Prova final de Matemática - 3.º ciclo **(2009, 1.ª chamada)**

Proposta de resolução

1.

1.1. Observando os dados da tabela, podemos verificar que o número total de viagens vendidas para Madrid, nos meses de janeiro, fevereiro e março foi 1413.
Assim, calculando a média do número de viagens vendidas por mês, para Madrid, nos primeiros três meses do ano, temos:

$$\overline{x} = \frac{1413}{3} = 471 \text{ viagens}$$

1.2. Podemos observar que o número de clientes que compraram viagens no mês de março é 2400, e estes são todos os clientes que são considerados para o sorteio (os casos possíveis).
Podemos ainda verificar que, de entre os 2400 clientes do mês de março, 528 compraram viagens para Paris, ou seja, são estes os casos favoráveis, pelo que, recorrendo à Lei de Laplace, e escrevendo o resultado na forma de dízima, temos

$$p = \frac{528}{2400} = 0{,}22$$

2. Temos que $-8 \in \mathbb{Q}$; $\frac{3}{7}$ é uma quociente de números inteiros, pelo que pode ser representado por uma dízima finita ou infinita periódica, logo $\frac{3}{7} \in \mathbb{Q}$ e $\sqrt{81} = 9$, logo $\sqrt{81} \in \mathbb{Q}$

E como $-\sqrt{27}$ e π são dízimas infinitas não periódicas, então são estes os elementos do conjunto A que são números irracionais.

Resposta: **Opção** $-\sqrt{27}$ e π

3. Considerando, por exemplo o número 12, que é divisível por 3, podemos verificar que:

- o número representado pelo algarismo das unidades (2) **não** é divisível por 3
- o número representado pelo algarismo das unidades (2) **não** é igual a 3
- a soma dos números representados por todos os seus algarismos ($1 + 2 = 3$) **é** divisível por 3
- o produto dos números representados por todos os seus algarismos ($1 \times 2 = 2$) **não** é divisível por 3

Resposta: **Opção** A soma dos números representados por todos os seus algarismos é divisível por 3

4.

4.1. Escrevendo uma aproximação do número de visitantes do Louvre em notação científica, temos

$$5\,093\,280 \approx 5\,093 \times 1000 \approx 5{,}1 \times 1000 \times 10^3 = 5{,}1 \times 10^3 \times 10^3 = 5{,}1 \times 10^{3+3} = 5{,}1 \times 10^6$$

Resposta: **Opção** $5{,}1 \times 10^6$

4.2. Podemos verificar que o aumento do número de visitantes é constante porque o aumento de 2004 para 2005 foi de $7{,}5 - 6{,}7 = 0{,}8$ milhões, e de 2005 para 2006 também foi de $8{,}3 - 7{,}5 = 0{,}8$

Logo, para atingir os 15,5 milhões de visitantes é necessário um aumento total, relativamente ao ano de 2006 de $15{,}5 - 8{,}3 = 7{,}2$ milhões.

Supondo que o aumento nos anos seguintes se mantém constante, então dividindo o aumento necessário por 0,8, obtemos o número de anos correspondentes a esse aumento global:

$$\frac{7{,}2}{0{,}8} = 9$$

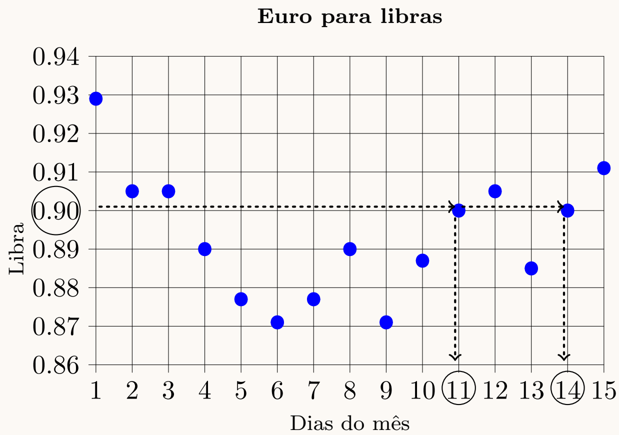
Ou seja, 9 anos depois de 2006, o aumento total foi de $9 \times 0{,}8 = 7{,}2$ milhões, o que corresponde a um número de visitantes de $8{,}3 + 7{,}2 = 15{,}5$ milhões.

Como 9 anos depois de 2006 é o ano $2006 + 9 = 2015$, este é o ano em que haverá 15,5 milhões de visitantes.

5.

5.1. Identificando no gráfico os pontos com ordenada 0,90, podemos observar que são dois e têm abcissas 11 e 14, o que significa que os dias do mês em que 1 euro valia 0,90 libras foram:

os dias 11 e 14 de fevereiro.



5.2. No dia 4 de Fevereiro, cada euro valia 0,89 libras, como se pode verificar no gráfico.
Assim, como o Rui trocou 100 euros por libras, recebeu

$$100 \times 0{,}89 = 89 \text{ libras}$$

5.3. Como no dia 11 de fevereiro, 1 euro valia 0,89 libras, então por E euros o Rui deve receber $0{,}9 \times E$ libras. Ou seja a quantidade de libras (L) em função da quantidade de euros (E) é dada por $L = 0{,}9E$

Como $0{,}9 = \frac{9}{10}$, vem que $L = \frac{9}{10}E$

Resolvendo em ordem a E, temos

$$L = \frac{9}{10}E \Leftrightarrow L \times 10 = 9E \Leftrightarrow L \times \frac{10}{9} = E \Leftrightarrow E = \frac{10}{9}L$$

Resposta: **Opção** $E = \frac{10}{9}L$

6. Como o dinheiro que a Susana guardou chegava exatamente para comprar uma lembrança de 35 rublos para cada um de 18 amigos, então a Susana guardou

$$35 \times 18 = 630 \text{ rublos}$$

Como a Susana queria comprar lembranças para 21 amigos, o valor máximo que ela poderia pagar por cada lembrança, com o dinheiro que tinha era

$$\frac{360}{21} = 30 \text{ rublos}$$

7. Designando por a o número dos bilhetes vendidos para adultos e por c, o número dos bilhetes vendidos para crianças, como nesse dia, o número dos bilhetes vendidos para adultos foi o triplo do número dos bilhetes vendidos para crianças, temos que

$$a = 3c$$

Sabemos ainda que se cada bilhete de adulto custava 2 euros, então a bilhetes de adulto custavam, em euros, $2 \times a$, ou $2a$. Da mesma forma, como cada bilhete de criança custava 50 cêntimos, ou seja, 0,5 euros, então c bilhetes de criança custavam, em euros, $0{,}5c$
Como, nesse dia o museu recebeu 325 euros pela venda de bilhetes, então temos que

$$2 + 0{,}5c = 325$$

Logo, o sistema de equações que permite determinar o número dos bilhetes vendidos para crianças e o número dos bilhetes vendidos para adultos, nesse dia, é

$$\begin{cases} a = 3c \\ \\ 2a + 0{,}5c = 325 \end{cases}$$

Resposta: **Opção** $\begin{cases} a = 3c \\ \\ 2a + 0{,}5c = 325 \end{cases}$

8. Escrevendo a equação na fórmula canónica, e usando a fórmula resolvente, vem:

$$4(x^2 + x) = 1 - x^2 \Leftrightarrow 4x^2 + 4x = 1 - x^2 \Leftrightarrow 4x^2 + 4x - 1 + x^2 = 0 \Leftrightarrow 5x^2 + 4x - 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$(a = 5,\ b = 4 \text{ e } c = -1)$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4(5)(-1)}}{2(5)} \Leftrightarrow x = \frac{-4 \pm \sqrt{16 + 20}}{10} \Leftrightarrow x = \frac{-4 \pm \sqrt{36}}{10} \Leftrightarrow$$

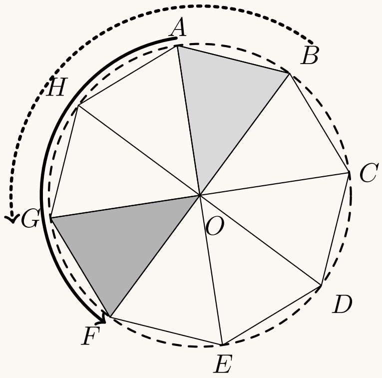
$$\Leftrightarrow x = \frac{-4 + 6}{10} \vee x = \frac{-4 - 6}{10} \Leftrightarrow x = \frac{2}{10} \vee x = \frac{-10}{10} \Leftrightarrow x = \frac{1}{5} \vee x = -1$$

C.S.=$\left\{-1, \frac{1}{5}\right\}$

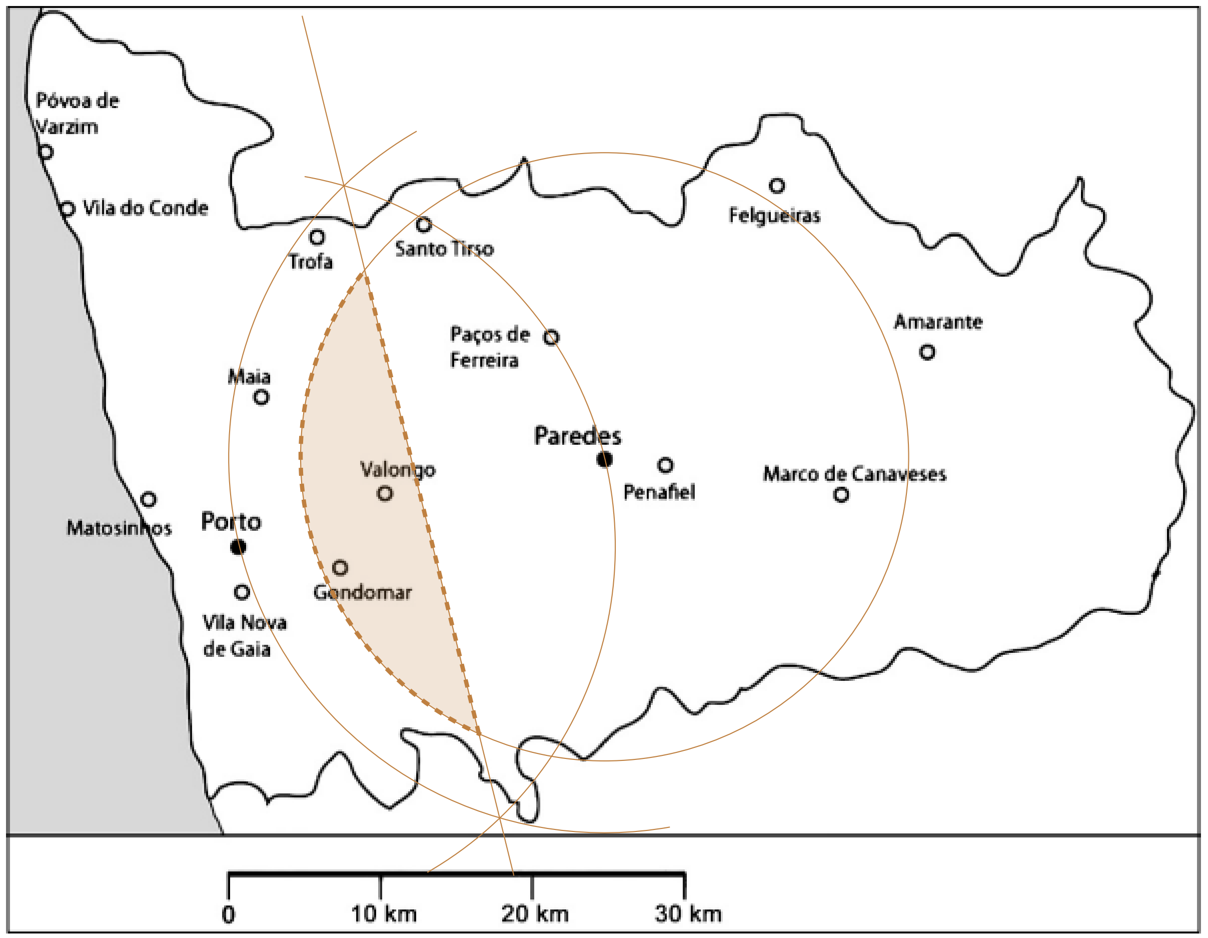
9. Como $[ABCDEFGH]$ é um octógono regular, pode ser dividido em 8 triângulos isósceles congruentes, cujos ângulos menores têm amplitude $\frac{360}{8} = 45°$

Assim, como $\frac{135}{45} = 3$, o transformado do triângulo $[AOB]$ pela rotação de centro no ponto O e de amplitude 135° é o triângulo $[GOF]$ (como se pode observar na figura ao lado).

Resposta: **Opção** $[GOF]$



10.



11.

11.1. Como o ângulo ABC é o ângulo inscrito relativo ao arco AC, a amplitude do arco é o dobro da amplitude do ângulo:

$$\overset{\frown}{AC} = 2 \times A\hat{B}C = 2 \times 28 = 56°$$

11.2. Como $\overline{AB} = \overline{BC}$, então a reta BO é perpendicular ao segmento $[AC]$, e assim, temos que o triângulo $[ADO]$ é retângulo em D

Temos ainda que o ponto D é o ponto médio do lado $[AC]$, pelo que $\overline{AD} = \frac{\overline{AC}}{2} = \frac{6{,}4}{2} = 3{,}2$

Assim, recorrendo ao Teorema de Pitágoras, e substituindo os valores conhecidos, vem que:

$$\overline{AO}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{DO}^2 \Leftrightarrow 6{,}8^2 = 3{,}2^2 + \overline{DO}^2 \Leftrightarrow 46{,}24 = 10{,}24 + \overline{DO}^2 \Leftrightarrow 46{,}24 - 10{,}24 = \overline{DO}^2 \Leftrightarrow$$

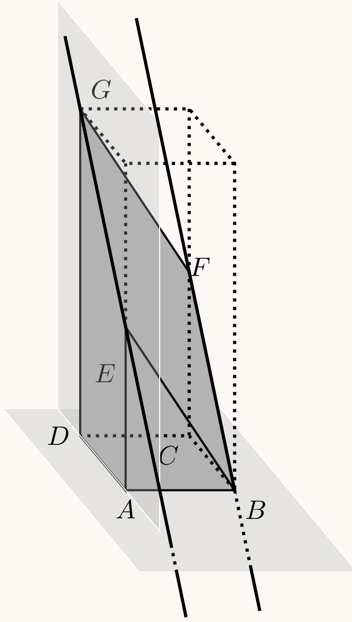
$$\Leftrightarrow 36 = \overline{DO}^2 \underset{\overline{DO}>0}{\Rightarrow} \sqrt{36} = \overline{DO} \Leftrightarrow 6 = \overline{DO}$$

Como $[EO]$ é um raio da circunferência, tal como $[AO]$, então $\overline{EO} = \overline{AO} = 6{,}8$

Como $\overline{EO} = \overline{DE} + \overline{DO} \Leftrightarrow \overline{DE} = \overline{EO} - \overline{DO}$, e podemos calcular a medida do comprimento de $[DE]$, em centímetros:

$$\overline{DE} = 6{,}8 - 6 = 0{,}8 \text{ cm}$$

12.



12.1. A reta EG não é paralela nem perpendicular ao plano $[ABCD]$, que contém a base do prisma.

A reta FB como está contida na face do prima que é paralela à face $[ADGE]$ é paralela ao plano que contém esta face.

Resposta: **Opção**
A reta FB é paralela ao plano que contém a face $[ADGE]$

12.2. Como o bloco deste monumento resultam de um corte de um prisma quadrangular reto, as arestas laterais são perpendiculares às arestas da base, pelo que os segmentos $[AB]$ e $[AE]$ são perpendiculares e assim, o triângulo $[ABE]$ é retângulo em A.

Logo, o lado $[EB]$ é a hipotenusa do triângulo e, relativamente ao ângulo AEB, o lado $[AB]$ é o cateto oposto, pelo que, usando a definição de seno, temos:

$$\text{sen}\,(A\hat{E}B) = \frac{\overline{AB}}{\overline{BE}} \Leftrightarrow \text{sen}\,35° = \frac{2}{\overline{BE}} \Leftrightarrow \overline{BE} = \frac{2}{\text{sen}\,35°}$$

Como $\text{sen}\,35° \approx 0{,}5736$, calculando, em metros, a medida do comprimento de $[EB]$ e arredondando o resultado às unidades, vem

$$\overline{BE} \approx \frac{2}{0{,}5736} \approx 3 \text{ m}$$

12.3. Como $\overline{DA} = \overline{DC} = 2$ m, então temos que a área da base da pirâmide $[ACDH]$, é

$$A_{[ACD]} = \frac{2 \times 2}{2} = 2 \text{ m}^2$$

Como a altura $\overline{DH} = 5$m, então calculando o volume da pirâmide $[ACDH]$, e arredondando o resultado às décimas, vem

$$V_{[ACDH]} = \frac{1}{3} \times A_{[ACD]} \times \overline{DH} = \frac{1}{3} \times 2 \times 5 = \frac{10}{3} \approx 3{,}3 \text{ m}^3$$