Internet.

### Sugestões metodológicas

Os conhecimentos sobre funções, que os estudantes devem trazer do terceiro ciclo do ensino básico, vão ser ampliados com o estudo das funções quadráticas e cúbicas; estas serão estudadas num contexto de modelação matemática, devendo privilegiar-se o trabalho intuitivo com funções que relacionam variáveis da vida corrente, da Geometria, da Física, da Economia ou de outras disciplinas.

Os estudantes devem reconhecer que o mesmo tipo de função pode constituir um modelo de diferentes situações problemáticas.

Ao usar a calculadora gráfica ou o computador, os estudantes devem:

- observar que podem ser apresentadas diferentes representações gráficas de um mesmo gráfico, variando as escalas da representação gráfica;
- explorar claramente os diversos comportamentos e saber evitar conclusões apressadas;
- ser incentivados a elaborar conjecturas em função do que se lhes apresenta e ser sistematicamente treinados na análise crítica de todas as suas conclusões;
- traçar sempre um número apreciável de funções tanto manualmente em papel quadriculado ou papel milimétrico como usando calculadora gráfica ou computador;

- observar que a representação gráfica depende de forma decisiva do rectângulo de visualização escolhido.

Um estudante deve ser confrontado com situações em que os erros de aproximação conduzam a resultados absurdos. Como forma de evitar muitas situações dessas, deve ser feita a recomendação genérica de nos cálculos intermédios se tomar um grau de aproximação substancialmente superior ao grau de aproximação que se pretende para o resultado.

O estudo das funções deve começar com a análise de algumas situações de modelação matemática (por exemplo, usando dados concretos recolhidos por calculadoras gráficas ou computadores acoplados a sensores adequados).

Para todos os tipos de funções devem ser dados exemplos a partir de questões concretas (tanto de outras disciplinas que os estudantes frequentem -- Física, Química, Economia, etc. -- como de situações reais -- por exemplo de recortes de jornais). Particular importância deverá ser dada a situações problemáticas, situações de modelação matemática e a exemplos da Geometria, devendo retomar-se alguns daqueles que foram estudados no tema anterior.

Deve ser dada ênfase especial à resolução de problemas usando métodos numéricos e gráficos, nomeadamente quando forem usadas inequações.

## **Funções Trigonómicas.**

**5 semanas - 15 unidades lectivas de 90 minutos**

### **Competências a desenvolver**

Neste módulo de Funções a competência matemática inclui os seguintes aspectos:

- a aptidão para fazer e investigar matemática recorrendo à modelação com uso das tecnologias;
- a aptidão para elaborar, analisar e descrever modelos associados a fenómenos reais utilizando a trigonometria básica e conceitos trigonométricos generalizados;
- a aptidão para elaborar, analisar e descrever modelos associados a fenómenos reais utilizando funções periódicas;
- a capacidade de comunicar oralmente e por escrito as situações problemáticas e os seus resultados;
- a capacidade de apresentar de forma clara, organizada e com aspecto gráfico cuidado os trabalhos escritos, individuais ou de grupo, quer sejam pequenos relatórios, monografias, ...
- a capacidade de usar uma heurística para a resolução de problemas.

### **Objectivos de aprendizagem**

Neste módulo de Funções, os objectivos de aprendizagem são os seguintes:

- apropriar alguns conceitos e técnicas associadas para serem utilizados como "ferramentas" na resolução de problemas que envolvam compreensão e intervenção sobre fenómenos periódicos e seu desenvolvimento;
- construir modelos (e maquetes) apropriadas, úteis à resolução dos problemas e à generalização das noções de ângulo e arco, bem como de conceitos como o de radiano, por exemplo, e as definições de seno, co-seno e tangente de um número real;
- identificar as vantagens do uso de referenciais, estabelecendo as conexões entre as coordenadas cartesianas e polares no plano;
- resolver problemas dentro de situações que exijam a resolução de equações trigonométricas simples, a compreensão das características das funções circulares (simetria, paridade e

periodicidade), bem como do comportamento das funções trigonométricas como funções reais de variável real (monotonia, extremos, concavidade e assíntotas);

- comunicar, oralmente e por escrito, aspectos dos processos de trabalho e crítica dos resultados.

## Temas/conteúdos

### Funções Trigonométricas.

- Motivação: exemplos de movimentos periódicos.
- Funções seno, co-seno e tangente – domínio, contradomínio, monotonia, extremos, assíntotas verticais, simetria, paridade e periodicidade.

**Resolução de problemas** onde seja necessário escolher o modelo de funções mais adequado à descrição da situação.

### Recursos

O ensino/aprendizagem das funções reais de variável real pressupõe a possibilidade de uso de materiais e equipamentos diversificados:

- material de desenho para o quadro e para o trabalho individual (régua, esquadro, compasso, transferidor,...);
- quadro quadriculado e papel milimétrico;
- meios audiovisuais (retroprojector, acetatos e canetas, diapositivos, vídeo, ...);
- livros para consulta e manuais;
- calculadoras gráficas com possibilidade de utilização de programas e “viewscreen”;
- computadores e projectores de vídeo, “datashow”; “software” de geometria dinâmica analítica e produção de gráficos;
- sensores de recolha de dados quer para as calculadoras gráficas quer para os computadores.

Prevê-se a possibilidade de recorrer a fontes para fornecimento de dados, incluindo CD-ROM e Internet.

### Sugestões metodológicas

A generalização das noções deve ser intuída e sistematizada a partir de actividades que considerem movimentos circulares. São exemplos possíveis a “roda gigante” das feiras, a roda da bicicleta, motores, etc. que já deve ter sido trabalhado no primeiro módulo. É imprescindível continuar a insistência no círculo trigonométrico.

As funções trigonométricas podem e devem aparecer como modelos matemáticos que descrevem situações mais ou menos complexas. As situações apresentadas podem considerar a recolha e tratamento de dados. As primeiras respostas a eventuais perguntas podem ser encontradas de forma ingénua e com recurso à tecnologia e representações informais. O modelo que uma função trigonométrica pode representar deve aparecer como forma mais potente e geral para encontrar respostas para a situação em presença e para outras situações do mesmo tipo. Exemplos de situações: movimento pendular, movimento do braço na marcha, movimento das marés, roda da bicicleta ou outras situações com movimentos circulares, moldes de peças, etc.

O estudo das funções trigonométricas deve incluir a análise de algumas situações de modelação matemática, recorrendo necessariamente a três tipos de exemplos:

- recolha de dados concretos por meio de calculadoras gráficas ou computadores acoplados a sensores adequados;

Curso Científico-humanístico de Artes Visuais do Ensino Recorrente  
Matemática B

- exemplos de outras disciplinas que os estudantes frequentem;
- recortes de jornais.

**Sugestões de avaliação**

Na modalidade de frequência presencial, a avaliação é contínua, estando os alunos integrados em turmas com sujeição ao dever de assiduidade.

Para a avaliação sumativa destes estudantes, os professores devem recorrer a vários instrumentos de avaliação (testes, trabalhos e relatórios, estudos e composições, etc) adequados à diversidade de aprendizagem e aos contextos em que ocorrem, não ocupando mais de 4 unidades lectivas de 90 minutos. Actividades como construção de modelos necessários para a compreensão e representação de situações em estudo e relatórios respectivos podem e devem ser apreciadas como provas de avaliação.

A forma de transformação dos dados recolhidos em classificações é da estrita competência do departamento curricular, sendo que esta classificação obtida é decisiva para a capitalização do módulo, ao fim das 11 semanas (ou do 2º período). Recomendamos vivamente que o peso dos testes escritos não ultrapasse metade do peso do conjunto dos diferentes momentos de avaliação.

### Módulo 3

Estatística. Modelos de Probabilidade

10 semanas - 30 unidades lectivas de 90 minutos

**Estatística**

**5 semanas - 15 unidades lectivas de 90 minutos**

#### Competências a desenvolver

Na Estatística, a competência matemática inclui os aspectos seguintes:

- a capacidade para usar a matemática, em combinação com outros saberes, na compreensão de situações da realidade, bem como o sentido crítico relativamente à utilização de procedimentos e resultados matemáticos;
- a capacidade para recolher e organizar dados relativos a uma situação ou a um fenómeno e para os representar de modos adequados, nomeadamente através de tabelas e gráficos e utilizando as novas tecnologias;
- a aptidão para ler e interpretar tabelas e gráficos à luz de situações a que dizem respeito e para comunicar os resultados das interpretações feitas;
- a capacidade para dar resposta a problemas com base na análise de dados recolhidos e de experiências planeadas para o efeito;
- a aptidão para realizar investigações que recorram a dados de natureza quantitativa, envolvendo a recolha e análise de dados e elaboração de conclusões;
- o sentido crítico face ao modo como a informação é apresentada.

#### Objectivos de aprendizagem

Neste módulo de Estatística, os objectivos de aprendizagem são os seguintes:

- definir o problema a estudar;
- realizar recolhas de dados;
- organizar e tratar os dados através do cálculo das medidas estatísticas (de centralidade e dispersão), sua interpretação e representação gráfica;
- seleccionar as formas de representação gráfica mais adequadas à estatística a trabalhar e interpretá-las criticamente;
- desenvolver o sentido crítico face ao modo como a informação é apresentada;
- comunicar raciocínios e/ou argumentos matemáticos quer na forma oral e/ou escrita.

Realizar um trabalho de projecto, partindo de uma situação problemática da vida real relacionada com percursos profissionais, com necessidades industriais ou comerciais (controle de qualidade da cadeia de produção), com rentabilização de recursos (negociado com os estudantes), garante a concretização dos objectivos que se pretendem. Por isso, recomenda-se que se desenvolva a aprendizagem usando metodologias de trabalho de projecto.

#### Temas/conteúdos

##### **Estatística - Generalidades.**

- Objecto da Estatística e breve nota histórica sobre a evolução desta Ciência; utilidade na vida moderna.

Clarificação de quais os fenómenos que podem ser objecto de estudo estatístico; exemplificação de tais fenómenos com situações da vida real, salientando o papel relevante da Estatística na sua descrição.

Curso Científico-humanístico de Artes Visuais do Ensino Recorrente  
Matemática B

- Recenseamento e sondagem.

As noções de população e amostra. Compreensão do conceito de amostragem e reconhecimento do seu papel nas conclusões estatísticas; distinção entre os estudos e conclusões sobre a amostra e a correspondente análise sobre a população. Noções intuitivas sobre as escolhas de amostras, sobre a necessidade de serem aleatórias, representativas e livres de vícios de concepção.

- Estatística Descritiva e Estatística Indutiva.

Organização e interpretação de caracteres estatísticos (qualitativos e quantitativos)

- Análise gráfica de atributos qualitativos (gráficos circulares, diagramas de barras, pictogramas); determinação da moda.
- Análise de atributos quantitativos: variável discreta e variável contínua. Dados agrupados em classes.
- Variável discreta; função cumulativa.
- Variável contínua: tabelas de frequências (absolutas, relativas e relativas acumuladas); gráficos (histograma, polígono de frequências); função cumulativa.
- Medidas de dispersão de uma amostra: amplitude; variância; desvio padrão; amplitude interquartis.
- Medidas de localização de uma amostra: moda ou classe modal; média; mediana; quartis.
- Discussão das limitações destas estatísticas.
- Diagramas de “extremos e quartis”.

Referência a distribuições bidimensionais (abordagem gráfica e intuitiva)

- Diagrama de dispersão; dependência estatística; ideia intuitiva de correlação; exemplos gráficos de correlação positiva, negativa ou nula.
- Coeficiente de correlação e sua variação em  $[-1, 1]$ .
- Definição de centro de gravidade de um conjunto finito de pontos; sua interpretação física.
- Ideia intuitiva de recta de regressão; sua interpretação e limitações.

### Recursos

O ensino e a aprendizagem da Estatística pressupõem a possibilidade de uso de materiais e equipamentos diversificados:

- quadro quadriculado e papel milimétrico;
- meios audiovisuais (retroprojector, acetatos e canetas, diapositivos, vídeo, ...);
- livros para consulta, manuais e dossiers do projecto ALEA/INE;
- outros materiais escritos (folhas com dados estatísticos, fichas de trabalho, fichas de avaliação, ...);
- calculadoras gráficas com possibilidade de utilização de programas;
- computadores, projectores de vídeo, datashow, “software” estatístico específico e folhas de cálculo;
- sensores de recolha de dados quer para as calculadoras gráficas quer para os computadores.

Prevê-se a possibilidade de recorrer a fontes para fornecimento de dados estatísticos (autarquias, clubes, hospitais, empresas, institutos, cooperativas,...) incluindo CD-ROM e Internet - <http://www.ine.pt>  
<http://alea-estp.ine.pt/>

### Sugestões metodológicas

Deve-se chamar a atenção para o papel relevante desempenhado pela Estatística em todos os campos do conhecimento.

Sendo a Estatística a Ciência que trata dos "dados", num procedimento estatístico estão envolvidas, de um modo geral, duas fases: uma fase de organização dos dados recolhidos, em que se procura reduzir, de forma adequada, a informação neles contida - Estatística Descritiva, e uma segunda fase, em que se procura tirar conclusões e tomar decisões para um conjunto mais vasto, de onde se recolheram os dados - Inferência Estatística. Existe, no entanto, uma fase pioneira, que diz respeito à aquisição dos próprios "dados". Deve-se realçar a importância de, ao iniciar qualquer estudo estatístico, proceder cuidadosamente ao planeamento da experiência que conduz à recolha dos "dados" que serão objecto de tratamento estatístico.

Deve-se chamar a atenção para o facto de que a organização dos dados, consiste em resumir a informação neles contida através de tabelas, gráficos e algumas medidas, a que damos o nome de "estatísticas". Nesta fase, em que se substitui todo o conjunto dos dados, por um sumário desses dados, devem-se tomar as devidas precauções, pois nem todos os instrumentos de redução de dados se aplicam a todos os tipos de dados. Assim, de entre esses processos deve-se ter presente quais os mais adequados e em que situações é ou não convenientes aplicá-los. A título de exemplo referimos o facto de não ter qualquer sentido calcular a média para dados de tipo qualitativo, mesmo que as diferentes categorias assumidas pela variável em estudo estejam representadas por números.

Generalizando o estudo de uma única variável, faz-se uma introdução ao estudo dos dados bivariados, insistindo na representação gráfica sob a forma do diagrama de dispersão ou diagrama de pontos. Quando, a partir desta representação, se verificar uma tendência para a existência de uma associação linear entre as duas variáveis em estudo, identifica-se uma medida que quantifica o grau de associação - o coeficiente de correlação, assim como se apresenta um modelo matemático que permitirá, conhecido o valor de uma das variáveis, obter uma estimativa para o valor da outra.

## **Modelos de Probabilidade            5 semanas - 15 unidades lectivas de 90 minutos**

### **Competências a desenvolver**

Nos Modelos de Probabilidades, a competência matemática inclui os seguintes aspectos:

- a aptidão para compreender a diferença entre fenómeno determinístico e fenómeno aleatório;
- a aptidão para construir modelos de probabilidade para situações simples em que se admita como razoável o pressuposto de simetria ou equilíbrio;
- a aptidão para utilizar as propriedades no cálculo da probabilidade de acontecimentos;
- a aptidão para representar relações funcionais de vários modos e passar de uns tipos de representação para outros, usando regras verbais, tabelas, gráficos e expressões algébricas e recorrendo, nomeadamente, à tecnologia gráfica;

### **Objectivos de aprendizagem**

Nos Modelos de Probabilidade, os objectivos de aprendizagem são os seguintes:

- identificar acontecimentos em espaços finitos;
- reconhecer as vantagens em encontrar modelos matemáticos apropriados para estudar fenómenos aleatórios;
- compreender as aproximações conceptuais para a probabilidade;
- construir modelos de probabilidade em situações simples e usá-los para calcular a probabilidade de alguns acontecimentos;
- mostrar a utilidade das árvores de probabilidades como instrumento de organização de informação quando se está perante uma cadeia de experiências aleatórias;
- resolver problemas simples, recorrendo à calculadora gráfica ou computador, envolvendo distribuições de probabilidade, em particular a distribuição normal;

## **Temas/conteúdos**

### **Modelos de Probabilidade**

- Fenómenos aleatórios.
- Conceito frequencista de probabilidade e Regra de Laplace.
- Modelo Normal.

Resolução de problemas utilizando os modelos de probabilidade adequados às situações.

### **Recursos**

O ensino/aprendizagem dos “Modelos de Probabilidade” pressupõe a possibilidade de uso de materiais e equipamentos diversificados:

- dados poliédricos, cartas ou outros materiais para simulações e cálculo de probabilidades;
- quadro quadriculado e papel milimétrico;
- meios audiovisuais (retroprojector, acetatos e canetas, diapositivos, vídeo, ...);
- livros para consulta e manuais;
- calculadoras gráficas com possibilidade de utilização de programas e “viewscreen”;
- computadores e projectores de vídeo, “datashow”; “software” adequado (folha de cálculo ou outros com potencialidades análogas).

Prevê-se a possibilidade de recorrer a fontes para fornecimento de dados, incluindo CD-ROM e Internet;

### **Sugestões metodológicas**

A base da aprendizagem deve estar na experimentação – recorrendo a materiais manipuláveis ou simulações – e na resolução de problemas. Ao modelarem situações, os estudantes são conduzidos a construir o espaço de resultados de uma experiência aleatória e a definir acontecimentos. Os estudantes poderão usar simulações para construir empiricamente distribuições de probabilidades e utilizar a noção frequencista de probabilidade comparando resultados de simulações para prever valores da probabilidade de um acontecimento.

A definição de Laplace de probabilidade deve ser apresentada depois de serem criadas condições para se sentir a sua necessidade.

Através de uma apresentação de uma tarefa, (como por exemplo “Jogo dos dois dados” da brochura de Probabilidades página 44) e depois de ter sido abordada experimentalmente a noção de probabilidade de um acontecimento os estudantes podem sentir dificuldades naturais.

Não se justifica, nesta disciplina, o estudo de modelos para situações que obriguem a utilizar técnicas de contagem que envolvam cálculo combinatório.

É importante que os estudantes sejam capazes de estimar probabilidades de acontecimentos através da análise de um histograma. Recorrendo à calculadora ou ao computador, podem determinar a média e o desvio-padrão de uma distribuição.

### **Sugestões de avaliação**

Na modalidade de frequência presencial, a avaliação é contínua, estando os alunos integrados em turmas com sujeição ao dever de assiduidade.



Curso Científico-humanístico de Artes Visuais do Ensino Recorrente  
Matemática B

Para a avaliação sumativa destes estudantes, os professores devem recorrer a vários instrumentos de avaliação (testes, trabalhos e relatórios, estudos e composições, etc) adequados à diversidade de aprendizagem e aos contextos em que ocorrem, não ocupando mais de 4 unidades lectivas de 90 minutos. Actividades como construção de modelos necessários para a compreensão e representação de situações em estudo e relatórios respectivos podem e devem ser apreciadas como provas de avaliação.

A forma de transformação dos dados recolhidos em classificações é da estrita competência do departamento curricular, sendo que esta classificação obtida é decisiva para a capitalização do módulo, ao fim das 10 semanas (ou do 3º período). Recomendamos vivamente que o peso dos testes escritos não ultrapasse metade do peso do conjunto dos diferentes momentos de avaliação.

## Módulo 4

Movimentos não lineares. Funções Racionais. Taxa de variação 12 semanas - 36 unidades lectivas de 90 minutos

### Movimentos não lineares. Funções Racionais. 7 semanas - 21 unidades lectivas de 90 minutos

#### Competências a desenvolver

Neste módulo de Funções Racionais, a competência matemática inclui os seguintes aspectos:

- a aptidão para fazer e investigar matemática recorrendo à modelação com uso das tecnologias;
- a aptidão para elaborar, analisar e descrever modelos associados a fenómenos reais utilizando funções racionais;
- a capacidade de comunicar oralmente e por escrito as situações problemáticas e os seus resultados;
- a capacidade de apresentar de forma clara, organizada e com aspecto gráfico cuidado os trabalhos escritos, individuais ou de grupo, quer sejam pequenos relatórios, monografias, ...
- a capacidade de usar uma heurística para a resolução de problemas.

#### Objectivos de aprendizagem

Neste módulo de Movimentos não lineares e Funções Racionais, os objectivos de aprendizagem são os seguintes:

- elaborar modelos para situações da realidade utilizando diversos tipos de funções;
- apropriar alguns conceitos e técnicas associadas e os utilize como "ferramentas" na resolução de problemas que envolvam compreensão de proporcionalidade inversa, fracções, etc;
- estabelecer relações utilizando simultaneamente o estudo gráfico, numérico e analítico integrando operações com polinómios;
- analisar os efeitos das mudanças de parâmetros nos gráficos de funções;
- estudar o comportamento das funções racionais para valores "muito grandes" da variável e para valores "muito próximos" dos zeros dos denominadores das fracções que as definem;
- construir e interpretar modelos para situações reais utilizando diversos tipos de funções que evidenciem a diferença de comportamentos entre as funções polinomiais e as funções racionais;
- usar métodos gráficos para resolver condições, melhorando a compreensão de eventuais métodos algébricos utilizados ou quando não os puder utilizar;
- utilizar linguagem matemática adequada na elaboração, análise e justificação de conjecturas ou na comunicação de conclusões.

#### Temas/conteúdos

##### Funções Racionais.

- Motivação: estudo de relações numéricas concretas entre variáveis inversamente proporcionais.
- Características e comportamentos de algumas funções racionais:
  - $y = 1/(ax)$

Curso Científico-humanístico de Artes Visuais do Ensino Recorrente  
Matemática B

- $y = 1/(ax^2)$
- $y = 1/[a(x-h)^2]$ .
- Assíntotas.
- Adição, multiplicação e factorização de polinómios em contexto de resolução de problemas.
- Resolução de equações e inequações com fracções no contexto de resolução de problemas.

**Resolução de problemas** onde seja necessário escolher o modelo de funções mais adequado à descrição da situação.

### Recursos

O ensino/aprendizagem das funções reais de variável real pressupõe a possibilidade de uso de materiais e equipamentos diversificados:

- quadro quadriculado e papel milimétrico;
- meios audiovisuais (retroprojector, acetatos e canetas, diapositivos, vídeo, ...);
- livros para consulta e manuais;
- calculadoras gráficas com possibilidade de utilização de programas e “viewscreen”;
- computadores e projectores de vídeo, “datashow”; “software” de geometria dinâmica analítica e produção de gráficos;
- sensores de recolha de dados quer para as calculadoras gráficas quer para os computadores.

Prevê-se a possibilidade de recorrer a fontes para fornecimento de dados, incluindo CD-ROM e Internet;

### Sugestões metodológicas

É importante que os estudantes saibam como executar procedimentos matemáticos mas importa essencialmente saber quando aplicá-los, conhecer as razões da sua eficácia e adquirir o hábito de validar as suas respostas. É importante que apreciem a natureza e a importância das ferramentas matemáticas para responderem eficazmente a necessidades específicas de um dado problema. Pretende-se que o conhecimento do procedimento matemático esteja sempre ligado ao conhecimento do conceito; daí se deseja que o professor implique os estudantes na resolução de problemas ou actividades que envolvam as relações entre procedimentos e conceitos sempre numa perspectiva de explicitar conexões entre os conteúdos.

As situações precisam de ser tão ricas que, para além da mobilização do conceito de função, exijam esclarecimento de noções de domínio (em especial no que respeita à análise crítica dos resultados) e resolução de equações ou inequações. A apresentação de actividades puramente matemáticas pode ser considerada para organizar e aumentar a compreensão dos conceitos e noções, mas também para iniciar as técnicas de cálculo e resolução algébrica que devem ficar apropriadas a um nível de possível transferência para novas situações.

A partir de vários exemplos os estudantes podem compreender relações numéricas entre variáveis inversamente proporcionais e encontrar um modelo simples de uma função racional. Deverão proceder, depois, recorrendo às calculadoras gráficas ou ao computador, a investigações (ver Brochura "Funções: Matemática 11º ano de escolaridade", pp 80, 82 e 83) que os vão conduzir a conjecturar sobre as características e comportamentos de algumas funções racionais, em particular a existência de assíntotas ou o comportamento assintótico.

A resolução de problemas como “O volume constante” (p 90), “As peças cilíndricas”, “Compostos ácidos” (p 91), da brochura "Funções: Matemática 11º ano de escolaridade", ou equivalentes, permitirá que os estudantes resolvam condições e compreendam como se usa a álgebra na

resolução de problemas reais, mas está fora do âmbito deste programa a insistência nos aspectos algébricos das diferentes classes de funções.

### **Taxa de Variação**

**5 semanas - 15 unidades lectivas de 90 minutos**

### **Competências a desenvolver**

Neste módulo de Funções e Taxa de Variação, a competência matemática inclui os seguintes aspectos:

- a aptidão para fazer e investigar matemática recorrendo à modelação com uso das tecnologias;
- a aptidão para elaborar, analisar e descrever modelos para fenómenos reais utilizando funções polinomiais, racionais e trigonométricas;
- a capacidade de comunicar oralmente e por escrito as situações problemáticas e os seus resultados;
- a capacidade de apresentar de forma clara, organizada e com aspecto gráfico cuidado os trabalhos escritos, individuais ou de grupo, quer sejam pequenos relatórios, monografias, ...
- a capacidade de usar uma heurística para a resolução de problemas.

### **Objectivos de aprendizagem**

Neste módulo de Funções e Taxa de Variação, os objectivos de aprendizagem são os seguintes:

- apropriar alguns conceitos e técnicas associadas que utilizem como "ferramentas" na resolução de problemas que envolvam variações;
- interpretar física e geometricamente os conceitos de taxa média de variação e (a um nível ainda que intuitivo) de taxa de variação num ponto;
- utilizar simultaneamente os estudos gráfico, numérico e analítico de funções, para conjecturar e provar resultados;
- analisar efeitos das mudanças de parâmetros nos gráficos de funções e nas respectivas taxas de variação;
- estudar o comportamento das funções na sua relação com valores e sinais das taxas de variação em pontos do domínio;
- construir e interpretar modelos para situações reais utilizando diversos tipos de funções que evidenciem a diferença de comportamentos, utilizando cálculos das taxas de variação com recurso à calculadora gráfica ou ao computador.

### **Temas/conteúdos**

#### **Taxas de variação**

- Taxa de variação média: noção e cálculo;
- Interpretação geométrica e física das taxas de variação (média e num ponto);
- Taxas de variação de funções polinomiais, racionais e trigonométricas simples;
- Relações entre valores e sinais das taxas de variação e comportamentos dos gráficos das funções (monotonia, ...)

**Resolução de problemas** onde seja necessário escolher o modelo de funções mais adequado à descrição da situação.

## Recursos

O ensino/aprendizagem das funções reais de variável real pressupõe a possibilidade de uso de materiais e equipamentos diversificados:

- quadro quadriculado e papel milimétrico;
- meios audiovisuais (retroprojector, acetatos e canetas, diapositivos, vídeo, ...);
- livros para consulta e manuais;
- calculadoras gráficas com possibilidade de utilização de programas e “viewscreen”;
- computadores e projectores de vídeo, “datashow”; “software” de geometria dinâmica analítica e produção de gráficos;
- sensores de recolha de dados quer para as calculadoras gráficas quer para os computadores.

Prevê-se a possibilidade de recorrer a fontes para fornecimento de dados, incluindo CD-ROM e Internet.

## Sugestões metodológicas

Os estudantes deverão chegar a compreender e explicar a razão para uma função linear ser um bom modelo de estudo das variações da distância em função do tempo no movimento de um objecto que se move em linha recta com velocidade constante e deverão saber explicar o significado dos diversos parâmetros nos modelos desse tipo. Do mesmo modo, para um móvel que não se desloque a velocidade constante mas com aceleração constante (tal como a queda de um objecto sob influência da gravidade e ignorando a resistência do ar) o estudante deve encontrar, como modelo matemático apropriado, a função quadrática. Os estudantes devem compreender o significado de uma velocidade negativa. O sensor de movimento permite boas experimentações para estas situações.

Também problemas como " A bola no plano inclinado" , "O custo marginal" e " Lançamento de um projectil" " (ver Brochura Funções: Matemática – 11º ano de escolaridade (pp 100, 112 e 113)) permitirão que os estudantes se aproximem dos conceitos de taxa média de variação e de taxa de variação, bem como das respectivas interpretações geométricas. Os estudantes devem compreender o conceito de velocidade média num dado intervalo de tempo e aproximar-se intuitivamente do conceito de velocidade instantânea, e devem ser capazes de relacionar esses conceitos com os respectivos significados geométricos. A utilização da calculadora e do computador (recorrendo a software adequado) serão excelentes auxiliares para a aquisição destas noções. O recurso a sensores permitirá experiências interessantes.

Para efeitos da abordagem da taxa de variação em funções trigonométricas, as actividades “O cabo mais curto”, “Cone de luz”, “Volume de um cone”, “Roda gigante” das pp 100 a 103 da brochura de “Geometria: Matemática 11º ano de escolaridade” podem ser utilizadas com ligeiras adaptações. Todas estas actividades não mobilizam mais que operações com recurso à calculadora gráfica.

## Sugestões de avaliação

Na modalidade de frequência presencial, a avaliação é contínua, estando os alunos integrados em turmas com sujeição ao dever de assiduidade.

Para a avaliação sumativa destes estudantes, os professores devem recorrer a vários instrumentos de avaliação (testes, trabalhos e relatórios, estudos e composições, etc) adequados à diversidade de aprendizagem e aos contextos em que ocorrem, não ocupando mais de 4 unidades lectivas de 90 minutos. Actividades como construção de modelos necessários para a compreensão e representação de situações em estudo e relatórios respectivos podem e devem ser apreciadas como provas de avaliação.

A forma de transformação dos dados recolhidos em classificações é da estrita competência do departamento curricular, sendo que esta classificação obtida é decisiva para a capitalização do módulo, ao fim das 11 semanas (ou do 2º período). Recomendamos vivamente que o peso dos testes escritos não ultrapasse metade do peso do conjunto dos diferentes momentos de avaliação.

## Módulo 5

Modelos Discretos e Modelos Contínuos não Lineares 11 semanas - 33 unidades lectivas de 90 minutos

### Competências a desenvolver

Neste módulo de Modelos Discretos e Contínuos, a competência matemática inclui os seguintes aspectos:

- a aptidão para elaborar, analisar e descrever modelos associados a fenómenos reais utilizando modelos discretos;
- a capacidade para procurar padrões e regularidades e formular generalizações em situações diversas, nomeadamente em contextos numéricos e geométricos.
- aptidão para procurar e explorar as regularidades e diferenças entre os padrões lineares e exponenciais;
- a aptidão para elaborar, analisar e descrever modelos associados a fenómenos reais utilizando modelos de crescimento não linear;
- a capacidade para entender o uso de funções como modelos matemáticos de situações do mundo real, em particular nos casos em que traduzem situações de crescimento não linear;
- a aptidão para usar equações e inequações como meio de representar situações problemáticas e para resolver equações, inequações e sistemas graficamente;
- a capacidade de comunicar oralmente e por escrito as situações problemáticas e os seus resultados;
- a capacidade de apresentar de forma clara, organizada e com aspecto gráfico cuidado os trabalhos escritos, individuais ou de grupo, quer sejam pequenos relatórios, monografias, ...
- a capacidade de usar uma heurística para a resolução de problemas.

### Objectivos de aprendizagem

Neste módulo de Modelos Discretos e Contínuos, os objectivos de aprendizagem são os seguintes:

- reconhecer e dar exemplos de situações em que os modelos de sucessões sejam adequados;
- usar uma folha de cálculo para trabalhar numérica e graficamente com sucessões;
- reconhecer e dar exemplos de situações em que os modelos de progressões aritméticas ou geométricas sejam adequados;
- distinguir crescimento linear de crescimento exponencial;
- investigar propriedades de progressões aritméticas e geométricas, numérica, gráfica e analiticamente;
- resolver problemas simples usando propriedades de progressões aritméticas e de progressões geométricas;
- reconhecer e dar exemplos de situações em que os modelos exponenciais sejam bons modelos quer para o observado quer para o esperado;
- usar as regras das exponenciais e as calculadoras gráficas ou um computador para encontrar valores ou gráficos que respondam a possíveis mudanças nos parâmetros;
- interpretar uma função e prever a forma do seu gráfico;
- descrever as regularidades e diferenças entre padrões lineares, quadráticos, exponenciais, logarítmicos e logísticos;

- resolver equações simples usando exponenciais e logaritmos (no contexto da resolução de problemas);
- resolver, pelo método gráfico, inequações simples usando as funções exponenciais, logarítmicas e logísticas (no contexto da resolução de problemas);
- resolver problemas simples e de aplicação usando diferentes modelos de funções de crescimento.

## Temas/conteúdos

### Modelos Discretos

- Motivação: estudo de relações numéricas concretas.
- A sucessão real como função de variável natural
  - Sucessão
  - Modos de definir uma sucessão
  - Representação gráfica de uma sucessão
  - Sucessões monótonas
  - Sucessões limitadas.
- Progressões geométricas
  - Progressões geométricas
  - Expressão  $u_n$  em função de  $n$
  - Soma de  $n$  termos consecutivos
- Comparação entre o crescimento linear e o crescimento exponencial (ou geométrico)
- Estudo intuitivo da sucessão de termo geral  $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$  num contexto de modelação matemática. Definição do número  $e$

### Modelos Contínuos Não Lineares - Funções de Crescimento.

- Função exponencial de base superior a um
  - Estudo das propriedades analíticas e gráficas da família de funções definidas por  $f : x \mapsto a^x, a > 1$
  - Regras operatórias das funções exponenciais
  - Crescimento exponencial
- Função logarítmica de base  $a(a > 1)$ .
  - Logaritmo de um número
  - Função logarítmica
  - Regras operatórias de logaritmos
  - Comparação de crescimento de funções

- Função logística
  - Propriedades da função logística  $f : x \mapsto \frac{a}{b + ce^{kx}}, k < 0$
  - Comparação de crescimento de funções
- Resolução de equações e inequações no contexto de resolução de problemas.

**Resolução de problemas** onde seja necessário escolher o modelo de funções (discretos ou contínuos) mais adequado à descrição da situação.

### Recursos

O ensino/aprendizagem dos Modelos Discretos e Contínuos pressupõe a possibilidade de uso de materiais e equipamentos diversificados:

- quadro quadriculado e papel milimétrico;
- meios audiovisuais (retroprojector, acetatos e canetas, diapositivos, vídeo, ...);
- livros para consulta e manuais;
- calculadoras gráficas com possibilidade de utilização de programas e “viewscreen”;
- computadores e projectores de vídeo, “datashow”; “software” adequado (folha de cálculo ou outros com potencialidades análogas).

Prevê-se a possibilidade de recorrer a fontes para fornecimento de dados, incluindo CD-ROM e Internet;

### Sugestões metodológicas

Os estudantes encontrarão o poder das exponenciais explorando problemas clássicos tais como “os grãos de milho no tabuleiro de xadrez”, “evolução de um capital sofrendo juros simples ou acumulados”, “crescimento de uma população”,.... Outros problemas do tipo de “a geração de coelhos de Fibonacci”, “sequências de números (números triangulares, quadrangulares, ...)” ou equivalentes vão permitir encontrar o conceito de sucessão e as diferentes formas de as definir (incluindo o método recursivo), bem como interessantes representações gráficas.

Os estudantes perante experiências de modelação de crescimentos devem compreender e estabelecer as diferenças entre as relações aditivas  $a_{n+1} = a_n + r$  e as multiplicativas  $a_{n+1} = a_n \cdot r$  e a sua correspondência com as expressões  $y = ax + b$  e  $y = ab^x$ , respectivamente.

Ao estudante pode ser solicitado um trabalho sobre, por exemplo, a curva de Von Koch ou o poliedro fractal. Os estudantes encontrarão assim uma interessante característica das figuras fractais enquanto utilizam propriedades das progressões.

Os estudantes podem ainda estudar sequências de somas parciais e descobrir que encontram uma função quadrática como fórmula da soma de  $n$  termos de uma progressão aritmética e uma função exponencial (abordada de forma totalmente intuitiva) na progressão geométrica.

Os estudantes poderão fazer investigações sobre outras características destas sucessões e mesmo chegar a caracterizar e a usar representações tabelares das primeiras diferenças, segundas diferenças e razões de termos sucessivos relacionando-os com os modelos linear, quadrático e exponencial. Poderão usar estas características para escolher modelos apropriados a situações contextualizadas.

As funções de crescimento aparecem como uma forma de organizar possíveis resoluções para situações problemáticas que são apresentadas, com base em aspectos da realidade (social) e em



aspectos do estudo das diversas ciências (Matemática incluída). O estudo das funções pode e deve servir para evidenciar conexões entre a matemática e as outras disciplinas: a introdução e o trabalho das funções de crescimento e das suas propriedades podem ser feitos propondo vários problemas. Exemplos sugestivos podem versar assuntos diversos: da biologia - por exemplo, crescimento de uma dada população, da química – a desintegração radioactiva, da propagação de ruídos (boatos), de manchas de poluição, do desenvolvimento florestal, etc.

Os estudantes podem reconhecer o logaritmo como solução de equações exponenciais e a função logarítmica como inversa da exponencial.

Problemas como “A construção da barragem” (Brochura Funções 12, pág.133) permitirão que o estudante reencontre o conceito de limite ou de assíntota.

Tarefas como “Sismos na Internet” (Brochura Funções 12, pág.137) permitirão que o estudante reconheça propriedades dos logaritmos e estude, aplicada a esta função, a taxa de variação num ponto.

As tarefas do tipo “Matemática e Música” (Brochura Funções 12, pág.84-96 e pág. 140-145) em que o estudante, usando sensores de som e calculadoras ou computadores, determina as frequências de notas de uma escala musical e investiga relações e diferenças entre essas notas, permitem discussões muito ricas na sala de aula.

Finalmente, uma tarefa do tipo da “Evolução da população portuguesa” (Brochura Funções 12, pág.110) permite encontrar a função logística que é modelo de variados fenómenos reconhecíveis em aplicações a estudos feitos em outras disciplinas.

### **Sugestões de avaliação**

Na modalidade de frequência presencial, a avaliação é contínua, estando os alunos integrados em turmas com sujeição ao dever de assiduidade.

Para a avaliação sumativa destes estudantes, os professores devem recorrer a vários instrumentos de avaliação (testes, trabalhos e relatórios, estudos e composições, etc) adequados à diversidade de aprendizagem e aos contextos em que ocorrem, não ocupando mais de 4 unidades lectivas de 90 minutos. Actividades como construção de modelos necessários para a compreensão e representação de situações em estudo e relatórios respectivos podem e devem ser apreciadas como provas de avaliação.

A forma de transformação dos dados recolhidos em classificações é da estrita competência do departamento curricular, sendo que esta classificação obtida é decisiva para a capitalização do módulo, ao fim das 11 semanas (ou do 2º período). Recomendamos vivamente que o peso dos testes escritos não ultrapasse metade do peso do conjunto dos diferentes momentos de avaliação.

## Módulo 6

Problemas de Optimização

10 semanas - 30 unidades lectivas de 90 minutos

### Competências a desenvolver

Neste módulo de Optimização, a competência matemática inclui os seguintes aspectos:

- a aptidão para fazer e investigar matemática recorrendo à modelação com uso das tecnologias;
- a aptidão para elaborar, analisar e descrever modelos associados a fenómenos reais utilizando funções já estudadas;
- a aptidão para reconhecer sobre os modelos os valores óptimos para cada situação e capacidade para tomar boas decisões;
- a aptidão para elaborar, analisar e descrever modelos para situações reais, em especial as de planeamento (de produção ou outras);
- a aptidão para reconhecer sobre os modelos os valores óptimos para cada situação e capacidade para tomar boas decisões;
- a capacidade de comunicar oralmente e por escrito as situações problemáticas e os seus resultados;
- a capacidade de apresentar de forma clara, organizada e com aspecto gráfico cuidado os trabalhos escritos, individuais ou de grupo, quer sejam pequenos relatórios, monografias, ...
- a capacidade de usar uma heurística para a resolução de problemas.

### Objectivos de aprendizagem

Neste módulo de Optimização, os objectivos de aprendizagem são os seguintes:

- utilizar os estudos gráfico, numérico e analítico de funções;
- relacionar os efeitos das mudanças de parâmetros nos gráficos de funções e as respectivas taxas de variação;
- reconhecer numericamente e graficamente a relação entre o sinal da taxa de variação e a monotonia de uma função;
- reconhecer a relação entre os zeros da taxa de variação e os extremos de uma função;
- resolver problemas de aplicações simples envolvendo a determinação de extremos de funções racionais, exponenciais, logarítmicas e trigonométricas;
- reconhecer que diferentes situações podem ser descritas pelo mesmo modelo matemático;
- resolver numericamente e graficamente problemas simples de programação linear;
- reconhecer o contributo da matemática para a tomada de decisões, assim como as suas limitações;
- utilizar sistema de coordenadas para obter equações e inequações que representem determinados lugares geométricos (rectas e domínios planos);
- utilizar os estudos gráfico, numérico e analítico de funções afins, com resolução de equações e inequações;
- relacionar os efeitos das mudanças de parâmetros nos gráficos das funções afins, bem como entre os sinais dos coeficientes e a monotonia;

Curso Científico-humanístico de Artes Visuais do Ensino Recorrente  
Matemática B

- resolver numérica, graficamente e, com recurso a programas computacionais (na folha de cálculo), problemas de programação linear;
- abordar a história da programação linear como ferramenta de gestão e nos contextos da sua criação e desenvolvimento;
- resolver numérica, gráfica e algebricamente alguns sistemas de equações e inequações;
- utilizar tecnologia e programas computacionais específicos para gestão e planeamento;
- reconhecer o contributo da matemática para a tomada de decisões, assim como as suas limitações;

### Temas/conteúdos

**Resolução de problemas envolvendo taxas de variação e extremos de funções de famílias já estudadas, com recurso à calculadora gráfica:**

- Taxa de variação média num intervalo;
- Taxa de variação num ponto;
- Sinais das taxas de variação e monotonia da função;
- Zeros da taxa de variação e extremos da função.

**Resolução de problemas de programação linear** com referências expressas da identificação das variáveis de decisão, das restrições e da função objectivo até à sua formulação matemática.

### Recursos

O ensino/aprendizagem dos Modelos Discretos e Contínuos pressupõe a possibilidade de uso de materiais e equipamentos diversificados:

- quadro quadriculado e papel milimétrico;
- meios audiovisuais (retroprojector, acetatos e canetas, diapositivos, vídeo, ...);
- livros para consulta e manuais;
- calculadoras gráficas com possibilidade de utilização de programas e “viewscreen”;
- computadores e projectores de vídeo, “datashow”; “software” adequado (folha de cálculo ou outros com potencialidades análogas).

Prevê-se a possibilidade de recorrer a fontes para fornecimento de dados, incluindo CD-ROM e Internet;

### Sugestões metodológicas

Um problema como aquele em que se atira uma pedra ao ar e a altura em função do tempo é dada por uma quadrática permite aos estudantes determinar a taxa de variação num instante qualquer,  $t_0$  e representar no mesmo referencial a função dada e a função dos "declives das rectas tangentes" num intervalo do domínio da função. Uma situação problemática como esta poderá ter sido já estudada, mas pode agora ser aprofundada a sua análise, investigando a relação entre a forma do gráfico e os sinais dos declives das rectas tangentes.

Este tipo de exploração pode ser levado até à análise dos extremos. Por exemplo, traçando a parábola e a função derivada eles confirmarão que para os valores de  $t$  em que a segunda é negativa a primeira decresce, bem como para aqueles em que a segunda é positiva a primeira cresce e que no zero da afim encontrarão o extremo da quadrática. Problemas do tipo da determinação do volume máximo de uma

caixa feita a partir de uma folha de papel, ou outros semelhantes de volumes de sólidos dados por cúbicas, constituem oportunidades análogas.

Deve editar-se na calculadora

$$y_1 = ax^3 + bx^2 + cx + d \text{ e } y_2 = \frac{y_1(x + 0,0000001) - y_1(x)}{0,0000001}$$

a cúbica e a função dos declives das rectas secantes para todo o  $x$ , quando a amplitude do intervalo é  $h=0,0000001$ . [Considera-se esta abordagem preferível ao recurso da derivação numérica da calculadora por manter presente o conceito de taxa de variação e permitir comparar os dois gráficos, estudar a influência do valor de  $h$  e procurar o extremo da primeira função através da mudança de sinal e zero da segunda. Recomenda-se a consulta das páginas 48 a 53 da Brochura “Funções: Matemática – 11º ano de escolaridade”, sobre o tema da “derivação numérica”].

Este modo de proceder pode ser adoptado no estudo da monotonia das funções exponenciais e logarítmicas. Com este método, os estudantes podem até compreender que a taxa de variação instantânea de uma função exponencial é proporcional ao valor da função no ponto considerado e interpretar isto como um crescimento relativo constante.

Os problemas de programação linear a colocar apresentam os constrangimentos característicos de cada situação de produção e um objectivo (máximo ou mínimo de uma função objectivo) a ser alcançado com o maior êxito nas condições existentes.

Pretende-se familiarizar os estudantes com situações de gestão e desenvolver competências para tomar decisões boas em termos de planeamento (da produção, por exemplo) que podem ter a ver com maximizar lucros, minimizar custos ou consumos, etc.

Na aula de Matemática poderão tratar-se problemas simples com características idênticas. Assim cada exemplo tratará de maximizar ou minimizar uma determinada quantidade (função objectivo) tendo-se em conta certas limitações ou constrangimentos.

Se houver tempo, os estudantes podem mesmo ser colocados perante a necessidade de tomar decisões de novos investimentos que alterem as condições de fabrico (o polígono dos constrangimentos) de modo a responder a novos desafios ou a obter melhorias, com vantagem sobre o peso dos investimentos, nos máximos ou mínimos da função objectivo. No fundo, trata-se de colocar aos estudantes situações de trabalho em que seja marcante a utilidade do planeamento e benéfica a colaboração da matemática para tomar boas decisões em empresas ou colectivos de trabalhadores.

### **Sugestões de avaliação**

Na modalidade de frequência presencial, a avaliação é contínua, estando os alunos integrados em turmas com sujeição ao dever de assiduidade.

Para a avaliação sumativa destes estudantes, os professores devem recorrer a vários instrumentos de avaliação (testes, trabalhos e relatórios, estudos e composições, etc) adequados à diversidade de aprendizagem e aos contextos em que ocorrem, não ocupando mais de 4 unidades lectivas de 90 minutos. Actividades como construção de modelos necessários para a compreensão e representação de situações em estudo e relatórios respectivos podem e devem ser apreciadas como provas de avaliação.

A forma de transformação dos dados recolhidos em classificações é da estrita competência do departamento curricular, sendo que esta classificação obtida é decisiva para a capitalização do módulo, ao fim das 10 semanas (ou do 3º período). Recomendamos vivamente que o peso dos testes escritos não ultrapasse metade do peso do conjunto dos diferentes momentos de avaliação.

## BIBLIOGRAFIA

Abrantes, P.; Ponte, J.P. et al.(1999) Investigações matemáticas na aula e no currículo. Grupo Matemática para todos -- investigações na sala de aula. Lisboa: Associação de Professores de Matemática

Abrantes, P.; Leal, L. C.; Ponte, J.P. et al.(1996) Investigar para aprender matemática. Grupo Matemática para todos – investigações na sala de aula. Lisboa: Associação de Professores de Matemática.

Estes livros reúnem um conjunto de artigos elaborados no âmbito do Projecto Matemática para Todos à volta da incorporação, nas aulas e nos currículos de matemática, de actividades de natureza investigativa realizadas pelos estudantes. Segundo os organizadores dos volumes, as actividades de investigação podem ser inseridas, naturalmente, em qualquer parte do currículo, representando na verdade um tipo de trabalho que tem um carácter transversal na disciplina de Matemática. De acordo com os organizadores dos livros o trabalho realizado por este projecto confirma as potencialidades da actividade investigativa para a aprendizagem da Matemática e dá muitas pistas sobre o modo como ela se pode inserir nas actividades das escolas.

Departamento de Educação Básica (1999). A Matemática na Educação Básica. Lisboa: ME-DEB.

Departamento de Educação Básica (2001). Currículo Nacional do Ensino Básico — competências essenciais. Lisboa: ME-DEB.

Estas publicações do Departamento de Educação Básica constituem importantes fontes de informação sobre a Matemática do ensino básico em Portugal absolutamente necessárias para quem lecciona no ensino.

Grupo de trabalho T3-Portugal APM. (1999). Modelação no Ensino da Matemática - Calculadora, CBL e CBR. Lisboa: APM.

Grupo de trabalho T3-Portugal APM. (2002). Funções no 3º ciclo com Tecnologia. Lisboa: APM.

Estas publicações contêm actividades de modelação matemática para utilização na sala de aula; umas actividades são facilmente realizadas com a ajuda de uma calculadora gráfica e as outras necessitam da utilização de sensores para recolha de dados experimentais; são incluídos comentários e resoluções das actividades. Os conceitos matemáticos envolvidos nas actividades incluem funções definidas por ramos, regressão, optimização, funções exponenciais e trigonométricas e função quadrática. A primeira publicação contém um texto introdutório sobre o processo de modelação matemática e a ligação entre a modelação matemática e a modelação no ensino da matemática; o texto situa ainda a modelação matemática no contexto dos actuais programas do ensino secundário.

Ponte, J. P. (coord.), Boavida, A. M., Graça, M., Abrantes, P. e Bastos, R. (1997). Didáctica: Ensino Secundário. Lisboa: ME-DES.

Ponte, João Pedro (coord.), Brunheira, L., Abrantes, P. e Bastos, R. (1998). Projectos Educativos: Ensino Secundário. Lisboa: ME-DES.

Estas brochuras, editadas pelo Departamento do Ensino Secundário para apoiar o Ajustamento dos Programas de Matemática, contêm numerosas sugestões relevantes para este programa, pelo que são de consulta indispensável.

Curso Científico-humanístico de Artes Visuais do Ensino Recorrente  
Matemática B

Ponte, J.P.; Canavarro, A. P. (1997). Matemática e Novas Tecnologias (Universidade Aberta, Vol.28). Lisboa: UA.

Este livro fornece uma excelente panorâmica da utilização das novas tecnologias na Matemática e na aula de Matemática. É apresentada uma perspectiva histórica da utilização das tecnologias na matemática sendo discutidos bastantes exemplos em várias áreas curriculares (números, funções, geometria, estatística e probabilidades) e analisados com algum detalhe vários tipos de programas de computador (jogos, folhas de cálculo, linguagem LOGO, programas de geometria dinâmica). É certamente uma obra de muito interesse para qualquer professor de Matemática pela ampla perspectiva que oferece.

Departamento do Ensino Secundário

Matemática no Secundário: — <http://www.mat-no-sec.org> —

O Departamento do Ensino Secundário do Ministério da Educação ao criar este espaço, pretende dar uma ajuda a todos os professores na recolha de informações úteis à sua prática pedagógica, contribuindo para a sua auto-formação e actualização. Nesta página poderá encontrar os Programas de Matemática do Ensino Secundário (Programa Ajustado), as Brochuras de apoio à concretização das orientações curriculares, o InforMat, boletim de informação, divulgação e debate do ensino da Matemática, apresentação de actividades a desenvolver na sala de aula e de actividades interactivas prontas a serem utilizadas, os endereços de páginas da Internet com informações úteis sobre a Matemática e a Educação Matemática e destaques com notícias e informações úteis.

Precatado, A.; Guimarães, H. (org.), (2001) Materiais para a aula de Matemática. Lisboa: APM.

Esta publicação contém propostas muito variadas de actividades para a sala de aula, juntamente com um CD contendo os textos das actividades.

Prof. Miguel de Guzmán Ozámiz: — <http://ochoa.mat.ucm.es/~guzman/> —

Esta página é um manancial inesgotável de informação relacionada com a Matemática, o seu ensino e a sua história. Salientamos o curso “Laboratório de Matemática”, as actividades e os textos de divulgação matemática.

Projecto Matemática em Acção:

Os Primórdios da História da Matemática — [http://cmaf.lmc.fc.ul.pt/em\\_accao/videos/](http://cmaf.lmc.fc.ul.pt/em_accao/videos/) —

Os vídeos editados pelo Projecto Matemática em Acção, são excelentes e podem ser usados (ou apenas um excerto) como forma de motivação para a aula de matemática ou para actividades fora da sala de aula.