Prova final de Matemática - 3.º ciclo (2015, 2.ª fase)

Proposta de resolução

Caderno 1

1. Calculando o valor médio das temperaturas registadas, temos

$$\frac{19\times 4+20\times 3+23\times 3+24\times 3+25\times 7}{20}=\frac{452}{20}=22{,}6$$

Resposta: **Opção B**

2.

2.1. O triângulo $[ABO]$ é retângulo em B. Como, relativamente ao ângulo BAO, o lado $[OB]$ é o cateto oposto e o lado $[OA]$ é a hipotenusa, usando a definição de seno, temos:

$$\operatorname{sen} 25^\circ=\frac{\overline{OB}}{\overline{OA}} \Leftrightarrow \operatorname{sen} 25^\circ=\frac{1}{\overline{OA}} \Leftrightarrow \overline{OA}=\frac{1}{\operatorname{sen} 25^\circ}$$

Como $\operatorname{sen} 25^\circ \approx 0{,}423$, vem que:

$$\overline{OA}\approx\frac{1}{0{,}423}\approx 2{,}364$$

Assim, a medida r do raio do círculo de raio $[AD]$, é

$$r=\overline{OA}\approx 2{,}364$$

Pelo que, calculando a área A_S, do semícirculo de raio $[AD]$ em centímetros quadrados, arredondados às décimas, vem

$$A_S=\frac{\pi r^2}{2}\approx\frac{\pi\times 2{,}364^2}{2}\approx 8{,}8 \text{ cm}^2$$

2.2. Sabendo que $C\hat{A}D=B\hat{A}O=25^\circ$, e como o ângulo CAD é o ângulo inscrito relativo ao arco CB, temos que

$$\overset{\frown}{CD}=2\times C\hat{A}D \Leftrightarrow \overset{\frown}{CD}=2\times 25 \Leftrightarrow \overset{\frown}{CD}=50^\circ$$

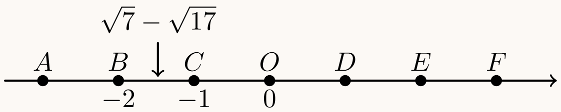
Como AD é o arco de uma semicircunferência, $\overset{\frown}{AD}=180^\circ$, e assim, vem que

$$\overset{\frown}{AD}=\overset{\frown}{AC}+\overset{\frown}{CD} \Leftrightarrow 180=\overset{\frown}{AC}+50 \Leftrightarrow 180-50=\overset{\frown}{AC} \Leftrightarrow \overset{\frown}{AC}=130^\circ$$

3. Como $\sqrt{7}-\sqrt{17} \approx -1{,}48$, temos que

$$-2 < \sqrt{7}-\sqrt{17} < -1$$

Assim, o ponto que representa o número $\sqrt{7}-\sqrt{17}$ está localizado na reta real, entre os pontos $C(-1)$ e $B(-2)$, ou seja, pertence ao segmento de reta $[BC]$:



Resposta: **Opção B**

4. Fazendo a divisão na calculadora e escrevendo o resultado em notação científica, vem

$$\frac{2015}{4} = 503{,}75 = 5{,}0375 \times 100 = 5{,}0375 \times 10^2$$

5. Como a função f é uma função de proporcionalidade inversa, então $f(x) = \frac{k}{x}$, $k \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$
Como o ponto $(2;5)$ pertence ao gráfico de f, então $f(2)=5$, e assim, temos que

$$5 = \frac{k}{2} \Leftrightarrow 5\times 2 = k \Leftrightarrow 10 = k$$

E assim, podemos calcular $f(3{,}2) = \frac{10}{3{,}2} = 3{,}125$
Ou seja o ponto $(3{,}2;3{,}125)$ pertence ao gráfico de f, pelo que a ordenada do ponto do gráfico que tem de abcissa 3,2 é 3,125

6.

6.1. Como a altura do prisma $[LKNMHGJI]$ é $\frac{2}{3}$ da altura dos outros dois prismas, podemos considerar o sólido composto por 8 prismas com alturas e bases iguais entre si (como se ilustra na figura seguinte), e cujas bases são também iguais às bases dos três prismas descritos no enunciado, ou seja, bases com área s

Assim, cada um destes 8 prismas tem $\frac{1}{8}$ do volume do sólido:

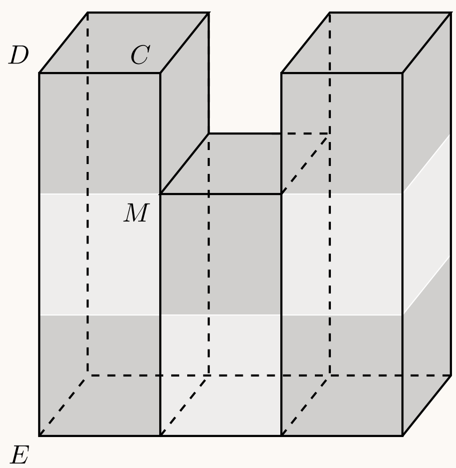
$$\frac{248}{8} = 31 \text{ cm}^3$$

Temos ainda que a altura de cada um destes 8 prismas é:

$$\overline{CM} = \frac{\overline{DE}}{3} = \frac{9}{3} = 3 \text{ cm}$$

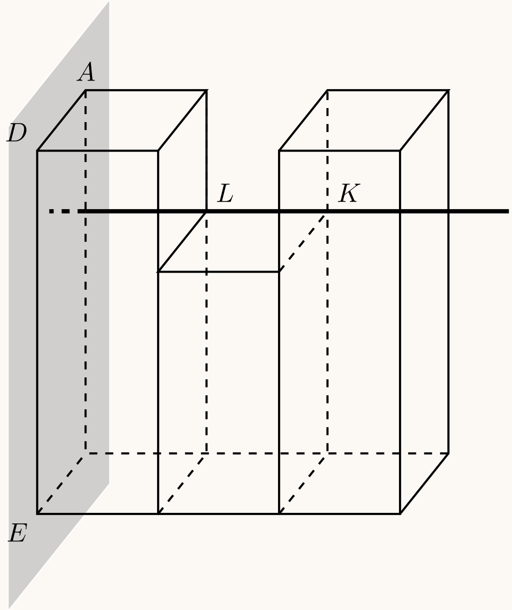
Assim, o volume (V_8) de cada um destes 8 prismas pode ser calculado como $V_8 = s \times \overline{CM}$, e substituindo os valores calculados antes vem

$$V_8 = s \times \overline{CM} \Leftrightarrow 31 = s \times 3 \Leftrightarrow \frac{31}{3} = s$$



Pelo que, arredondando a área s das bases dos prismas às décimas (em centímetros quadrados) é

$$s = \frac{31}{3} \approx 10{,}3 \text{cm}^2$$



6.2. Usando as letras da figura podemos definir seis retas perpendiculares ao plano ADE, por exemplo,

a reta LK

Caderno 2

7.

7.1. Considerando o acontecimento A: «sair o número oito», o acontecimento contrário é

$$\overline{A}: \text{«não sair o número oito»}$$

pelo que, como existem 4 cartões (4 casos possíveis) em que 3 deles não têm o número 8 (existem 3 casos favoráveis), calculando a probabilidade pela Regra de Laplace, temos:

$$P\left(\overline{A}\right) = \frac{3}{4}$$

7.2. Como a retirada dos dois cartões é feita simultaneamente, o mesmo cartão não pode ser retirado por duas vezes, e não existe uma ordenação dos cartões, pelo que podemos organizar todas os produtos que é possível obter com recurso a uma tabela,

×	2	5	7	8
2	–	10	14	16
5	–	–	35	40
7	–	–	–	56

Assim, podemos observar que existem 6 produtos possíveis, dos quais apenas 1 é ímpar, ou seja, calculando a probabilidade pela Regra de Laplace, e apresentado o resultado na forma de fração, temos que

$$p = \frac{1}{6}$$

8. Usando as regras operatórias de potências, e somando as frações obtidas, temos que:

$$\left(2^{10}\right)^{-2} \times 2^{20} + 3^{-1} = 2^{10\times(-2)} \times 2^{20} + \frac{1}{3^1} = 2^{-20} \times 2^{20} + \frac{1}{3} = 2^{-20+20} + \frac{1}{3} = 2^0 + \frac{1}{3} = 1 + \frac{1}{3} = \frac{3}{3} + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$$

9. Escrevendo a equação na fórmula canónica, e usando a fórmula resolvente, vem:

$$\frac{x^2+3}{4} + \frac{x-7}{2} = 1 \Leftrightarrow \frac{x^2+3}{4} + \frac{x-7}{2}_{(2)} = \frac{1}{1}_{(4)} \Leftrightarrow \frac{x^2+3}{4} + \frac{2x-14}{4} = \frac{4}{4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2+3+2x-14 = 4 \Leftrightarrow x^2+3+2x-14-4 = 0 \Leftrightarrow x^2+2x-15 = 0 \Leftrightarrow$$

$(a = 1,\ b = 2 \text{ e } c = -15)$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4(1)(-15)}}{2(1)} \Leftrightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{4+60}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{64}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-2+8}{2} \vee x = \frac{-2-8}{2} \Leftrightarrow x = \frac{6}{2} \vee x = \frac{-10}{2} \Leftrightarrow x = 3 \vee x = -5$$

C.S.$=\{-5{,}3\}$

10. Resolvendo a inequação, temos

$$-3x \geq 6 \Leftrightarrow 3x \leq -6 \Leftrightarrow x \leq \frac{-6}{3} \Leftrightarrow x \leq -2$$

C.S.$=]-\infty, -2]$

Resposta: **Opção A**

11. Como x é o preço, em euros, de cada mosaico quadrado e y é o o preço, em euros, de cada mosaico octogonal, podemos analisar separadamente as duas composições:

- primeira composição: tem um custo de 30 euros, sendo composta por 5 mosaicos quadrados e 4 mosaicos octogonais, logo, temos que
$$5x + 4y = 30$$
- segunda composição: tem um custo de 33 euros, sendo composta por 4 mosaicos quadrados e 5 mosaicos octogonais, logo, temos que
$$4x + 5y = 33$$

Assim, um sistema de equações que permite determinar o preço de cada mosaico quadrado e o preço de cada mosaico octogonal é

$$\begin{cases} 5x + 4y = 30 \\ \\ 4x + 5y = 33 \end{cases}$$

12.

12.1. Como a ordenada do ponto B é 2, a equação da reta é da forma $y = mx + 2$
Pela observação da figura podemos afirmar que a reta tem declive negativo, ao contrário do que acontece com as equações das opções (A) e (B).
Assim, a única equação, de entre as quatro opções apresentadas, em que as duas condições anteriores são verificadas é a equação $y = -x + 2$

Resposta: **Opção C**

12.2. Calculado o valor de $f(\sqrt{3})$ vem:

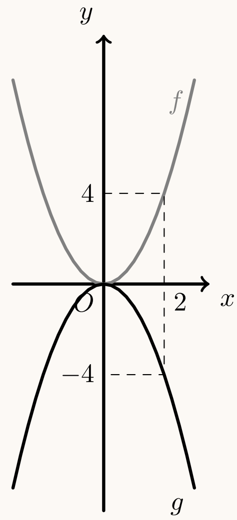
$$f(\sqrt{3}) = \left(\sqrt{3}\right)^2 = 3$$

Considerando o gráfico da função g como o simétrico do gráfico da função f relativamente ao eixo Ox, podemos observar que para o mesmo objeto, as imagens por f e por g são simétricas (ver figura ao lado), ou seja:

$$g(2) = -f(2) = -\left(2^2\right) = -4$$

E assim, temos que:

$$f(\sqrt{3}) + g(2) = 3 + (-4) = -1$$

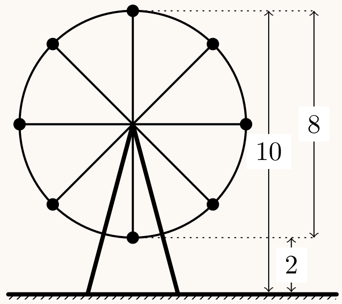


13. Pela observação do gráfico podemos afirmar que a distância d, em metros, da cadeira n.º 1 ao chão, durante a primeira volta variou entre os 2 metros (no ponto mais baixo) e os 10 metros (no ponto mais alto).

Assim, o diâmetro da roda é a diferença das alturas nos pontos mais alto e mais baixo, ou seja,

$$10 - 2 = 8\text{ m}$$

Resposta: **Opção C**



14. A área da região sombreada, A_S, pode ser calculada como a diferença entre as áreas dos quadrados de lado $[BC]$ e $[AE]$
Assim, temos que

$$A_S = \overline{BC}^2 - \overline{AE}^2 = (a+1)^2 - (a-1)^2 = a^2 + 2\times a\times 1 + 1^2 - \left(a^2 - 2\times a\times 1 + 1^2\right) = a^2 + 2a + 1 - \left(a^2 - 2a + 1\right) =$$

$$= a^2 + 2a + 1 - a^2 + 2a - 1 = a^2 - a^2 + 2a + 2a + 1 - 1 = 2a + 2a = 4a$$

15.

15.1. Como o triângulo $[ABC]$ é um triângulo retângulo em A, podemos, recorrer ao Teorema de Pitágoras, e afirmar que

$$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2$$

Logo, substituindo os valores dados, vem que:

$$\overline{BC}^2 = 6^2 + 9^2 \Leftrightarrow \overline{BC}^2 = 36 + 81 \Leftrightarrow \overline{BC}^2 = 117 \underset{\overline{BC}>0}{\Rightarrow} \overline{BC} = \sqrt{117}\text{ cm}$$

Resposta: **Opção B**

15.2. Como o quadrilátero $[AFED]$ é um retângulo e o ponto F pertence ao segmento de reta $[AB]$ podemos afirmar que os ângulos BAC e BFE são ambos retos ($B\hat{A}C = B\hat{F}E$).
Como os ângulos ABC e FBE são coincidentes também são iguais ($A\hat{B}C = F\hat{B}E$).
Assim, pelo critério AA (ângulo-ângulo) podemos afirmar que os triângulos $[ABC]$ e $[FBE]$ são semelhantes.

15.3. Como os triângulos $[ABC]$ e $[FBE]$ são semelhantes, podemos afirmar que a razão entre lados correspondentes é igual, ou seja,

$$\frac{\overline{FE}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{FB}}{\overline{AB}}$$

Logo, substituindo os valores dados, vem que:

$$\frac{\overline{FE}}{9} = \frac{4}{6} \Leftrightarrow \overline{FE} = \frac{9 \times 4}{6} \Leftrightarrow \overline{FE} = \frac{36}{6} \Leftrightarrow \overline{FE} = 6$$

Como $\overline{AB} = \overline{AF} + \overline{FB}$
Temos que

$$6 = \overline{AF} + 4 \Leftrightarrow 6 - 4 = \overline{AF} \Leftrightarrow 2 = \overline{AF}$$

E assim, como $\overline{AD} = \overline{FE}$ e $\overline{AF} = \overline{DE}$ o perímetro do retângulo $[AFED]$ é:

$$P_{[AFED]} = 2 \times \overline{FE} + 2 \times \overline{AF} = 2 \times 6 + 2 \times 2 = 12 + 4 = 16 \text{ cm}$$