# Prova final de Matemática - 3.º ciclo (2009, 2.ª chamada)

Proposta de resolução

1.

1.1. Considerando que não queremos que o automóvel preto seja atribuído à mãe, e selecionando, ao acaso, um elemento da família, temos 2 casos favoráveis (o pai e o filho) num total de 3 casos possíveis (a mãe, o pai e o filho).

Assim, recorrendo à Lei de Laplace, vem que a probabilidade de o automóvel preto não ser atribuído à mãe é:

$$p = \frac{2}{3}$$

Resposta: **Opção** $\frac{2}{3}$

1.2. Considerando que um dos elementos da família (por exemplo a mãe) tem 3 hipóteses diferentes de escolher a cor, então o elemento seguinte (por exemplo o pai) já só pode escolher de entre 2 cores possíveis e o último elemento a escolher(por exemplo o filho) terá de selecionar a cor restante - só tem 1 escolha possível.

Assim, o número de maneiras diferentes podem ser distribuídos os automóveis, um por cada um dos três elementos da família é

$$3 \times 2 \times 1 = 6$$

Ou, fazendo uma lista de contagem, temos:

| Mãe | Pai | Filho |
|---|---|---|
| cinzento | branco | preto |
| cinzento | preto | branco |
| branco | cinzento | preto |
| branco | preto | cinzento |
| preto | cinzento | branco |
| preto | branco | cinzento |

2. Como o consumo médio, por mês, nos 4 primeiros meses do ano foi igual ao dos 3 primeiros meses, sabemos que o consumo do quarto mês foi exatamente igual ao consumo médio dos 3 primeiros meses.

Assim, calculando o consumo médio dos 3 primeiros meses, vem:

$$\overline{x} = \frac{170 + 150 + 160}{3} = \frac{480}{3} = 160 \text{ litros}$$

Logo, sabemos que o consumo de gasolina do automóvel, no mês de Abril (o quarto mês) foi de 160 litros.

3. Como o maior número é múltiplo do menor, então é divisível pelo menor, ou seja, o menor número é divisor do maior.

   Como o maior divisor de qualquer número é o próprio número, o maior divisor do menor número é o menor número.

   Assim, vem que o maior divisor comum aos dois números é o menor dos dois números.

   Resposta: **Opção** O menor desses dois números

4. Como a empresa ofereceu 11 bilhetes em cada dia, o número de bilhetes oferecidos é um múltiplo de 11. Assim, dividindo os 364 bilhetes em grupos de 11, obtemos:

$$\frac{364}{11} \approx 33{,}09$$

   Pelo que a empresa ofereceu 33 grupos de 11 bilhetes, ou seja, ofereceu 11 bilhetes durante 33 dias.

   Podemos verificar que, no final sobrou apenas 1 bilhete, porque:

$$33 \times 11 = 363 \text{ , e assim, temos que } 364 = 33 \times 11 + 1$$

5. Como conjunto $A = [\sqrt{2}, +\infty[$, um número pertence ao conjunto $A$ se for maior ou igual a $\sqrt{2}$

   Assim podemos verificar que:

   - $1{,}4 \times 10^{-2} = 0{,}014$, logo $0{,}014 < \sqrt{2}$, pelo que $1{,}4 \times 10^{-2} \notin A$
   - $1{,}4 \times 10^{0} = 1{,}4$, logo $1{,}4 < \sqrt{2}$, pelo que $1{,}4 \times 10^{0} \notin A$
   - $1{,}4 \times 10^{-1} = 0{,}14$, logo $0{,}14 < \sqrt{2}$, pelo que $1{,}4 \times 10^{-1} \notin A$

   E ainda que $1{,}4 \times 10 = 14$, logo $14 > \sqrt{2}$, pelo que $1{,}4 \times 10 \in A$

   Resposta: **Opção** $1{,}4 \times 10$

6. Resolvendo a inequação, temos:

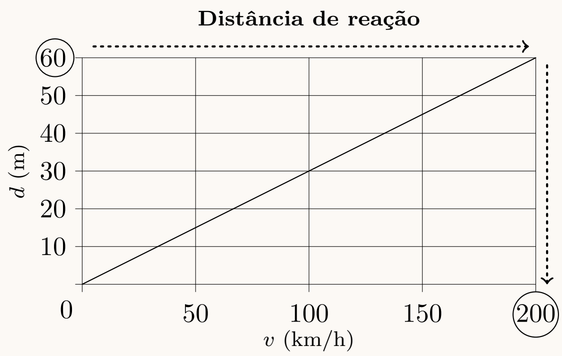
$$\frac{x+1}{3} \leq 2x \Leftrightarrow x+1 \leq 2x \times 3 \Leftrightarrow x+1 \leq 6x \Leftrightarrow x - 6x \leq -1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -5x \leq -1 \Leftrightarrow 5x \geq 1 \Leftrightarrow x \geq \frac{1}{5}$$

   C.S.$=\left[\frac{1}{5}, +\infty\right[$

7.

7.1. Identificando o ponto relativo ao tempo de reação de 60 metros, verificamos que a velocidade correspondente é de 200 km/h (ver gráfico ao lado)




7.2. Como o gráfico da função é uma reta que contém a origem do referencial, sabemos que as grandezas $v$ e $d$ estão relacionadas através de uma função de proporcionalidade direta, cuja expressão algébrica é da forma $d = k \times v$, com $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Assim, verificando, por exemplo, que o ponto de coordenadas (100,30) pertence ao gráfico da função, ou seja, se $v = 100$, então $d = 30$, substituindo na expressão anterior, podemos determinar o valor da constante de proporcionalidade, $k$,

$$30 = k \times 100 \Leftrightarrow \frac{30}{100} = k \Leftrightarrow \frac{3}{10} = k$$

Pelo que a expressão que representa a relação entre $v$ e $d$ é $v = \dfrac{3}{10}d$

Resposta: **Opção** $v = \dfrac{3}{10}d$

8. A velocidade de condução ($v$) não é inversamente proporcional ao ângulo de visão grandezas ($a$) porque o produto dos valores correspondentes não é constante, ou seja, não se verifica $a \times v = k,\ k \in \mathbb{R}$

Por exemplo, verificando para os dois primeiros pares de valores correspondentes, temos:

$$100 \times 40 = 4000 \text{ e } 75 \times 70 = 5250$$

Como $4000 \neq 5250$ podemos afirmar que as grandezas não são inversamente proporcionais.

9. Designando por $x$ o número de automóveis estacionados na praceta, e por $y$ o número de motos, como sabemos que o número de automóveis é o triplo do número das motos, logo temos que:

$$x = 3y$$

Como cada automóvel tem 4 rodas, $x$ automóveis têm $x \times 4$, ou $4x$ rodas. Da mesma forma, como cada mota tem 2 rodas, $y$ motas têm $2y$ rodas. Assim, como na praceta estão $x$ automóveis, $y$ motas e 70 rodas, temos que

$$4x + 2y = 70$$

Assim, podemos escrever um sistema e determinar os valores de $x$ e $y$:

$$\begin{cases} x = 3y \\ 4x + 2y = 70 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3y \\ 4(3y) + 2y = 70 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3y \\ 12y + 2y = 70 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3y \\ 14y = 70 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3y \\ y = \dfrac{70}{14} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3(5) \\ y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 15 \\ y = 5 \end{cases}$$

Assim, verificamos que na praceta estão estacionados 15 automóveis e 5 motos.

10. Escrevendo a equação na fórmula canónica, e usando a fórmula resolvente, vem:

$$6x^2 + 2x = 5 + x \Leftrightarrow 6x^2 + 2x - 5 - x = 0 \Leftrightarrow 6x^2 + 2x - x - 5 = 0 \Leftrightarrow 6x^2 + x - 5 = 0 \Leftrightarrow$$

$(a = 6,\ b = 1 \text{ e } c = -5)$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4(6)(-5)}}{2(6)} \Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 120}}{12} \Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{121}}{12} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-1 + 11}{12} \vee x = \frac{-1 - 11}{12} \Leftrightarrow x = \frac{10}{12} \vee x = \frac{-12}{12} \Leftrightarrow x = \frac{5}{6} \vee x = -1$$

C.S.$=\left\{-1, \frac{5}{6}\right\}$

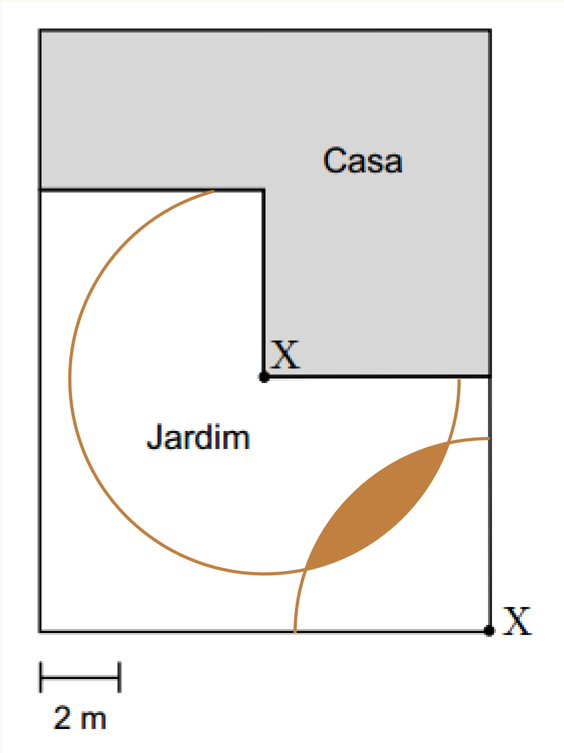
11. Como a altura é medida na perpendicular ao solo, o triângulo formado pela trave, pela altura e pela parte do solo situada por debaixo da trave, é um triângulo retângulo em que a trave é a hipotenusa, e relativamente ao ângulo assinalado, a altura é o cateto oposto, pelo que, usando a definição de seno, temos:

$$\text{sen } 40^\circ = \frac{a}{2{,}8} \Leftrightarrow \text{sen } 40^\circ \times 2{,}8 = a$$

Como $\text{sen}\, 40^\circ \approx 0{,}64$, calculando, em metros, a altura máxima a que a cadeira pode estar, e arredondando o resultado às décimas, vem:

$$a \approx 0{,}64 \times 2{,}8 \approx 1{,}79 \approx 1{,}8 \text{ m}$$

12.

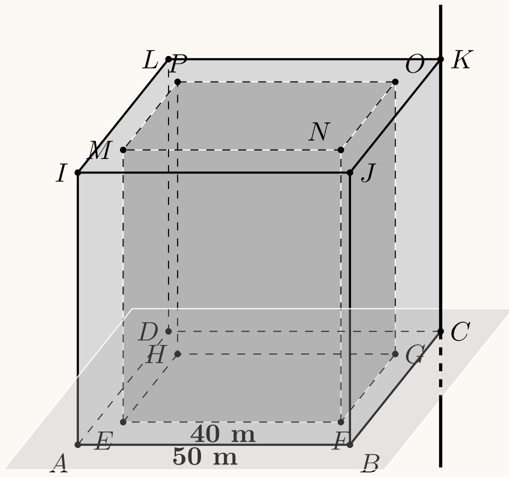


13.

13.1. O volume, em centímetros cúbicos, da parte de cimento $(V)$ da floreira pode ser obtido como a diferença dos volumes do cubo e do o prisma quadrangular:

$$V = V_{cubo} - V_{prisma} = \overline{AB}^3 - \overline{EF}^2 \times \overline{GO} = 50^3 - 40^2 \times 50 = 125\,000 - 80\,000 = 45\,000 \text{ cm}^3$$

13.2. Como o prisma é reto, e o cubo também é um prisma reto, qualquer reta que contenha uma aresta lateral do prisma (ou uma aresta do cubo que não pertença às faces $[ABCD]$ e $[IJKL]$é perpendicular ao plano que contém a base da floreira.




Assim, a reta pretendida pode ser, por exemplo:

a reta $CK$

14.

14.1. Como o diâmetro $[BD]$ é perpendicular ao diâmetro $[AC]$, o ângulo $AOB$ é reto, e como é um ângulo ao centro, o arco correspondente tem a mesma amplitude, ou seja:

$$\overset{\frown}{AB} = A\hat{O}B = 90^\circ$$

Como o ângulo $ACB$ é o ângulo inscrito relativo ao arco $AB$, a amplitude do ângulo é metade da amplitude do arco:

$$A\hat{C}B = \frac{\overset{\frown}{AB}}{2} = \frac{90}{2} = 45^\circ$$

14.2. As rotações de centro em $O$ e amplitudes $180^\circ$ ou $-180^\circ$ transformam o quadrado $[OHDE]$ no quadrado $[OFBG]$, assim como a simetria axial de eixo $AC$

O transformado do quadrado $[OHDE]$ simetria axial de eixo $DB$ é o próprio quadrado $[OHDE]$, porque a diagonal $[OD]$ é um eixo de simetria do quadrado.

Resposta: **Opção** simetria axial de eixo DB.

14.3. Como $[OFBG]$ é um quadrado, o ângulo $OFB$ é reto e o triângulo $[OFB]$ é retângulo em $G$, pelo que podemos recorrer ao Teorema de Pitágoras:

$$\overline{OB}^2 = \overline{OF}^2 + \overline{FB}^2$$

Como $[OF]$ e $[FB]$ são lados de um quadrado temos que $\overline{OF} = \overline{FB}$, e assim

$$\overline{OB}^2 = \overline{OF}^2 + \overline{FB}^2 \Leftrightarrow \overline{OB}^2 = \overline{OF}^2 + \overline{OF}^2 \Leftrightarrow \overline{OB}^2 = 2 \times \overline{OF}^2$$

Como $[OC]$ e $[OB]$ são raios de uma circunferência temos que $\overline{OB} = \overline{OC} = 2$, pelo que

$$\overline{OB}^2 = 2 \times \overline{OF}^2 \Leftrightarrow 2^2 = 2 \times \overline{OF}^2 \Leftrightarrow \frac{4}{2} = \overline{OF}^2 \Leftrightarrow 2 = \overline{OF}^2 \underset{\overline{OF}>0}{\Rightarrow} \sqrt{2} = \overline{OF}$$

E assim, vem que o valor exato, em centímetros, da medida do lado do quadrado $[OFBG]$ é $\sqrt{2}$