Prova final de Matemática - 3.º ciclo (2015, 1.ª fase)

Proposta de resolução

Caderno 1

1.

1.1. Os alunos que têm uma altura inferior a 155 cm são os que medem 150 cm ou 154 cm.
Assim, o número de alunos com altura inferior a 155 cm é $6+3=9$

Logo, existem 9 casos favoráveis e 25 casos possíveis, pelo que, recorrendo à Regra de Laplace, a probabilidade de um aluno escolhido ao acaso ter altura inferior a 155 cm é

$$p=\frac{9}{25}=0{,}36$$

a que corresponde uma probabilidade de 36%

1.2. Como o valor exato da média das alturas é 158 cm, temos que

$$\frac{150\times 6+154\times 3+156\times 2+160\times 10+a\times 4}{25}=158 \Leftrightarrow 3274+4a=158\times 25 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4a=3950-3274 \Leftrightarrow a=\frac{676}{4} \Leftrightarrow a=169$$

2. Como o terraço foi pavimentado com 400 ladrilhos quadrados, cada um com 9 dm^2 de área, a área do terraço (A_T) é dada por

$$A_T=400\times 9=3600\ \text{dm}^2$$

Como o mesmo terraço, pode ser pavimentado com 225 ladrilhos, iguais entre si, a área (A_L) de cada um destes ladrilhos pode ser calculada como

$$A_L=\frac{3600}{225}=16\ \text{dm}^2$$

Como estes ladrilhos são quadrados, o comprimento dos lados (l_L) de cada um destes ladrilhos é

$$l_L=\sqrt{16}=4\ \text{dm}$$

3. O conjunto $A\cap\mathbb{Q}$ é o conjunto dos números que pertencem simultaneamente aos dois conjuntos, ou seja, os elementos do conjunto A que são números racionais.
Assim, como $\sqrt{5}$ e π são dízimas infinitas não periódicas, $\sqrt{6{,}25}=2{,}5$ e $\sqrt[3]{125}=5$, temos que apenas $\sqrt{6{,}25}$ e $\sqrt[3]{125}$ são números racionais, pelo que

$$A\cap\mathbb{Q}=\left\{\sqrt{6{,}25},\sqrt[3]{125}\right\}$$

Resposta: **Opção D**

4.

4.1. Como o lado $[AB]$ é o lado que se opõe ao ângulo reto, no triângulo $[ABD]$, o lado correspondente, no triângulo $[ABC]$, é também o lado que se opõe ao ângulo reto, ou seja, o lado $[AC]$

4.2. Tendo em conta os dados do enunciado podemos calcular A_{SC}, a área do semicírculo, como

$$A_{SC} = \frac{\pi r^2}{2} = \frac{\pi \times 5^2}{2} = \frac{25\pi}{2}\ \text{cm}^2$$

Podemos igualmente calcular $A_{[ABC]}$, a área do triângulo $[ABC]$, observando que a medida da base é o dobro do raio ($\overline{AC} = 2 \times r = 2 \times 5 = 10$ cm), pelo que

$$A_{[ABC]} = \frac{\overline{AC} \times \overline{BD}}{2} = \frac{10 \times 4}{2} = \frac{40}{2} = 20\ \text{cm}^2$$

E assim, A_S, a área sombreada é a diferença das áreas do semicírculo e do triângulo $[ABC]$, pelo que, fazendo os cálculos e arredondando o resultado às décimas, vem:

$$A_S = A_{SC} - A_{[ABC]} = \frac{25\pi}{2} - 20 \approx 19{,}3\ \text{cm}^2$$

5.

5.1. O volume total do sólido (V_T) pode ser calculado como a soma dos volumes da semiesfera (V_{SE}) e do cilindro (V_C).
Calculando o volume da semiesfera, temos:

$$V_{SE} = \frac{\frac{4}{3}\pi r^3}{2} = \frac{4\pi \times 3^3}{6} = \frac{4\pi \times 27}{6} = \frac{4\pi \times 27}{6} = 18\pi\,\text{cm}^3$$

Podemos calcular $A_\circ$, a área da base do cilindro, como

$$A_\circ = \pi r^2 = \pi \times 3^2 = 9\pi\,\text{cm}^2$$

Assim, designado por $\overline{BC}$ a altura do cilindro, o volume do cilindro V_C, é dado por

$$V_C = A_\circ \times h = 9\pi \times \overline{BC}\,\text{cm}^3$$

Logo, como o volume total é 285 cm^3, temos que

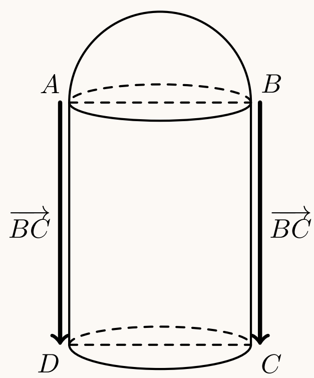
$$V_T = V_{SE} + V_C \Leftrightarrow 285 = 18\pi + 9\pi \times \overline{BC} \Leftrightarrow 285 - 18\pi = 9\pi \times \overline{BC} \Leftrightarrow \frac{285 - 18\pi}{9\pi} = \overline{BC}$$

Pelo que o valor da altura do cilindro, $\overline{BC}$, arredondado às décimas é de

$$\overline{BC} \approx 8{,}1\,\text{cm}$$

5.2. A translação associada ao vetor $\overrightarrow{BC}$ transforma o ponto B no ponto C, pelo que, da mesma forma, transforma o ponto A no ponto D

Resposta: **Opção D**

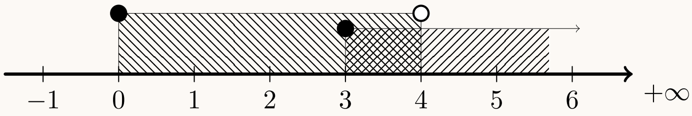


Caderno 2

6. Usando as regras operatórias de potências, temos que:

$$\frac{3^{21}\times 3^{-7}}{(3^2)^5} = \frac{3^{21+(-7)}}{3^{2\times 5}} = \frac{3^{14}}{3^{10}} = 3^{14-10} = 3^4$$

7. Representando o conjunto $A\cap B$ na reta real, temos:



Assim temos que $A\cap B = [0{,}4[\cup[3,+\infty[=[3{,}4[$

Resposta: **Opção C**

8.
- Na turma A, a classificação com maior frequência relativa é 5, o que significa que a moda é 5.
- Na turma B, a classificação com maior frequência relativa é 4, o que significa que a moda é 4.
- Na turma A, as classificações iguais ou inferiores a 3, são $10+10+20=40\%$ do total e as classificações iguais ou inferiores a 4 são $10+10+20+20=60\%$ do total, o que significa que a mediana é 4.
- Na turma B, as classificações iguais ou inferiores a 2, são $20+20=40\%$ do total e as classificações iguais ou inferiores a 3 são $20+20+20=60\%$ do total, o que significa que a mediana é 3.

Resposta: **Opção D**

9. Resolvendo a equação, vem:

$$\frac{x(x-4)}{4} = 9-x \Leftrightarrow \frac{x^2-4x}{4} = 9-x \Leftrightarrow \frac{x^2-4x}{4} = \frac{9-x}{1}_{(4)} \Leftrightarrow \frac{x^2-4x}{4} = \frac{36-4x}{4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2-4x = 36-4x \Leftrightarrow x^2-4x+4x=36 \Leftrightarrow x^2=36 \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{36} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=\pm 6 \Leftrightarrow x=6 \vee x=-6$$

C.S.$=\{-6{,}6\}$

10. Resolvendo a inequação, temos

$$1-(3x-2) < 4+x \Leftrightarrow 1-3x+2 < 4+x \Leftrightarrow -3x-x < 4-2-1 \Leftrightarrow -4x < 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4x > -1 \Leftrightarrow x > \frac{-1}{4} \Leftrightarrow x > -\frac{1}{4}$$

C.S.$=\left]-\frac{1}{4},+\infty\right[$

11. Como x é o número de narizes vermelhos vendidos e y é o número de ímanes vendidos pela companhia de circo, nesse dia, afirmar que ≪*foram vendidos 96 objetos*≫ pode ser traduzido por $x + y = 96$; e se receberam ≪*um total de 260 euros*, este montante resultou da soma de 2 euros por cada nariz vermelho vendido e de 3 euros por cada iman vendido, pelo que podemos traduzir esta relação por $2x + 3y = 260$

    Assim, um sistema de equações que permite determinar o número de narizes vermelhos vendidos e o número de ímanes vendidos, pode ser

$$\begin{cases} x + y = 96 \\ \\ 2x + 3y = 260 \end{cases}$$

12.

12.1. Como a função f é uma função de proporcionalidade direta, pode ser definida por uma expressão algébrica da forma $f(x) = kx$, com $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Como $f(2) = 4$, temos que

$$4 = k \times 2 \Leftrightarrow \frac{4}{2} = k \Leftrightarrow 2 = k$$

Assim, vem que $f(x) = 2x$, pelo que

$$f(1) = 2 \times 1 = 2$$

12.2. Como $f(2) = 4$, o ponto de coordenadas (2,4) pertence ao gráfico da função f.

Como $g(2) = 2^2 = 4$, o ponto de coordenadas (2,4) também pertence ao gráfico da função g.

Assim, temos que o ponto A pertence ao gráfico da função f (a reta) e também ao gráfico da função g (a parábola).

Resposta: **Opção A**

13. Como a função h é definida por $h(x) = x + 2$, o seu gráfico é uma reta de declive 1. Como a reta r é uma reta de declive negativo, não pode ser o gráfico da função h.

    Como a função h é definida por $h(x) = x + 2$, temos que $h(0) = 0 + 2 = 2$, ou seja, o ponto de coordenadas (0,2) pertence ao gráfico de h, logo a reta s não pode ser o gráfico de h, porque o ponto da reta s que tem abcissa zero, tem ordenada negativa.

14. Como o triângulo $[ABC]$ é um triângulo retângulo em C, podemos, recorrer ao Teorema de Pitágoras, e afirmar que

$$\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2$$

Logo, substituindo os valores dados, e resolvendo a equação, vem que:

$$(a-1)^2 = (\sqrt{7})^2 + (a-2)^2 \Leftrightarrow a^2 - 2a + 1^2 = 7 + a^2 - 2 \times 2a + 2^2 \Leftrightarrow a^2 - 2a + 1 = 7 + a^2 - 4a + 4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a^2 - 2a - a^2 + 4a = 7 + 4 - 1 \Leftrightarrow 2a = 10 \Leftrightarrow a = \frac{10}{2} \Leftrightarrow a = 5$$

15. Uma esfera é o conjunto de pontos do espaço cuja distância a um ponto fixo é igual **ou inferior** ao raio.
Uma circunferência é o conjunto de pontos **do plano** cuja distância a um ponto fixo é igual ao raio.
Uma circunferência é o conjunto de pontos **do plano** cuja distância a um ponto fixo é igual **ou inferior** ao raio.

Uma **superfície esférica** é o conjunto de pontos do espaço cuja distância a um ponto fixo é igual ao raio, pelo que o lugar geométrico dos pontos do espaço cuja distância ao ponto A é igual a 5 cm é uma superfície esférica de centro em A e raio 5 cm.

Resposta: **Opção B**

16.

16.1. Como o triângulo $[ABC]$ é isósceles, $\overline{AB} = \overline{BC}$.
Como, num triângulo a lados iguais se opõem ângulos iguais, temos que $B\hat{C}A = A\hat{C}B$, e como estes são ângulos inscritos, os respetivos arcos também são iguais, ou seja $\overset{\frown}{CB} = \overset{\frown}{BA}$

Como $\overset{\frown}{AC} = 100°$ e $\overset{\frown}{AC} + \overset{\frown}{CB} + \overset{\frown}{BA} = 360°$, temos que

$$\overset{\frown}{AC} + \overset{\frown}{CB} + \overset{\frown}{BA} = 360 \Leftrightarrow 100 + 2 \times \overset{\frown}{CB} = 360 \Leftrightarrow 2 \times \overset{\frown}{CB} = 360 - 100 \Leftrightarrow \overset{\frown}{CB} = \frac{260}{2} \Leftrightarrow \overset{\frown}{CB} = 130$$

Como o ângulo CAB é o ângulo inscrito relativo ao arco CB, temos que $2 \times C\hat{A}B = \overset{\frown}{CB}$, pelo que

$$C\hat{A}B = \frac{\overset{\frown}{CB}}{2} \Leftrightarrow C\hat{A}B = \frac{130}{2} \Leftrightarrow C\hat{A}B = 65°$$

16.2. O triângulo $[ABD]$ é retângulo e $[AD]$ e $[BD]$ são os catetos.
Assim, como $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\overline{AD}}{\overline{BD}}$, temos que $[AD]$ é o cateto oposto ao ângulo α, e $[BD]$ é o cateto adjacente, pelo que o ângulo α é o ângulo ABD