Prova final de Matemática - 3.º ciclo **(2019, Época especial)**

Proposta de resolução

Caderno 1

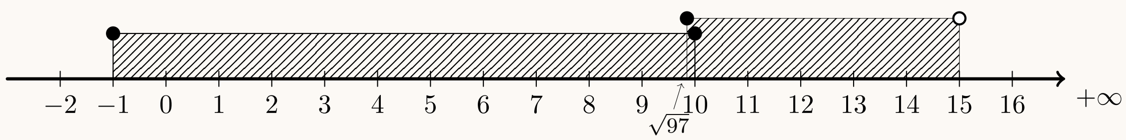
1. Identificando os quartis deste conjunto de dados, no diagrama, temos que $Q_1 = 303{,}5$ e $Q_3 = 386$

   Logo a amplitude interquartil, do conjunto de dados é:

$$Q_3 - Q_1 = 386 - 303{,}5 = 82{,}5$$

   Resposta: **Opção C**

2. Representando os conjuntos A e B na reta real, como $\sqrt{97} < 10$ temos:



   Assim temos que $[-1{,}10] \cup \left[\sqrt{97}{,}15\right[= [-1{,}15[$

3. Como o valor dos prejuízos causados foi $\frac{1}{4}$ da estimativa inicial, este valor é de:

$$1650 \times \frac{1}{4} = \frac{1650}{4} = 412{,}5 \text{ milhões de euros}$$

   Assim, escrevendo este número em euros, em notação científica, vem:

$$412{,}5 \text{ milhões de euros} = 412\,500\,000 \text{ euros} = 4{,}125 \times 10^8 \text{ euros}$$

4. Como $\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC}$, vem:

$$\overline{AB} = \overline{AC} - \overline{BC} = 8 - 0{,}16 = 7{,}84 \text{ m}$$

   Como o triângulo $[ABE]$ é retângulo em E, e, relativamente ao ângulo AEB, o lado $[AB]$ é o cateto oposto e o lado $[AE]$ é a hipotenusa, usando a definição de seno, temos:

$$\text{sen}\,\alpha = \frac{\overline{AB}}{\overline{AE}} \Leftrightarrow \text{sen}\,\alpha = \frac{7{,}84}{10{,}9} \Rightarrow \text{sen}\,\alpha \approx 0{,}719$$

   Assim, procurando o valor mais próximo de 0,719 na coluna dos valores do seno na tabela de valores das razões trigonométricas (ou recorrendo à calculadora), e arredondando a amplitude do ângulo AEB às unidades, temos que

$$\alpha \approx \text{sen}^{-1}(0{,}719) \approx 46°$$

5.

5.1. A única face do prisma triângular que não interseta as restantes segundo um ângulo reto é a face correspondente ao painel solar, ou seja a face $[ACDE]$.

Assim, o plano que não é perpendicular ao plano que contém a face $[ABFE]$ é o plano que contém a face $[ACDE]$, ou seja o plano EAC.

Resposta: **Opção B**

5.2. Como o volume de um prisma pode ser calculado como o produto da área da base pela altura, começamos por determinar a área da base do prisma $[ABCDEF]$, ou seja, por exemplo, a área do triângulo $[ABC]$:

$$A_{Base} = A_{[ABC]} = \frac{\overline{AB} \times \overline{BC}}{2} = \frac{78 \times 58{,}5}{2} = 2281{,}5 \text{ cm}^2$$

Assim, podemos determinar a altura do prisma, x, recorrendo à fórmula do volume:

$$V_{[ABCDEF]} = A_{Base} \times \text{altura} \Leftrightarrow V_{[ABCDEF]} = A_{[ABC]} \times x \Leftrightarrow 445\,000 = 2281{,}5 \times x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{445\,000}{2281{,}5} \Rightarrow x \approx 195{,}05 \text{ cm}$$

Desta forma, a área do painel solar, ou seja, a área do retângulo $[ACDE]$, é:

$$A_{[ACDE]} = \overline{AE} \times \overline{DE} = x \times 97{,}5 \approx 195{,}05 \times 97{,}5 \approx 19\,017 \text{ cm}^2$$

5.3. Como os triângulos $[ABC]$ e $[AXY]$ têm ambos um ângulo reto e o ângulo de vértice em A é comum aos dois, pelo critério AA, os triângulos são semelhantes.

Assim, temos que o comprimento da haste, ou seja, $\overline{XY}$, em centímetros, é:

$$\frac{\overline{XY}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{AX}}{\overline{AB}} \Leftrightarrow \frac{\overline{XY}}{58{,}5} = \frac{52}{78} \Leftrightarrow \overline{XY} = \frac{52 \times 58{,}5}{78} \Leftrightarrow \overline{XY} = 39 \text{ cm}$$

6. Como $a > b$, o inverso de a é menor que o inverso de b, pelo que a relação de ordem de ordem se mantêm para o dobro do inverso:

$$a > b \Rightarrow \frac{1}{a} < \frac{1}{b} \Rightarrow 2 \times \frac{1}{a} < 2 \times \frac{1}{b} \Leftrightarrow \frac{2}{a} < \frac{2}{b}$$

(por exemplo, como $8 > 4$, então $\frac{1}{8} < \frac{1}{4}$ e também $\frac{2}{8} < \frac{2}{4}$, ou seja $\frac{1}{4} < \frac{1}{2}$)

Resposta: **Opção B**

Caderno 2

7.

7.1. Recorrendo à Regra de Laplace, e verificando que, o dado tem 6, ou seja, que existem 6 casos possíveis; e que o Daniel está interessado apenas em um deles, ou seja, 1 caso favorável, temos que a probabilidade, escrita na forma de fração, é:

$$p = \frac{1}{6}$$

7.2. Organizando todas os algarismos que o João pode obter, com recurso a uma tabela, temos:

Dado azul \ Dado Vermelho	1	2	3	4	5	6
1	11	12	13	14	15	16
2	21	22	23	24	25	26
3	31	32	33	34	35	36
4	41	42	43	44	45	46
5	51	52	53	54	55	56
6	61	62	63	64	65	66

Assim, é possível verificar que, de entre os 36 números possíveis de obter no lançamento dos 2 dados (ou seja 36 casos possíveis), 3 deles são números ímpares inferiores a 20 (ou seja 3 casos favoráveis). Assim, recorrendo à Regra de Laplace, temos que a probabilidade de o número formado ser um número ímpar inferior a 20, é:

$$p = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$$

8.

8.1. Organizando os pagamentos do André aos pais e o montante em dívida numa tabela, temos:

Data	Pagamento	Montante em dívida
Até 31 dez 2019	—	$178 - 50 = 128$
1 jan 2020	8	$128 - 8 = 120$
1 fev 2020	8	$120 - 8 = 112$
1 mar 2020	8	$112 - 8 = 104$
1 abr 2020	8	$104 - 8 = 96$
2 abr 2020	—	96

Resposta: **Opção D**

8.2. Como em cada prestação o André paga 8 euros, ao fim de n prestações terá pago $n \times 8 = 8n$ euros.

Observando que a dívida inicial era de $178 - 50 = 128$ euros, temos que uma expressão que representa a quantia, em euros, que o André ficará a dever aos pais após pagar n prestações, é:

$$128 - 8n$$

9. Como $[AC]$ e $[BD]$ são, respetivamente, a diagonal maior e a diagonal menor do losango, identificando o quadrado da diferença, temos que a área é:

$$A_{[ABCD]} = \frac{\overline{AC} \times \overline{BD}}{2} = \frac{(x+4)(x-4)}{2} = \frac{x^2 - 4^2}{2} = \frac{x^2 - 16}{2}$$

Resposta: **Opção D**

10. Como a equação está escrita na fórmula canónica, usando a fórmula resolvente para resolver a equação, e escrevendo as soluções na forma de fração irredutível, temos:

($a = 8$, $b = 2$ e $c = -1$)

$$8x^2 + 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4(8)(-1)}}{2(8)} \Leftrightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{4-(-32)}}{16} \Leftrightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{4+32}}{16} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{36}}{16} \Leftrightarrow x = \frac{-2+6}{16} \vee x = \frac{-2-6}{16} \Leftrightarrow x = \frac{4}{16} \vee x = \frac{-8}{16} \Leftrightarrow x = -\frac{1}{4} \vee x = -\frac{1}{2}$$

C.S.$=\left\{-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right\}$

11. Resolvendo a inequação, temos:

$$\frac{1-5x}{4} > 3(x-1) \Leftrightarrow \frac{1-5x}{4} > 3x - 3 \Leftrightarrow \frac{1-5x}{4} > \frac{3x}{1}_{(4)} - \frac{3}{1}_{(4)} \Leftrightarrow \frac{1-5x}{4} > \frac{12x}{4} - \frac{12}{4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1 - 5x > 12x - 12 \Leftrightarrow -5x - 12x > -12 - 1 \Leftrightarrow -17x > -13 \Leftrightarrow 17x < 13 \Leftrightarrow x < \frac{13}{17}$$

C.S.$=\left]-\infty, \frac{13}{17}\right[$

12. Calculando a imagem do objeto 3 pela função f, temos:

$$f(3) = \frac{2}{3} \times 3^2 = \frac{2 \times 3 \times 3}{3} = 6$$

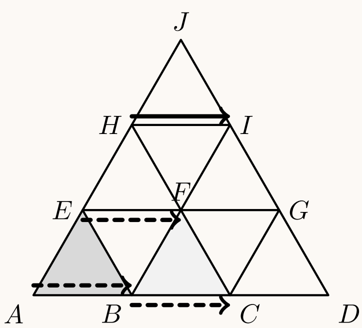
Assim, como as coordenadas do ponto A são (3,6) e como a função g é de proporcionalidade inversa, ou seja, da forma $g(x) = \frac{k}{x}$, $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, podemos calcular o valor da constante de proporcionalidade, ou seja, o valor de k, substituindo as coordenadas do ponto A (que pertence ao gráfico da função g):

$$g(3) = 6 \Leftrightarrow \frac{k}{3} = 6 \Leftrightarrow k = 6 \times 3 \Leftrightarrow k = 18$$

Desta forma, como a função g é definida por $g(x) = \frac{18}{x}$, substituindo a ordenada do ponto B na expressão de g, podemos calcular o valor da abcissa, ou seja, o valor de c:

$$g(c) = 2 \Leftrightarrow \frac{18}{c} = 2 \Leftrightarrow \frac{18}{2} = c \Leftrightarrow 9 = c$$

13. Observando que $\overrightarrow{HI} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{EF}$ (porque são vetores com a mesma direção, o mesmo sentido e o mesmo comprimento), então temos que a imagem do triângulo $[ABE]$, pela translação de vetor $\overrightarrow{HI}$, é o triângulo $[BCF]$



Resposta: **Opção A**

14. Como x é o preço, em euros, do livro *Aventuras* e y o preço sem desconto, em euros, do livro *Biografias*, e os três exemplares custam, no total, 39 euros, temos que $x + 2y = 39$

Como o livro *Biografias* estava com um desconto de 4 euros, o preço de cada exemplar nestas condições é $y - 4$, pelo que dois exemplares do livro *Aventuras* $(2x)$ e três exemplares do livro $(3(y-4))$ *Biografias* terem um preço total de 50 euros, corresponde a $2x + 3(y-4) = 50$

Assim, um sistema de equações que permita determinar o preço do livro *Aventuras* e o preço sem desconto do livro *Biografias*, é:

$$\begin{cases} x + 2y = 39 \\ \\ 2x + 3(y-4) = 50 \end{cases}$$

15. Usando as regras operatórias de potências e escrevendo o resultado na forma de uma potência de base $\frac{1}{5}$, temos que:

$$\frac{5^{-1} \times 5^{-2}}{5^6} = \frac{5^{-1+(-2)}}{5^6} = \frac{5^{-3}}{5^6} = 5^{-3-6} = 5^{-9} = \frac{1}{5^9} = \frac{1^9}{5^9} = \left(\frac{1}{5}\right)^9$$

16. Temos que:

- Como $[CA]$ é um diâmetro da circunferência, então $\overset{\frown}{CA} = 180°$
- como o ângulo ABD é o ângulo ao centro relativo ao arco AD, temos que $\overset{\frown}{AD} = 130°$
- $\overset{\frown}{CD} + \overset{\frown}{DA} = \overset{\frown}{CA} \Leftrightarrow \overset{\frown}{CD} + 130 = 180 \Leftrightarrow \overset{\frown}{CD} = 180 - 130 \Leftrightarrow \overset{\frown}{CD} = 50°$

Desta forma, como o ângulo DEC é o ângulo inscrito relativo ao arco CD, a amplitude do ângulo é metade da amplitude do arco, ou seja:

$$D\hat{E}C = \frac{\overset{\frown}{CD}}{2} = \frac{50}{2} = 25°$$

17. Recorrendo à fórmula fundamental da trigonometria, como β é um ângulo agudo, $\cos\beta > 0$ vem que:

$$\operatorname{sen}^2\beta + \cos^2\beta = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^2 + \cos^2\beta = 1 \Leftrightarrow \frac{5}{9} + \cos^2\beta = 1 \Leftrightarrow \cos^2\beta = 1 - \frac{5}{9} \Leftrightarrow \cos^2\beta = \frac{9}{9} - \frac{5}{9} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos^2\beta = \frac{4}{9} \underset{\cos\beta>0}{\Rightarrow} \cos\beta = \sqrt{\frac{4}{9}} \Leftrightarrow \cos\beta = \frac{2}{3}$$