Prova final de Matemática - 3.º ciclo (2006, 1.ª chamada)

Proposta de resolução

1.

1.1. Como a Marta pesa 45 kg, e para evitar lesões na coluna vertebral, o peso de uma mochila e o do material que se transporta dentro dela não devem ultrapassar 10% do peso do seu peso, peso que o conjunto da mochila e do material não deve ultrapassar, é:

$$45 \times \frac{1}{10} = 45 \times 0{,}1 = 4{,}5 \text{ kg}$$

Pela observação da figura podemos observar que a mochila da Marta pesa, quando está vazia, aproximadamente 0,7 Kg, pelo que o peso máximo do material a transportar não deve ultrapassar, é:

$$4{,}5 - 0{,}7 = 3{,}8 \text{ kg}$$

1.2. O gráfico que corresponde ao diagrama circular é o gráfico B.

O Gráfico A não corresponde ao diagrama circular, porque no diagrama o setor relativo à lesão "Pés e tornozelos"(de cor mais escura) é o que representa a percentagem menor, pelo que a barra correspondente a esta lesão deve ser que tem menor altura, o que não se verifica.

O Gráfico C também não corresponde ao diagrama circular, porque no diagrama o setor relativo ao dado "Outros"(assinalado a branco) representa uma percentagem menor que os setores relativos aos dados "Mãos, punhos e cotovelos"e "Ombros e costas", pelo que a barra correspondente a esta lesão deve ter menor altura, que as barras das outras lesões referidas, o que não se verifica.

2. Como conjunto $A = [\pi, +\infty[$, um número pertence ao conjunto A se for maior ou igual a π

Assim podemos verificar que

- $3{,}1 \times 10^{-2} = 0{,}031$, e $0{,}031 < \pi$, pelo que $3{,}1 \times 10^{-2} \notin A$
- $3{,}1 \times 10^{0} = 3{,}1$, e $3{,}1 < \pi$, pelo que $3{,}1 \times 10^{0} \notin A$
- $3{,}1 \times 10^{-1} = 0{,}31$, e $0{,}31 < \pi$, pelo que $3{,}1 \times 10^{-1} \notin A$

E ainda que $3{,}1 \times 10^{1} = 31$, e $31 > \pi$, pelo que $3{,}1 \times 10^{1} \in A$

Resposta: **Opção** $3{,}1 \times 10^{1} = 31$

3.

3.1. Os retângulos A e B, têm os respetivos lados maiores com a mesma medida e os lados menores com medidas diferentes, pelo que não não são semelhantes.
Da mesma forma, os retângulos A e C, têm os respetivos lados menores com a mesma medida e os lados maiores com medidas diferentes, pelo que não não são semelhantes.
Assim, temos que os retângulos semelhantes são os retângulos B e C.
Logo, podemos afirmar que a razão entre lados correspondentes é igual à razão de semelhança (r), e como se deve considerar uma redução, a razão é inferior a 1, logo a razão é a divisão do menor comprimento pelo maior:

$$r = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

3.2. Calculando o perímetro do retângulo A, temos que:

$$P_A = 2 + 3 + 2 + 3 = 10 \text{ cm}$$

Pelo que, a medida do lado de um quadrado com o mesmo perímetro, é:

$$l = \frac{10}{4} = \frac{5}{2} \text{ cm}$$

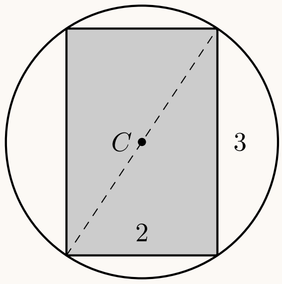
E assim, a área, em centímetros quadrados, desse quadrado é:

$$A_Q = \frac{5}{2} \times \frac{5}{2} = \frac{25}{4} \text{ cm}^2$$

3.3. Como o retângulo está inscrito numa circunferência, a medida do diâmetro da circunferência é igual à medida da diagonal do retângulo.

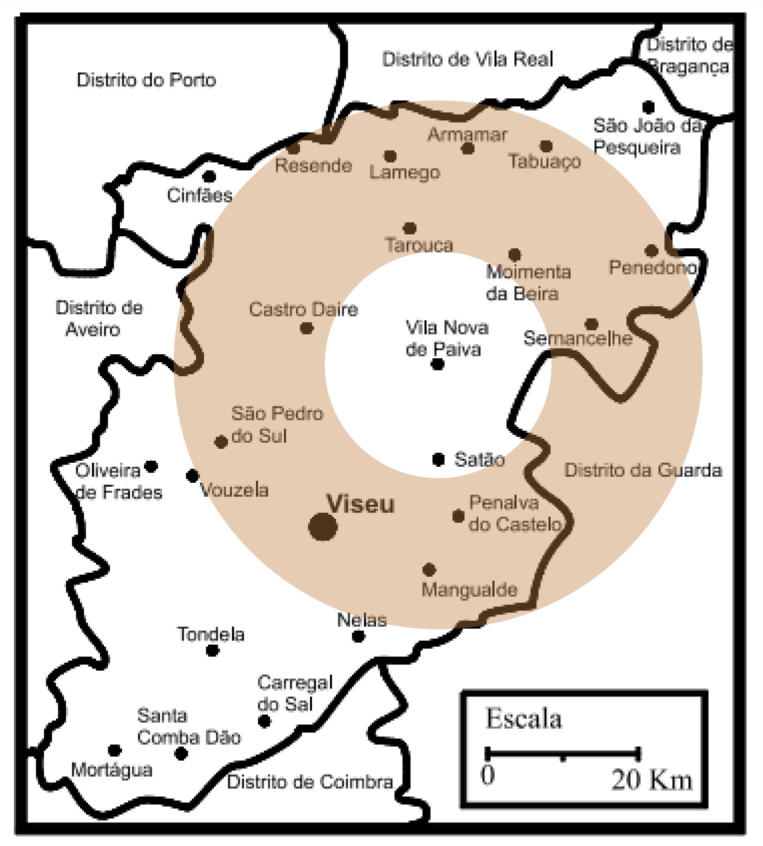
Assim, recorrendo ao Teorema de Pitágoras para determinar o valor exato da medida d da diagonal do retângulo, temos

$$d^2 = 2^2 + 3^2 \Leftrightarrow d^2 = 4 + 9 \Leftrightarrow d^2 = 13 \underset{d>0}{\Rightarrow} d = \sqrt{13}$$



4.

4.1.



4.2. De acordo com a fórmula de cálculo do preço das chamadas, o primeiro minuto da chamada efetuada pela Marta, tem um custo de 8 cêntimos.

Relativamente aos restantes 20 segundos, o custo, é o de uma chamada nacional ($d > 35$) em horário normal, ou seja, consultando a tabela temos que o custo é de 0,3 cêntimos por segundo.
Assim o custo da chamada efetuada pela Marta é de:

$$8 + 0{,}3 \times 20 = 14 \text{ cêntimos}$$

5. Como, de acordo com a figura o cateto oposto ao ângulo x tem é o lado b, e a hipotenusa do triângulo é o lado a, pela definição de seno de um ângulo, vem que

$$\operatorname{sen} x = \frac{b}{a}$$

Resposta: **Opção** $\operatorname{sen} x = \dfrac{b}{a}$

6. Escrevendo a equação na fórmula canónica, e usando a fórmula resolvente, vem:

$$\frac{x^2-1}{3}=1-x \Leftrightarrow \frac{x^2-1}{3}=\frac{1}{1_{(3)}}-\frac{x}{1_{(3)}} \Leftrightarrow \frac{x^2-1}{3}=\frac{3}{3}-\frac{3x}{3} \Leftrightarrow x^2-1=3-3x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2-1-3+3x=0 \Leftrightarrow x^2+3x-4=0 \Leftrightarrow$$

$(a=1,\ b=3 \text{ e } c=-4)$

$$\Leftrightarrow x=\frac{-3\pm\sqrt{3^2-4(1)(-4)}}{2(1)} \Leftrightarrow x=\frac{-3\pm\sqrt{9+16}}{2} \Leftrightarrow x=\frac{-3\pm\sqrt{25}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{-3+5}{2} \vee x=\frac{-3-5}{2} \Leftrightarrow x=\frac{2}{2} \vee x=\frac{-8}{2} \Leftrightarrow x=1 \vee x=-4$$

C.S.=$\{-4{,}1\}$

7. Podemos determinar o volume do sólido representado a sombreado como a diferença dos volumes dos dois cones representados - de alturas respetivamente iguais a 6 metros e a 2 metros.

   Calculando os volumes temos:

   - Cone com 6 metros de altura: $V_6=\frac{1}{3}A_{\text{Base}}\times 6=\frac{1}{3}\times\pi\times 1{,}8^2\times 6\approx 20{,}36\ \text{m}^3$
   - Cone com 2 metros de altura: $V_2=\frac{1}{3}A_{\text{Base}}\times 2=\frac{1}{3}\times\pi\times 0{,}6^2\times 2\approx 0{,}75\ \text{m}^3$

   E assim, o volume do sólido que serviu de base à construção do *vulcão de água*, em metros cúbicos, arredondado às unidades, é de:

$$V=V_6-V_2\approx 20{,}36-0{,}75\approx 20\ \text{m}^3$$

8. Somando todos os valores da linha da tabela relativa ao número de alunos, obtemos o número total de alunos da turma da Marta, ou seja o número de casos possíveis de observar, quando se escolhe ao acaso um aluno da turma da Marta: $9+12+6+3=30$

   O número de casos favoráveis, ou seja o número de alunos que não foi de autocarro pode ser calculado subtraindo ao total de alunos o número daqueles que foi de autocarro: $30-6=24$

   Assim, temos que a probabilidade de escolher ao acaso, um aluno da turma da Marta, e esse aluno **não** ter ido de autocarro é:

$$p=\frac{24}{30}=0{,}8$$

   Este valor corresponde, em percentagem, a uma probabilidade de 80%

   Resposta: **Opção** 80%

9.

9.1. Considerando, por exemplo os números inteiros 3 e 4, temos que a subtração do quadrado do menor ao quadrado do maior, é:

$$4^2 - 3^2 = 16 - 9 = 7$$

Logo a afirmação da Marta é verdadeira, porque 7 não é um múltiplo de 2.

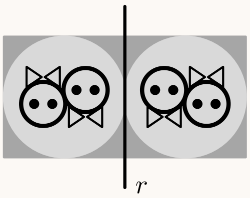
9.2. Designando por n um número natural, o número natural consecutivo é $n + 1$

Subtraindo o quadrado do menor ao quadrado do maior, temos

$$(n+1)^2 - n^2 = n^2 + 2 \times n \times 1 + 1^2 = n^2 + 2n + 1 - n^2 = 2n + 1$$

Como $2n+1$ é ímpar, (porque sabemos $2n$ é par, e somando uma unidade a um número par, obtemos um número ímpar) então não é múltiplo de 2.

10. As opções (A), (C) e (D) representam translações da figura, segundo um vetor com direção perpendicular à reta r



Resposta: **Opção**

11. Podemos substituir as soluções no sistema, para identificar qual delas verifica as duas equações do sistema simultaneamente, ou então, resolver o sistema para encontrar a solução:

$$\begin{cases} 2x = y \\ 2(x+y) = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = y \\ 2(x+2x) = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = y \\ 2(3x) = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = y \\ 6x = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = y \\ x = \frac{3}{6}_{\div 3} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x = y \\ x = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\left(\frac{1}{2}\right) = y \\ x = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = y \\ x = \frac{1}{2} \end{cases}$$

C.S. $= \left\{ \left(\frac{1}{2}, 1 \right) \right\}$

Resposta: **Opção** $\left(\frac{1}{2}, 1 \right)$

12.

12.1. Como a cabine parte do ponto A, a distância ao ponto A é zero, no início da contagem do tempo. Em seguida, até que a cabine passe pelo ponto B, a distância aumenta de forma continuada. Depois, desde que passa pelo ponto B, até que volte à posição inicial, a distância diminui de forma continuada.

O único gráfico que está de acordo com esta observação é o Gráfico A.

Resposta: **Opção** Gráfico A

12.2. Como a distância, **em quilómetros**, entre duas cabinas consecutivas é c, então $n \times c$ é o comprimento total circuito do teleférico porque existem n cabinas em utilização; logo o comprimento total do circuito pode ser dividido em n partes, separadas por duas cabinas consecutivas. Desta forma temos que o comprimento total do circuito é de 3 quilómetros.

O maior número de voltas completas que uma cabine pode dar numa hora acontece se a cabina viajar à velocidade máxima, ou seja, a 17 km/h.
Como o comprimento total do circuito é de 3 km, a uma velocidade de 17 km/h, temos que o número de voltas é:

$$\frac{17}{3} \approx 5{,}6$$

Pelo que se concluí que numa hora, à velocidade máxima, cada cabine dá 5 voltas completas.