Prova final de Matemática - 3.º ciclo (2018, Época especial)

Proposta de resolução

Caderno 1

1. Como os dados da tabela já estão ordenados podemos verificar que os valores centrais, são 61,6 e 63,4.

$$\underbrace{56{,}6 \;\; 59{,}7 \;\; 61{,}6}_{50\%} \; \underbrace{63{,}4 \;\; 68{,}5 \;\; 73{,}0}_{50\%}$$

   Logo a mediana, $\tilde{x}$, do conjunto de dados é

$$\tilde{x} = \frac{61{,}6 + 63{,}4}{2} = \frac{125}{2} = 62{,}5$$

   Resposta: **Opção B**

2. Como x é uma aproximação de 3,6, com um erro inferior a 0,1, temos que $3{,}5 < x < 3{,}7$, e como $5{,}3 < y < 5{,}5$, vem que:

$$3{,}5 + 5{,}3 < x + y < 5{,}5 + 3{,}7 \; \Leftrightarrow \; 8{,}8 < x + y < 9{,}2$$

   Resposta: **Opção A**

3. De acordo com os dados do enunciado, a diferença entre a distância da Terra a Marte no dia 30 de maio de 2016 e a distância que foi prevista para o dia 31 de julho de 2018 é:

$$75{,}3 - 57 = 18{,}3 \text{ milhões de quilómetros}$$

   Assim, escrevendo o resultado em quilómetros, e depois em notação científica, temos:

$$18{,}3 \text{ milhões de quilómetros} = 18\,300\,000 \text{ quilómetros} = 1{,}83 \times 10^7 \text{ quilómetros}$$

4. Como o ângulo ABC é reto, então o triângulo $[ABC]$ é retângulo em B e, relativamente ao ângulo BAC, o lado $[AB]$ é o cateto adjacente e o lado $[AC]$ é a hipotenusa, pelo que, usando a definição de cosseno, temos:

$$\cos B\hat{A}C = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} \Leftrightarrow \cos 35^\circ = \frac{\overline{AB}}{46} \Leftrightarrow \overline{AB} = 46 \times \cos 35^\circ$$

Como $\cos 35^\circ \approx 0{,}82$, vem que:

$$\overline{AB} \approx 46 \times 0{,}82 \approx 37{,}72 \text{ m}$$

Assim, como $\overline{AB} = \overline{EF}$ (porque os triângulos $[ABC]$ e $[DEF]$ são iguais pelo critério LAL), e $\overline{BF} = \overline{CD}$, temos que:

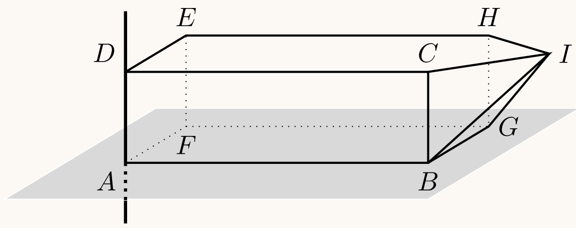
$$\overline{AE} = \overline{AB} + \underbrace{\overline{BF}}_{\overline{CD}} + \underbrace{\overline{EF}}_{\overline{AB}} \Leftrightarrow \overline{AE} = 2 \times \overline{AB} + \overline{CD} \Leftrightarrow \overline{AE} - 2 \times \overline{AB} = \overline{CD} \Leftrightarrow$$

Logo, como $\overline{AE} = \overline{AC} + \overline{ED} = 46 + 46 = 92$ metros e $\overline{AB} \approx 37{,}72$ metros, temos que a distância entre os pontos C e D, em metros, arredondado às unidades, é:

$$\overline{CD} \approx 92 - 2 \times 37{,}72 \approx 16{,}56 \approx 17 \text{ m}$$

5.

5.1. Como o plano definido pelas retas AG e BF é o plano AFG, ou seja, o plano que contém a face lateral $[AFGB]$ do paralelepípedo retângulo, então, qualquer reta que contenha uma aresta de uma base do paralelepípedo que não pertença a esta face nem seja paralela, é perpendicular a este plano, por exemplo a reta AD

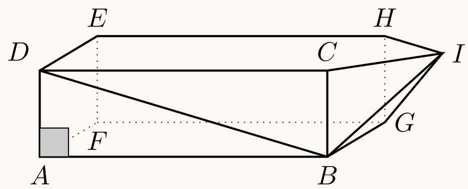


5.2. Como o triângulo $[ABD]$ é um triângulo retângulo em A, (porque $[ABCDEFGH]$ é paralelepípedo retângulo) podemos, recorrer ao Teorema de Pitágoras, para calcular o valor de $\overline{BD}$:

$$\overline{BD}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AD}^2 \Leftrightarrow \overline{BD}^2 = 10^2 + 3^2 \Leftrightarrow \overline{BD}^2 = 100 + 9 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \overline{BD}^2 = 109 \underset{\overline{BD}>0}{\Rightarrow} \overline{BD} = \sqrt{109} \text{ cm}$$

Assim, como $\sqrt{109} \approx 10{,}4$, o valor de $\overline{BD}$ arredondado às décimas é $10{,}4$ cm



5.3. Recorrendo à fórmula do volume da esfera podemos calcular o raio, r, de cada tanque esférico:

$$V_{\text{Esfera}} = \frac{4}{3}\pi r^3 \Leftrightarrow 33\,750 = \frac{4}{3}\pi r^3 \Leftrightarrow \frac{33\,750 \times 3}{4\pi} = r^3 \Leftrightarrow \sqrt[3]{\frac{33\,750 \times 3}{4\pi}} = r \Rightarrow r \approx 20{,}05 \text{ m}$$

Como os quatro tanques esféricos estão encostados sem serem deformados, o valor de x corresponde a quatro diâmetros dos tanques, ou seja a $2 \times 4 = 8$ raios, pelo que o valor de x em metros, arredondado às unidades, é:

$$x = 8r \approx 8 \times 20{,}05 \approx 160{,}4 \approx 160 \text{ m}$$

6. Como $20^3 = 8000$, temos que $\left[0, \sqrt[3]{8000}\,\right] \cap]20, +\infty]$ é o conjunto vazio ($20 \in \left[0, \sqrt[3]{8000}\,\right]$, mas $20 \notin]20, +\infty]$, porque o intervalo é aberto).

Assim, como $\sqrt[3]{8001} > 20$, temos que $\left[0, \sqrt[3]{8001}\,\right] \cap]20, +\infty]$ não é o conjunto vazio, e como não existem números inteiros maiores que 8000 e menores 8001, temos que o menor número natural, n tal que $\left[0, \sqrt[3]{n}\,\right] \cap]20, +\infty[$ é um conjunto não vazio, é o número 8001

Caderno 2

7.

7.1. Como ao selecionar ao acaso um dos elementos da equipa, a probabilidade de o elemento selecionado ser rapariga é 50%, então nessa equipa existem tantas raparigas como rapazes, e de entre as três equipas, a única com esta característica é a a equipa B.

7.2. Como é escolhido um elemento da equipa A e um elemento da equipa B, podemos organizar todos os pares de elementos que podem ser escolhidos, com recurso a uma tabela:

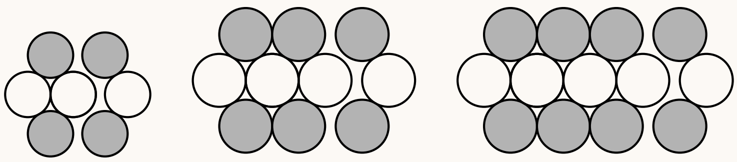
Equipa A \ **Equipa B**	Rapaz	Rapaz	Rapariga	Rapariga
Rapaz	♂♂	♂♂	♂♀	♂♀
Rapaz	♂♂	♂♂	♂♀	♂♀
Rapariga	♀♂	♀♂	♀♀	♀♀

Assim, podemos observar que existem 12 pares diferentes que podem ser escolhidos, dos quais apenas 4 são compostos por dois rapazes, ou seja, calculando a probabilidade pela Regra de Laplace de que os dois capitães sejam ambos rapazes, e apresentado o resultado na forma de fração irredutível, temos:

$$p = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

8. Considerando que o primeiro termo é constituído por 4 círculos (2 brancos e dois cinzentos) e mais 3 círculos (dois cinzentos e um branco), e que em cada termo são adicionados mais 3 círculos (dois cinzentos e um branco), o termo de ordem n terá um total de 4 círculos, mais $3 \times n$ círculos, ou seja, um total de:

$$4 + \underbrace{3 + 3 + \ldots + 3}_{n \text{ vezes}} = 4 + 3 \times n = 3n + 4 \text{ círculos}$$



1º termo   2º termo   3º termo

Resposta: **Opção C**

9. Como a reta s é paralela à reta r, os respetivos declives são iguais, pelo que uma equação da reta s é da forma:

$$y = -2x + b$$

Substituindo as coordenadas do ponto da reta s, $\left(\frac{3}{2},0\right)$, podemos determinar o valor da ordenada da origem (b):

$$0 = -2 \times \frac{3}{2} + b \Leftrightarrow 0 = -3 + b \Leftrightarrow 3 = b$$

E assim, temos que uma equação da reta s é:

$$y = -2x + 3$$

10. Fazendo o desenvolvimento do caso notável vem:

$$(x-3)^2 = x^2 - 2\times 3\times x + 3^2 = x^2 - 6x + 9 = x^2 + (-6)x + 9$$

Assim, como $(x-3)^2 = x^2 + mx + n$, temos que $m = -6$ e $n = 9$

Resposta: **Opção C**

11. Como a equação está escrita na fórmula canónica, usando a fórmula resolvente para resolver a equação, e escrevendo as soluções na forma de fração irredutível, temos:

$(a = 15,\ b = 2 \text{ e } c = -1)$

$$15x^2 + 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4(15)(-1)}}{2(15)} \Leftrightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{4+60}}{30} \Leftrightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{64}}{30} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-2+8}{30} \vee x = \frac{-2-8}{30} \Leftrightarrow x = \frac{6}{30} \vee x = \frac{-10}{30} \Leftrightarrow x = \frac{3}{15} \vee x = -\frac{1}{3} \Leftrightarrow x = \frac{1}{5} \vee x = -\frac{1}{3}$$

C.S.$=\left\{-\frac{1}{3}, \frac{1}{5}\right\}$

12. Resolvendo a inequação, temos:

$$\frac{1-x}{2} < 3(2x-1) \Leftrightarrow \frac{1-x}{2} < 6x - 3 \Leftrightarrow \frac{1-x}{2} < \frac{6x}{1}_{(2)} - \frac{3}{1}_{(2)} \Leftrightarrow \frac{1-x}{2} < \frac{12}{x} - \frac{6}{1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1 - x < 12x - 6 \Leftrightarrow -12x - x < -6 - 1 \Leftrightarrow -13x < -7 \Leftrightarrow 13x > 7 \Leftrightarrow x > \frac{7}{13}$$

C.S.$=\left]\frac{7}{13}, +\infty\right[$

13. Calculando a imagem do objeto 2 pela função f, temos:

$$f(2) = \frac{6}{2} = 3$$

Assim, como os gráficos das funções f e g se intersetam no ponto de abcissa 2, então $f(2) = g(2)$, ou seja, $g(2) = 3$, pelo que sabemos que o ponto de coordenadas (2,3) pertence ao gráfico de g

Como $g(x) = ax^2$, substituindo as coordenadas do ponto, substituindo as coordenadas na expressão algébrica da função podemos calcular o valor de a:

$$g(2) = 3 \Leftrightarrow a \times 2^2 = 3 \Leftrightarrow a \times 4 = 3 \Leftrightarrow a = \frac{3}{4}$$

14. Usando as regras operatórias de potências e escrevendo o resultado na forma de uma potência de base $\frac{1}{3}$, temos que:

$$\frac{3^{11}}{3^7} \times 3^{-6} = \frac{3^{11}}{3^7} \times \frac{1}{3^6} = \frac{3^{11} \times 1}{3^7 \times 3^6} = \frac{3^{11}}{3^{7+6}} = \frac{3^{11}}{3^{13}} = 3^{11-13} = 3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1^2}{3^2} = \left(\frac{1}{3}\right)^2$$

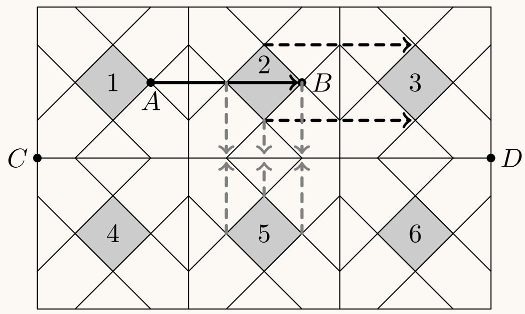
15. Como x o número de rapazes e y o número de raparigas que se inscreveram inicialmente na modalidade do desporto escolar e inscreveram-se inicialmente, 45 alunos, rapazes e raparigas, temos que $x + y = 45$

Como se inscreveram mais 4 rapazes, o número de rapazes alterou-se para $x + 4$ e como desistiram 4 raparigas, o número de raparigas passou a ser de $y - 4$. Nestas condições o número de rapazes a ser o dobro do número de raparigas, ou seja, $x + 4 = 2(y - 4)$

Assim, um sistema de equações que permita determinar o número de rapazes e o número de raparigas que se inscreveram inicialmente na modalidade do desporto escolar, é:

$$\begin{cases} x + y = 45 \\ \\ x + 4 = 2(y - 4) \end{cases}$$

16. Temos que:
   - a reflexão do quadrado 5 relativamente ao eixo CD é o quadrado 2
   - a translação do quadrado 2 associada ao vetor $\overrightarrow{AB}$ é o quadrado 3



Assim, a imagem do quadrado 5 pela reflexão deslizante de eixo CD e vetor $\overrightarrow{AB}$, é o quadrado 3

Resposta: **Opção B**

17.

17.1. Como o ângulo CBA é o ângulo inscrito relativo ao arco CA, a amplitude do arco é o dobro da amplitude do ângulo, ou seja:

$$\overset{\frown}{CA} = 2 \times C\hat{B}A = 2 \times 85 = 170°$$

Temos ainda que:

$$\overset{\frown}{BC} + \overset{\frown}{CA} + \overset{\frown}{AB} = 360 \Leftrightarrow \overset{\frown}{BC} + 170 + 110 = 360 \Leftrightarrow \overset{\frown}{BC} = 360 - 170 - 110 \Leftrightarrow \overset{\frown}{BC} = 80°$$

Desta forma, como o ângulo BAC é o ângulo inscrito relativo ao arco BC, a amplitude do ângulo é metade da amplitude do arco, ou seja:

$$B\hat{A}C = \frac{\overset{\frown}{BC}}{2} = \frac{80}{2} = 40°$$

17.2. Como os triângulos $[ABC]$ e $[DEC]$ são semelhantes, porque têm um ângulo comum e os lados opostos ao ângulo comum são paralelos, temos que:

$$\frac{\overline{CE}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{EB}}{\overline{DA}}$$

Resposta: **Opção A**