Prova final de Matemática - 3.º ciclo **(2023, 1.ª fase)**

Proposta de resolução

1. Como $\frac{13}{17}$ é uma razão de números inteiros, é um número racional, e por isso uma dízima finita ou infinita periódica.

   Como $\sqrt{17}$, π e $\sqrt{13}$ são números irracionais, ou seja, representados por dízimas infinitas não periódicas, o quociente entre qualquer um destes valores e um qualquer número natural também é um número irracional correspondendo a uma dízima infinita não periódica.

   Resposta: **Opção C**

2. Calculando 60% de 30,5 milhões de dormidas, ou seja, o crescimento esperado em 2023, relativamente ao ano de 2020, temos:

   $$30{,}5 \times \frac{60}{100} = 18{,}3\text{milhões}$$

   Assim, em 2023, a estimativa para o número de dormidas em estabelecimentos de alojamento turístico em Portugal, é:

   $$30{,}5 + 18{,}3 = 48{,}8\text{milhões}$$

   Pelo que, escrevendo este valor em notação científica, vem:

   $$48\,800\,000 = 4{,}88 \times 10^7$$

3.

   3.1. Como são 6 amigos, dos quais 4 fazer atividades no mar e os restantes preferem atividades em rios, então este último grupo é composto por $6 - 4 = 2$ amigos.

   Assim, calculando a probabilidade, com recurso à Regra de Laplace, de escolher ao acaso um dos 6 amigos e este preferir fazer atividades em rios, temos:

   $$p = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

   Resposta: **Opção B**

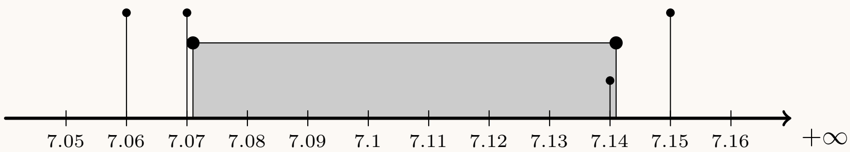
3.2. Organizando todas as atividades numa tabela por formar a observamos todos os pares de atividades diferentes que se podem organizar, temos:

	surf (S)	*bodyboard* (B)	*windsurf* (W)	*paddle* (P)	mergulho (M)	canoagem (C)
S	—	S + B	S + W	S+P	S+M	S+C
B	—	—	B + W	B + P	B + M	B + C
W	—	—	—	W + P	W + M	W + C
P	—	—	—	—	P + M	P + C
M	—	—	—	—	—	M + C
C	—	—	—	—	—	—

Assim, podemos observar que existem 15 pares de atividades diferentes podem ser sorteadas, dos quais 6 são constituídos por duas atividades que se realizam com prancha, ou seja, calculando a probabilidade pela Regra de Laplace, e apresentando o resultado na forma de fração irredutível, temos:

$$p = \frac{6}{15} = \frac{2}{5}$$

4. Como $\sqrt{50} \approx 7{,}071$ e $\sqrt{51} \approx 7{,}141$, logo $\sqrt{50} < 7{,}14 < \sqrt{51}$.



Resposta: **Opção C**

5. Temos que a área do triângulo $[ABC]$ é:

$$A_{[ABC]} = \frac{\overline{BC} \times \overline{AM}}{2} = \frac{15 \times 12}{2} = 90$$

Como os triângulos $[ABC]$ e $[AED]$ são semelhantes porque têm um ângulo comum e os lados opostos são paralelos, a razão das áreas de figuras semelhantes é o quadrado da razão de semelhança, ou seja:

$$r^2 = \frac{A_{[ABC]}}{A_{[AED]}} \Leftrightarrow r^2 = \frac{90}{10} \Leftrightarrow r^2 = 9 \underset{r>0}{\Rightarrow} r = \sqrt{9} \Leftrightarrow r = 3$$

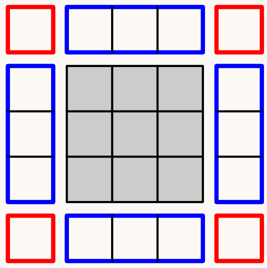
Assim, como $[AP]$ e $[AM]$ são as alturas dos dois triângulos, temos que:

$$r = \frac{\overline{AM}}{\overline{AP}} \Leftrightarrow 3 = \frac{12}{\overline{AP}} \Leftrightarrow \overline{AP} = \frac{12}{3} \Leftrightarrow \overline{AP} = 4$$

Assim, como $\overline{EF} = \overline{PM}$, temos que:

$$\overline{AP} + \overline{PM} = \overline{AP} \Leftrightarrow 4 + \overline{EF} = 12 \Leftrightarrow \overline{EF} = 12 - 4 \Leftrightarrow \overline{EF} = 8$$

6. Observando que no termo de ordem n, temos:
   - n^2 quadrados cinzentos;
   - 4 conjuntos de n quadrados brancos (limitados com cor azul na figura ao lado) e mais 4 quadrados (limitados com cor vermelha na figura ao lado),ou seja, um total de $4n + 4$ quadrados no brancos.



   Logo, o número total de quadrados na figura do termo de ordem n é n^2+4n+4.

   Assim a ordem do termo da sequência que tem um total de 529 quadrados é a solução da equação $n^2 + 4n + 4 = 529$.

   Resolvendo a equação temos:

$$n^2+4n+4 = 529 \Leftrightarrow n^2+4n+4-529 = 0 \Leftrightarrow n^2+4n-525 = 0 \Leftrightarrow n = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \times 1 \times (-525)}}{2 \times 1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n = \frac{-4 \pm \sqrt{16+2100}}{2} \Leftrightarrow n = \frac{-4 \pm \sqrt{2116}}{2} \Leftrightarrow n = \frac{-4 \pm 46}{2} \Leftrightarrow n = \frac{42}{2} \vee n = -\frac{50}{2} \Leftrightarrow n = 21 \vee n = -25$$

   Logo, como a ordem de um termo é um número natural, temos que a ordem do termo é 21, a que correspondem $4 \times 21 + 4 = 88$ quadrados brancos.

7. Como uma equação do segundo grau da forma $ax^2 + bx + c = 0$ tem duas soluções reais distintas se $b^2 - 4ac > 0$, no caso da equação apresentada, temos que $a = 1$ e $b = -4$, pelo que:

$$(-4)^2 - 4(1)c > 0 \Leftrightarrow 16 - 4c > 0 \Leftrightarrow -4c > -16 \Leftrightarrow 4c < 16 \Leftrightarrow c < \frac{16}{4} \Leftrightarrow c < 4$$

   Desta forma, de entre os valores apresentados, o único que gera uma equação com duas soluções reais distintas é o 3.

   Resposta: **Opção A**

8. Como a área do retângulo $[GHIJ]$ é 25,8 m^2, e a altura do prisma é $\overline{BH} = 4$ m, temos que o seu volume é:

$$V_{[BCEFGHIJ]} = A_{[GHIJ]} \times \overline{BH} = 25{,}8 \times 4 = 103{,}2 \text{ m}^3$$

   Assim, o volume do prisma triangular $[ABCDEF]$, é a diferença entre o volume do sólido e do volume do prisma retangular $[BCEFGHIJ]$:

$$V_{[ABCDEF]} = V_{\text{total}} - V_{[BCEFGHIJ]} = 134{,}1 - 103{,}2 = 30{,}9 \text{ m}^3$$

9. Como f é uma função afim, cujo gráfico contém o ponto de coordenadas (0,2), a sua expressão algébrica é da forma $f(x) = mx + 2, m \in \mathbb{R}$.

   Pela observação do gráfico podemos verificar que o gráfico da função f é uma reta de declive positivo, pelo que, de entre as opções apresentadas, a única que pode definir a função f é $f(x) = 4x + 2$.

   Resposta: **Opção D**

10. Como D pertence à semirreta $\dot{A}C$, então $D\hat{C}A = 180°$, pelo que:

$$B\hat{C}A = D\hat{A}C - B\hat{C}D = 180 - 100 = 80°$$

Como o ângulo BAC é o ângulo inscrito relativo ao arco AB, a amplitude do arco é o dobro da amplitude do ângulo, ou seja:

$$\overset{\frown}{BA} = 2 \times B\hat{C}A = 2 \times 80 = 160°$$

E assim, temos que:

$$B\overset{\frown}{C}A = 360 - \overset{\frown}{BA} = 360 - 160 = 200°$$

11.

11.1. Como M é o ponto médio de $[AB]$ temos que:

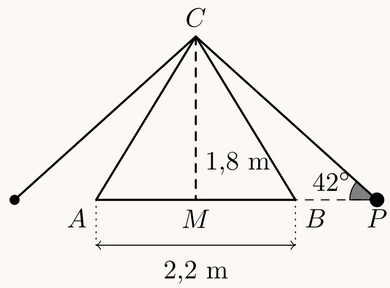
$$\overline{MB} = \frac{\overline{AB}}{2} = \frac{2{,}2}{2} = 1{,}1 \text{ m}$$

O triângulo $[CBM]$ é retângulo em M (porque o triângulo $[ABC]$ é isósceles), logo, recorrendo ao Teorema de Pitágoras, para calcular o valor de $\overline{BC}$:

$$\overline{BC}^2 = \overline{CM}^2 + \overline{MB}^2 \Leftrightarrow \overline{BC}^2 = 1{,}8^2 + 1{,}1^2 \Leftrightarrow \overline{BC}^2 = 3{,}24 + 1{,}21 \Leftrightarrow \overline{BC}^2 = 4{,}45 \underset{\overline{BC}>0}{\Rightarrow} \overline{BC} = \sqrt{4{,}45} \text{ m}$$

Assim, como $\sqrt{4{,}45} \approx 2{,}1$, o valor de $\overline{BC}$ em metros, arredondado às unidades é 2 m.

11.2. Como o triângulo $[PMC]$ é retângulo em M, então o lado $[MP]$ é o cateto adjacente ao ângulo CPM e o lado $[CM]$ é o cateto oposto ao mesmo ângulo, pelo que, usando a definição de tangente de um ângulo, e como $\overline{CM} = 1{,}8$ temos:



$$\text{tg}\left(C\hat{P}M\right) = \frac{\overline{CM}}{\overline{PM}} \Leftrightarrow \text{tg } 42° = \frac{1{,}8}{\overline{PM}} \Leftrightarrow \overline{PM} = \frac{1{,}8}{\text{tg } 42°}$$

Assim, como $\overline{MB} = \frac{2{,}2}{2} = 1{,}1$, calculando a distância de P a B, em metros, e arredondando o resultado às décimas, temos:

$$\overline{PB} = \overline{PM} - \overline{MB} = \frac{1{,}8}{\text{tg } 42°} - 1{,}1 \approx 0.9 \text{ m}$$

12. Resolvendo a inequação, temos:

$$\frac{3(1-x)}{4} \geq \frac{x}{3} + 1 \Leftrightarrow \frac{3-3x}{4} \geq \frac{x}{3} + 1 \Leftrightarrow \frac{3-3x}{4}_{(3)} \geq \frac{x}{3}_{(4)} + \frac{1}{1}_{(12)} \Leftrightarrow \frac{9-9x}{12} \geq \frac{4x}{12} + \frac{12}{12} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 9 - 9x \geq 4x + 12 \Leftrightarrow -9x - 4x \geq 12 - 9 \Leftrightarrow -13x \geq 3 \Leftrightarrow 13x \leq -3 \Leftrightarrow x \leq -\frac{3}{13}$$

$$\text{C.S.} = \left]-\infty, -\frac{3}{13}\right]$$

13. Observando os dois gráficos, temos que:

- o gráfico A não representa a função f porque neste gráfico $f(0) \neq 0$. Ou seja, quando o barco parte, o tempo decorrido desde o início da viagem é zero e a distância a que o barco se encontra do local de partida também é zero, pelo que o ponto de coordenadas (0,0) tem que pertencer ao gráfico da função;
- o gráfico B também não representa a função f porque o barco fica parado no cais durante a visita pedestre à ilha, pelo que durante este período a distância ao ponto de partida não varia, ao contrário do que é indicado pelo gráfico B, em que não existe nenhum período de tempo em que a distância se mantém constante.

14. Determinando a ordenada do ponto A, recorrendo à expressão algébrica da função f, temos:

$$y_A = f(2) = 3 \times 2^2 = 3 \times 4 = 12$$

Como o ponto A também pertence ao gráfico da função g, temos que $g(2) = 12$, pelo que, substituindo as coordenadas do ponto na expressão algébrica da função g, temos:

$$g(2) = \frac{a}{2} \Leftrightarrow 12 = \frac{a}{2} \Leftrightarrow 12 \times 2 = a \Leftrightarrow a = 24$$

15. Como média dos valores registados na tabela, incluindo o valor representado por k, é 1122, temos que:

$$\frac{770 + k + 2900 + 1500 + 262 + 1000}{6} = 1122 \Leftrightarrow k + 6432 = 1122 \times 6 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow k + 6432 = 6732 \Leftrightarrow k = 6732 - 6432 \Leftrightarrow k = 300$$

16. Calculando o aumento do número de dormidas, de 2020 para 2021, nas diferentes regiões, temos:

	Número de dormidas (milhões)			
Regiões (Portugal Continental)	**2020**	**2021**	Aumento	
Alentejo	0,3	0,5	$0{,}5 - 0{,}3 = 0{,}2$	Menor aumento
Algarve	4,1	5,6	$5{,}6 - 4{,}1 = 1{,}5$	
Área Metropolitana de Lisboa (AML)	3,3	5,1	$5{,}1 - 3{,}3 = 1{,}8$	Maior aumento
Centro	0,7	1,4	$1{,}4 - 0{,}7 = 0{,}7$	Aumentou 100%
Norte	1,6	2,5	$2{,}5 - 1{,}6 = 0{,}9$	

E assim podemos verificar que:

(1) A região onde o aumento foi mais elevado foi na Área Metropolitana de Lisboa.

(2) A região onde o aumento foi menor foi no Alentejo.

(3) Na região Centro o número duplicou, o que corresponde a um aumento de 100%.

		Alentejo	**Algarve**	**AML**	**Centro**	**Norte**
(1)	Região onde o aumento do número de dormidas, em milhões, de 2020 para 2021, foi o mais elevado.			**X**		
(2)	Região onde o aumento do número de dormidas, em milhões, de 2020 para 2021, foi o mais baixo.	**X**				
(3)	Região onde o número de dormidas, de 2020 para 2021, aumentou 100%.				**X**	