# Prova final de Matemática - 3.º ciclo (2008, 1.ª chamada)

Proposta de resolução

1. Como entre o 5 e o 17 existem $17 - 5 + 1 = 13$ números, o número de casos possíveis para o número do bilhete retirado pelo João é 13.
   Como existem 6 números pares (nomeadamente os números 6, 8, 10, 12, 14 e 16), ou seja são 6 os casos favoráveis, então, pela Regra de Laplace, temos que a probabilidade de que o número do bilhete retirado pelo João é:
   $$p = \frac{6}{13}$$
   Resposta: **Opção** $\frac{6}{13}$

2. Para determinar o mínimo múltiplo comum (m.m.c. (12,24)), começamos por decompor cada um dos números em fatores primos:
   $$\begin{array}{r|l} 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 24 & 2 \\ 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$
   $30 = 2^2 \times 3$ $\qquad$ $24 = 2^3 \times 3$

   Como o mínimo múltiplo comum é o produto dos fatores primos comuns e não comuns (cada um elevado ao maior expoente), temos que
   $$\text{m.m.c. } (12{,}24) = 2^3 \times 3$$
   Ou, de forma mais simples, como 24 é múltiplo de 12, $24 = 2^3 \times 3$ é o mínimo múltiplo comum entre os dois números.

   Resposta: **Opção** $2^3 \times 3$

3. Como cada fila tem menos 3 cadeiras que a anterior, se subtrairmos 3 sucessivamente ao número de cadeiras da primeira fila (23) até obtermos o número de cadeiras da última fila (8), temos:
   - 1ª fila: 23 cadeiras
   - 2ª fila: 23-3=20 cadeiras
   - 3ª fila: 20-3=17 cadeiras
   - 4ª fila: 17-3=14 cadeiras
   - 5ª fila: 14-3=11 cadeiras
   - 6ª fila: 11-3=8 cadeiras

   Assim, podemos concluir que a sala tem 6 filas de cadeiras.

4.

4.1. Analisando, nos diferentes gráficos, por exemplo a barra correspondente aos rapazes que costumam ir ao cinema 1 vez por mês, verificamos que apenas no Gráfico C, esta barra corresponde 300 alunos, de acordo com a informação descrita na tabela.

Resposta: **Opção** Gráfico C

4.2. Como na escola existem 1000 alunos, e é entre esse grupo de alunos que se vai sortear o bilhete, então o número de casos possíveis para o vencedor do sorteio é 1000.
O número de casos favoráveis, corresponde ao número de raparigas que, em média, vai ao cinema mais do que uma vez por mês, ou seja o número de raparigas que vais ao cinema 2 ou 3 vezes por mês (em média), isto é $200 + 50 = 250$.
Assim, calculando a probabilidade com recurso à Regra de Laplace, e apresentando o resultado na forma de fração irredutível, temos:

$$p = \frac{250}{1000} = \frac{1}{4}$$

5. Pela observação da representação gráfica do intervalo podemos verificar que representa todos os números reais maiores que $-1$ e menores ou iguais a 4, ou seja:

$$\left\{x \in \mathbb{R} : x > -1 \ \wedge x \leq 4\right\}$$

Resposta: **Opção** $\left\{x \in \mathbb{R} : x > -1 \ \wedge x \leq 4\right\}$

6.

6.1. Como a Associação de estudantes deve mandar imprimir bilhetes para menos 20% do que o número máximo de pessoas que cabem no recinto, então, calculando 20% de 300 temos:

$$300 \times \frac{20}{100} = 3 \times 20 = 60 \text{ bilhetes}$$

E assim o número de bilhetes que a associação deve mandar imprimir é:

$$300 - 60 = 240 \text{ bilhetes}$$

6.2. Como a Associação de estudantes deve mandar imprimir bilhetes para menos 20% do que o número máximo de pessoas que cabem no recinto, então, deve mandar imprimir bilhetes para as restantes 80% das pessoas.
Assim, considerando $n$ como o número máximo de pessoas, temos que 80% deste valor é:

$$n \times \frac{80}{100} = n \times 0{,}8$$

Resposta: **Opção** $n \times 0{,}8$

7.

7.1. Uma hora após a avaria corresponde a $t = 1$, pelo que a temperatura, em graus centígrados, é:

$$C = 21 + 2 \times 1 = 21 + 2 = 23$$

7.2. Calculando o valor da temperatura, em graus centígrados, quando a avaria ocorreu, ou seja, para $t = 0$, temos:

$$C = 21 + 2 \times 0 = 21 + 0 = 21$$

Assim, como para $t = 1$, temos que a temperatura é $C = 23$, podemos constatar que a temperatura aumentou 2 graus na primeira hora.
Como o declive da semirreta que é a representação gráfica da função é 2, então a temperatura continuará a aumentar 2 graus por cada unidade de tempo, ou seja irá aumentar 2 graus por hora.

7.3. A temperatura de 24 graus centígrados corresponde a $C = 24$
Substituindo este valor na expressão $C = 21 + 2t$, podemos determinar o valor de $t$, ou seja o tempo decorrido, em horas, desde a ocorrência da avaria:

$$24 = 21 + 2t \Leftrightarrow 24 - 21 = 2t \Leftrightarrow 3 = 2t \Leftrightarrow \frac{3}{2} = t \Leftrightarrow 1{,}5 = t$$

Temos ainda que 1,5 horas corresponde a $60 + 30 = 90$ minutos.

8. Considerando a função definida por $y = x + 2$, e, por exemplo, $x = 1$, obtemos

$$y = 1 + 2 = 3$$

Assim, podemos verificar que a representação gráfica correspondente é parte de uma reta, que contém o ponto de coordenadas (1,3), pelo que os gráficos representados nas opções (B) e (D) não verificam esta condição.

Considerando a função definida por $y = \frac{3}{x}$, e, por exemplo, $x = 1$, obtemos

$$y = \frac{3}{1} = 3$$

Assim, podemos verificar que a representação gráfica correspondente é parte de uma hipérbole, que também contém o ponto de coordenadas (1,3), pelo que os gráficos representados nas opções (C) e (D) não verificam esta condição.

Desta forma, apenas no referencial da opção (A) podem estar os gráficos das duas funções.

Resposta: **Opção** Referencial A

9. Escrevendo a equação na fórmula canónica, e usando a fórmula resolvente, vem:

$$2(x^2 - 1) = 3x \Leftrightarrow 2x^2 - 2 = 3x \Leftrightarrow 2x^2 - 2 - 3x = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 3x - 2 = 0 \Leftrightarrow$$

$(a = 2,\ b = -3 \text{ e } c = -2)$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4(2)(-2)}}{2(2)} \Leftrightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 16}}{4} \Leftrightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{25}}{4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{3 + 5}{4} \vee x = \frac{3 - 5}{4} \Leftrightarrow x = \frac{8}{4} \vee x = \frac{-2}{4} \Leftrightarrow x = 2 \vee x = -\frac{1}{2}$$

C.S.$=\left\{-\frac{1}{2},2\right\}$

10. Como o triângulo assinalado na figura é retângulo, o lado com comprimento 30 m é a hipotenusa, e relativamente ao ângulo $\alpha$, o lado definido pelo ecrã é o cateto oposto, pelo que, usando a definição de seno, temos:

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{15}{30} \Leftrightarrow \operatorname{sen} (C\hat{A}B) = 0{,}5$$

Assim, procurando o valor 0,5 na coluna dos valores do seno na tabela de valores das razões trigonométricas (ou recorrendo à calculadora), temos que

$$\alpha = \operatorname{sen}^{-1}(0{,}5) = 30°$$

Como a amplitude do ângulo de visão do João é superior a 26° e inferior a 36°, então podemos afirmar o lugar do João permite uma visão clara do filme.

11.

11.1. Como $[ABEF]$ é um quadrado, então $[AE]$ é a diagonal de um quadrado, que bisseta o ângulo $FAB$, que é reto.
Assim, temos que

$$E\hat{A}B = \frac{F\hat{A}B}{2} = \frac{90}{2} = 45°$$

11.2. Como a medida da área do quadrado $[ABEF]$ é 64, podemos calcular a medida do lado:

$$\overline{AB} = \sqrt{64} = 8$$

Como $[ABEF]$ é um quadrado, então o triângulo $[ABF]$ é retângulo em $B$ e $\overline{AB} = \overline{AF}$, pelo que, recorrendo ao Teorema de Pitágoras, podemos calcular a mediada do lado $[BF]$:

$$\overline{BF}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AF}^2 \Leftrightarrow \overline{BF}^2 = 8^2 + 8^2 \Leftrightarrow \overline{BC}^2 = 64 + 64 \Leftrightarrow \overline{BC}^2 = 128 \underset{\overline{BF}>0}{\Rightarrow} \overline{BF} = \sqrt{128}$$

Como as diagonais de um quadrado se bissetam mutuamente, podemos calcular a medida do comprimento do segmento de recta $[OB]$ e escrever o resultado arredondado às décimas:

$$\overline{OB} = \frac{\overline{BF}}{2} = \frac{\sqrt{128}}{2} \approx 5{,}7$$

11.3. Analisando cada uma das afirmações, temos que:

- Como $[AO]$ e $[BO]$ são semidiagonais do mesmo quadrado, temos que $\overline{AO} = \overline{BO}$, o que garante que o triângulo $[AOB]$ **não é** escaleno.
- Como $O\hat{A}B = 45°$ e $O\hat{B}A = 45°$ (porque $[AO]$ e $[BO]$ são semidiagonais de um quadrado, e assim bissetam ângulos retos), então a amplitude do ângulo $AOB$ é:

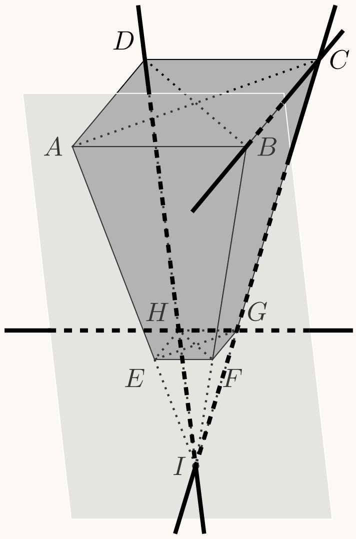
$$A\hat{O}B = 180 - 45 - 45 = 180 - 90 = 90°$$

  Pelo que podemos afirmar que o triângulo $[AOB]$ é retângulo, ou seja, **não é** um triângulo acutângulo.
- Como os ângulos $ACD$ e $CDE$ são ângulos retos retos, porque são ambos ângulos do retângulo $[HCDG]$, e como o ângulo $DEA$ é obtuso e o ângulo $EAC$ é agudo, então não existem dois pares de ângulos internos com a mesma amplitude, no quadrilátero $[HCDE]$, pelo que este **não é** um trapézio isósceles.
- Como $[HCDG]$ é um retângulo, então o ângulo $HCD$ é um ângulo reto. Como o ponto $E$ pertence ao segmento $[DG]$, e o ponto $A$ pertence ao segmento $[HC]$ então o segmentos $[DE]$ e $[AC]$ são paralelos, pelo que o quadrilátero $[ACDE]$ é um trapézio.
  Desta forma podemos garantir que $[ACDE]$ **é um trapézio retângulo**.

Resposta: **Opção** O trapézio $[ACDE]$ é retângulo.

12.

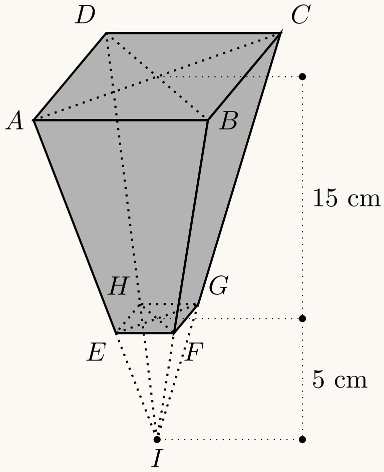
12.1. Analisando cada uma das afirmações temos que:




- A reta $DH$ contém o ponto $I$, que também pertence ao plano que contém a face $[ABFE]$, pelo que a reta interseta o plano, ou seja, a reta não é paralela ao plano.
- A reta $CG$ interseta o plano que contém a face $[ABFE]$ no ponto $I$, segundo um ângulo que não é reto, pelo que é oblíqua ao plano.
- Como as faces laterais de uma pirâmide não são perpendiculares à base da pirâmide, então nenhuma reta contida na base pode ser perpendicular ao plano que contém uma face lateral. Como a reta $CB$ pertence ao plano da base, então não é perpendicular ao plano que contém a face $[ABFE]$
- A reta $HG$ é estritamente paralela à reta $EF$, pois ambas contêm lados opostos de um quadrado. Como a reta $HG$ é estritamente paralela a uma reta do plano que contém a face $[ABFE]$, então é paralela ao plano.

Resposta: **Opção** A reta $CG$ é oblíqua ao plano que contém a face $[ABFE]$.

12.2. Como $\overline{EF} = 3$ cm e a pirâmide $[EFGHI]$ tem altura 5 cm, o volume da pirâmide é:




$$V_{[EFGHI]} = \frac{1}{3} \times A_{[EFGH]} \times h = \frac{1}{3} \times 3 \times 3 \times 5 = 15 \text{ cm}^3$$

Como $\overline{AB} = 12$ cm e a pirâmide $[ABCDI]$ tem altura $15 + 5 = 20$ cm, então o seu volume é:

$$V_{[ABCDI]} = \frac{1}{3} \times A_{[ABCD]} \times alt = \frac{1}{3} \times 12 \times 12 \times 20 = 960 \text{ cm}^3$$

Assim, o volume do tronco de pirâmide, $V_T$, pode ser calculado como a diferença dos volumes das duas pirâmides

$$V_T = V_{[ABCDI]} - V_{[EFGHI]} = 960 - 15 = 945 \text{ cm}^3$$

Exame Nacional 3º Ciclo - 2008, 1ª chamada