

Prova final de Matemática - 3.º ciclo (2017, 2.ª fase)

Proposta de resolução



Caderno 1

1. Como no histograma estão representados todos os alunos a probabilidade de um aluno, escolhido ao acaso, ter uma massa corporal inferior a 45 kg, é exatamente a frequência relativa da classe $[40,45[$, ou seja, o valor de k

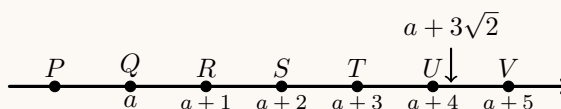
Como a soma de todas as frequências relativas, em percentagem é 100 %, então podemos determinar o valor de k , resolvendo a equação seguinte:

$$k + 17 + 24 + 29 + 22 = 100 \Leftrightarrow k + 92 = 100 \Leftrightarrow k = 100 - 92 \Leftrightarrow k = 8$$

Resposta: **Opção C**

2. Como $3\sqrt{2} \approx 4,24$, ou seja, $4 < 3\sqrt{2} < 5$ e a distância entre cada dois pontos consecutivos é 1, então o ponto de abcissa $a + 3\sqrt{2}$ está situado entre os pontos U e V , porque:

$$4 < 3\sqrt{2} < 5 \Rightarrow a + 4 < a + 3\sqrt{2} < a + 5$$



Resposta: $[UV]$

3. Como a distância média da Terra ao Sol é igual a 149,6 milhões de quilómetros, ou seja:

$$149,6 \times 1\,000\,000 = 149\,600,000 = 1,496 \times 10^8 \text{ km}$$

Então podemos calcular a distância média de Neptuno ao Sol, em quilómetros, multiplicando a distância anterior por 30. Fazendo o cálculo e escrevendo o resultado em notação científica, temos:

$$1,496 \times 10^8 \times 30 = 1,496 \times 30 \times 10^8 = 44,88 \times 10^8 = 4,488 \times 10^9 \text{ km}$$

4. Como o triângulo é retângulo, recorrendo ao Teorema de Pitágoras, e substituindo os comprimentos dos catetos, calculando o comprimento da hipotenusa (h) e arredondando o resultado às centésimas, vem:

$$h^2 = 48^2 + 62^2 \Leftrightarrow h^2 = 2304 + 3844 \Leftrightarrow h^2 = 6148 \underset{h>0}{\Rightarrow} h = \sqrt{6148} \Rightarrow h \approx 78,41$$

5. Como os triângulos $[ABH]$ e $[GEF]$ são ambos retângulos, $\overline{AB} = \overline{CD}$ e $B\hat{A}H = E\hat{G}F$, pelo critério ALA os triângulos são congruentes e, por isso $\overline{BH} = \overline{EF}$
Temos ainda que:

$$\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} = \overline{AD} \Leftrightarrow 2\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AD} \Leftrightarrow 2\overline{AB} = \overline{AD} - \overline{BC} \Leftrightarrow \overline{AB} = \frac{\overline{AD} - \overline{BC}}{2}$$

Assim, como $\overline{AB} = \overline{GE}$, temos que:

$$\overline{GE} = \overline{AB} = \frac{23 - 12}{2} = \frac{11}{2} = 5,5 \text{ m}$$

Como, relativamente ao ângulo EGF , o lado $[GE]$ é o cateto adjacente e o lado $[FE]$ é o cateto oposto, usando a definição de tangente, temos:

$$\text{tg } E\hat{G}F = \frac{\overline{FE}}{\overline{GE}} \Leftrightarrow \text{tg } 30^\circ = \frac{\overline{FE}}{5,5} \Leftrightarrow \overline{FE} = \text{tg } 30^\circ \times 5,5$$

Como $\text{tg } 30^\circ \approx 0,577$, vem que:

$$\overline{FE} \approx 0,577 \times 5,5 \approx 3,174 \text{ m}$$

Como $\overline{FD} = \overline{FE} + \overline{ED} = 2\overline{FE}$, então a distância da superfície do rés do chão à superfície do 2.º andar, arredondada às centésimas, é:

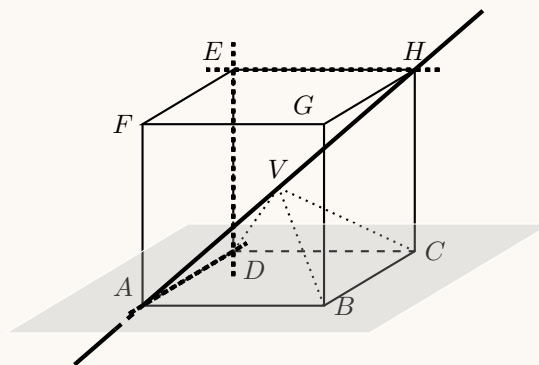
$$\overline{FD} \approx 2 \times 3,174 \approx 6,35 \text{ m}$$

6.

- 6.1. Verificando que as retas AD , EH e ED contêm arestas do cubo, então, respetivamente, pertencem, são paralelas ou são perpendiculares ao plano que contém a face $[ABCD]$ do cubo.

Assim, a reta AH , que contém uma diagonal do cubo, intersesta as seis faces do cubo sem ser perpendicular a nenhum deles, em particular é secante e não perpendicular ao plano que contém a face $[ABCD]$

Resposta: **Opção A**



- 6.2. Como o volume do cubo é 729 cm^3 , então a medida da aresta é:

$$\overline{AB} = \sqrt[3]{729} = 9 \text{ cm}$$

Como o vértice V coincide com o centro do cubo, a altura da pirâmide é metade da aresta do cubo, e assim, o volume da pirâmide $[ABCDV]$ é:

$$V_{[ABCDV]} = \frac{A_{[ABCD]} \times \text{altura}}{3} = \frac{\overline{AB}^2 \times \frac{\overline{AB}}{2}}{3} = \frac{9^2 \times \frac{9}{2}}{3} = \frac{81 \times 9}{6} = 121,5 \text{ cm}^3$$



Caderno 2

7. Como os dois alunos são sorteados simultaneamente, podemos organizar todas os pares de alunos que é possível sortear com recurso a uma tabela:

	Rapariga M_1	Rapariga M_2	Rapaz H_1	Rapaz H_2
Rapariga M_1	–	M_1M_2	M_1H_1	M_1H_2
Rapariga M_2	–	–	M_2H_1	M_2H_2
Rapaz H_1	–	–	–	H_1H_2

Assim, podemos observar que existem 6 pares diferentes que podem ser sorteados, dos quais 4 são constituídos por um rapaz e uma rapariga, ou seja, calculando a probabilidade pela Regra de Laplace, e apresentado o resultado na forma de fração, temos:

$$p = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

8. Pela observação do diagrama de extremos e quartis, podemos identificar o primeiro e o terceiro quartis: $Q_1 = 4$ e $Q_3 = 7$
E assim a amplitude interquartis é:

$$A = Q_3 - Q_1 = 7 - 4 = 3$$

9. Representando na reta real o conjunto $[-2,1[$, temos:



Assim, podemos verificar que, como o intervalo é aberto no limite superior, $1 \notin [-2,1[$, e assim vem que:

$$X = [-2,1[\cap \mathbb{Z} = \{-2, -1, 0\}$$

Resposta: **Opção B**

10. A abcissa do ponto B é 2, a abcissa do ponto A é 4 e, como o triângulo $[OAB]$ é isósceles, ($\overline{OB} = \overline{AB}$) então a altura relativamente ao lado $[OA]$ pertence à bissetriz deste lado.
Como o ponto B é o ponto do gráfico de f que tem abcissa 2, podemos calcular a sua ordenada (y_B), recorrendo à expressão algébrica da função f :

$$y_B = f(2) = 4(2)^2 = 4 \times 4 = 16$$

Assim, temos que a área do triângulo $[OAB]$ é:

$$A_{[OAB]} = \frac{\overline{OA} \times f(2)}{2} = \frac{x_A \times y_B}{2} = \frac{4 \times 16}{2} = \frac{64}{2} = 32$$



11. A representação gráfica de uma função de proporcionalidade inversa é parte de uma hipérbole que não interseca o eixo das ordenadas.
Assim, de entre as opções apresentadas, a única representação gráfica que não interseca o eixo Oy é a da opção (D)

Resposta: **Opção D**

12. Como o termo geral da sucessão é b^n e a sucessão tem valores alternadamente negativos e positivos, então $b < 0$

Como o valor absoluto dos termos da sucessão são potências de 2, ou seja, os valores da sucessão b^n , temos que:

$$b = -2$$

13. Como a equação está escrita na fórmula canónica, usando a fórmula resolvente para resolver a equação e escrevendo as soluções na forma de fração irredutível, temos:

$$(a = 10, b = -3 \text{ e } c = -1)$$

$$10x^2 - 3x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4(10)(-1)}}{2(10)} \Leftrightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 40}}{20} \Leftrightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{49}}{20} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{3 + 7}{20} \vee x = \frac{3 - 7}{20} \Leftrightarrow x = \frac{10}{20} \vee x = \frac{-4}{20} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \vee x = -\frac{1}{5}$$

$$\text{C.S.} = \left\{ -\frac{1}{5}, \frac{1}{2} \right\}$$

14. Resolvendo a inequação, temos:

$$\frac{x+3}{5} > 2(x-1) \Leftrightarrow \frac{x+3}{5} > 2x-2 \Leftrightarrow \frac{x+3}{5} > \frac{2x}{1} - \frac{2}{1} \stackrel{(5)}{\Leftrightarrow} \frac{x+3}{5} > \frac{10x}{5} - \frac{10}{5} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x+3 > 10x-10 \Leftrightarrow x-10x > -10-3 \Leftrightarrow -9x > -13 \Leftrightarrow 9x < 13 \Leftrightarrow x < \frac{13}{9}$$

$$\text{C.S.} = \left] -\infty, \frac{13}{9} \right[$$

15. Podemos substituir as soluções no sistema, para identificar qual delas verifica as duas equações do sistema simultaneamente, ou então, resolver o sistema para encontrar a solução:

$$\begin{cases} x + 2y = 3 \\ x - y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y + 2y = 3 \\ x = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3y = 3 \\ x = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{3}{3} \\ x = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ x = 1 \end{cases}$$

$$\text{C.S.} = \{(1,1)\}$$

Resposta: **Opção B**



16. Usando as regras operatórias de potências e escrevendo o resultado na forma de uma potência de base 4, temos que:

$$(12^3)^2 \times 12^3 \times 3^{-9} = 12^{3 \times 2} \times 12^3 \times \frac{1}{3^9} = 12^6 \times 12^3 \times \frac{1}{3^9} = 12^{6+3} \times \frac{1}{3^9} = 12^9 \times \frac{1}{3^9} = \frac{12^9}{3^9} = \left(\frac{12}{3}\right)^9 = 4^9$$

17. Como a área do triângulo é o produto dos comprimentos de dois lados adjacentes, escrevendo e simplificando a expressão da área, temos que:

$$A = x \times (x + 3) = x^2 + 3x$$

18. Como o ângulo BDA é o ângulo inscrito relativo ao arco AB , a amplitude do ângulo é metade da amplitude do arco, ou seja:

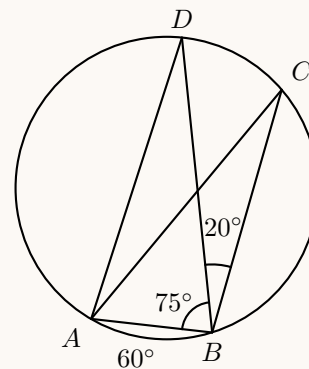
$$B\hat{D}A = \frac{\widehat{AB}}{2} = \frac{60}{2} = 30^\circ$$

Como, num triângulo a lados iguais se opõem ângulos com a mesma amplitude e $\overline{AD} = \overline{BD}$ então $D\hat{B}A = B\hat{A}D$, e como a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180° , vem que:

$$\begin{aligned} D\hat{B}A + B\hat{A}D + B\hat{D}A &= 180 \Leftrightarrow D\hat{B}A + D\hat{B}A + 30 = 180 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 2D\hat{B}A &= 180 - 30 \Leftrightarrow D\hat{B}A = \frac{150}{2} \Leftrightarrow D\hat{B}A = 75^\circ \end{aligned}$$

Desta forma, como $C\hat{B}D = 20^\circ$, vem que:

$$A\hat{B}C = D\hat{B}A + C\hat{B}D = 75 + 20 = 95^\circ$$

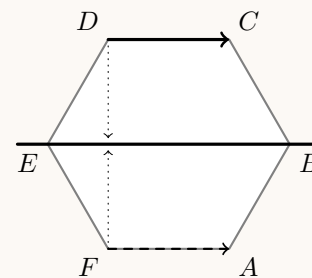


19. Temos que:

- a reflexão do ponto F relativamente ao eixo EB é o ponto D
- a translação do ponto D associada ao vetor \overrightarrow{FA} é o ponto C

Assim, a imagem do ponto F pela reflexão deslizante de eixo EB e vetor \overrightarrow{FA} , é o ponto C

Resposta: **Opção C**



20. Dois planos, ambos perpendiculares a um terceiro plano, não são necessariamente perpendiculares entre si.

Assim, temos que:

- o plano AFE é perpendicular ao plano ABC (porque contém faces adjacentes do cubo)
- o plano BDE também é perpendicular ao plano ABC (porque contém faces adjacentes do cubo)

Mas, como o ângulo ADB não é reto, os planos AFE e BDE , não são perpendiculares entre si.

