

Prova final de Matemática - 3.º ciclo (2024, 1.ª fase)

Proposta de resolução



1. Ordenando os valores correspondentes ao número de alunos matriculados no ensino superior em Portugal, de 1978 a 1983, temos:

$$\underbrace{79\,436 \quad 80\,919 \quad 81\,582}_{50\%} \quad \underbrace{83\,754 \quad 86\,789 \quad 89\,310}_{50\%}$$

E assim a mediana deste conjunto de números é

$$\tilde{x} = \frac{81\,582 + 83\,754}{2} = 82\,668$$

Resposta: **Opção C**

2. Como $\sqrt{49} = 7$, então $-\frac{\sqrt{49}}{17} = \frac{-7}{51}$ é uma razão de números inteiros, ou seja, é um número racional, e por isso, pode ser representado por uma dízima finita ou infinita periódica.

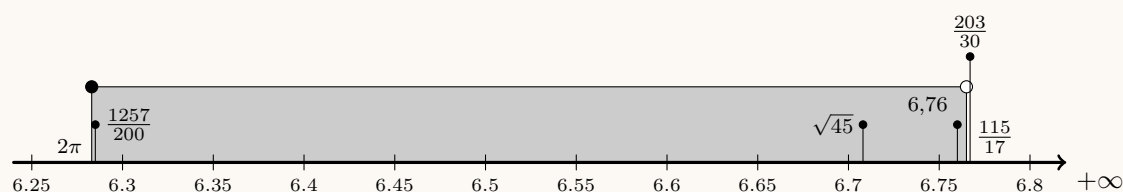
Como 2π , $\sqrt{30} + \sqrt{6}$ e $\sqrt{8}$ são números irracionais, correspondem a dízimas infinitas não periódicas.

Resposta: **Opção A**

3. Sabemos que $676 \times 10^{-2} = 6,76$, e usando a calculadora podemos verificar que:

- $\frac{1257}{200} = 6,285$
- $\sqrt{45} \approx 6,708$
- $\frac{203}{30} \approx 6,767$
- $2\pi \approx 6,283$
- $\frac{115}{17} \approx 6,765$

Logo, observando que como $\frac{203}{30} > \frac{115}{17}$, então $\frac{203}{30} \notin \left[2\pi, \frac{115}{17} \right]$



Resposta: **Opção D**

4. Observando que:

- o número de quadrados brancos é a diferença entre 100 e o número de quadrados cinzentos;
- o número de quadrados cinzentos é par em todos os termos;
- e que se considerarmos que o número de quadrados cinzentos é o dobro da ordem de cada termo, obteríamos, em cada termo, mais dois quadrados do que se observa na figura.

Então, vem que:

- o número de quadrados cinzentos do termo de ordem n é: $2n - 2$
- o número de quadrados brancos do termo de ordem n é: $100 - (2n - 2) = 100 - 2n + 2 = 102 - 2n$

Assim, a ordem do termo da sequência que tem exatamente 26 quadrados brancos é a solução da equação $102 - 2n = 26$, ou seja:

$$102 - 2n = 26 \Leftrightarrow 102 - 26 = 2n \Leftrightarrow 76 = 2n \Leftrightarrow \frac{76}{2} = n \Leftrightarrow 38 = n$$

5. Ordenando as etapas de resolução da inequação, temos:

Inequação inicial.	$\frac{2}{5} \left(-x - \frac{5}{3} \right) + 1 \geq \frac{x+4}{3}$	$\frac{2}{5} \left(-x - \frac{5}{3} \right) + 1 \geq \frac{x+4}{3}$	①
Desembaraçar a inequação de parêntesis.	$-\frac{2x}{5} - \frac{2}{3} + 1 \geq \frac{x}{3} + \frac{4}{3}$	$-1 \geq \frac{11x}{5}$	④
Isolar os termos com incógnita num dos membros e calcular $-\frac{2}{3} + 1$.	$\frac{1}{3} - \frac{4}{3} \geq \frac{2x}{5} + \frac{x}{3}$	$x \leq -\frac{11x}{5}$	⑥
Reduzir os termos semelhantes.	$-1 \geq \frac{11x}{5}$	$\frac{1}{3} - \frac{4}{3} \geq \frac{2x}{5} + \frac{x}{3}$	③
Inverter o sinal da desigualdade.	$\frac{11x}{5} \leq -1$	$-\frac{2x}{5} - \frac{2}{3} + 1 \geq \frac{x}{3} + \frac{4}{3}$	②
Multiplicar ambos os membros por $\frac{15}{11}$.	$x \leq -\frac{15}{11}$	$\frac{11x}{5} \leq -1$	⑤
Apresentar o conjunto solução.	$S = \left] -\infty, -\frac{15}{11} \right]$	$S = \left] -\infty, -\frac{15}{11} \right]$	⑦

6. Calculando o volume da pirâmide $[ABCDV]$, sendo h_1 a respectiva altura, temos:

$$V_{[ABCDV]} = \frac{1}{3} \times A_{[ABCD]} \times h_1 = \frac{1}{3} \times 1,2 \times 1 \times 11,5 = 4,4 \text{ m}^3$$

Considerando h_2 como a altura da pirâmide $[EFGHV]$, ou seja, a diferença entre a altura da pirâmide $[ABCDV]$ e a altura do tronco de pirâmide $[ABCDEFGH]$, temos que:

$$h_2 = 11,5 - 2,3 = 9,2 \text{ m}$$

Logo, o volume da pirâmide $[EFGHV]$, é:

$$V_{[EFGHV]} = \frac{1}{3} \times A_{[EFGH]} \times h_2 = \frac{1}{3} \times 0,9 \times 0,96 \times 9,2 \approx 2,36 \text{ m}^3$$

E assim, o volume do tronco de pirâmide, V_T , arredondado às unidades, pode ser calculado como a diferença dos volumes das duas pirâmides:

$$V_T = V_{[ABCDV]} - V_{[EFGHV]} \approx 4,6 - 2,36 \approx 2 \text{ m}^3$$



7. Colocando o fator x em evidência e aplicando a lei do anulamento do produto, vem:

$$2x^2 - 5x = 0 \Leftrightarrow x(2x - 5) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee 2x - 5 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee 2x = 5 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = \frac{5}{2}$$

$$\text{C.S.} = \left\{ 0, \frac{5}{2} \right\}$$

Resposta: **Opção B**

8. Como o triângulo $[ABC]$ é retângulo em B , e, relativamente ao ângulo ACB , o lado $[BC]$ é o cateto adjacente e o lado $[AC]$ é a hipotenusa, usando a definição de cosseno, temos:

$$\cos \hat{ACB} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} \Leftrightarrow \cos 11^\circ = \frac{960}{\overline{AC}} \Leftrightarrow \overline{AC} = \frac{960}{\cos 11^\circ}$$

Assim, que o valor de \overline{AC} , em centímetros, arredondado às unidades, é: $\frac{960}{\cos 11^\circ} \approx 978$ cm.

9. Calculando 8% de 6,22 milhões de eleitores, ou seja, o número de eleitores que não votaram nas eleições de 25 de abril de 1975, temos:

$$6,22 \times \frac{8}{100} = 0,4976 \text{ milhões}$$

Como 1 milhão = 1 000 000 = 1×10^6 , escrevendo o valor anterior em notação científica, vem:

$$0,4976 \text{ milhões} = 497 600 = 0,4976 \times 10^6 = 4,976 \times 10^5$$

10. Sabemos que:

- como o ponto A pertence ao gráfico de f , designando por a a abcissa do ponto A , temos que $f(a) = \frac{1}{3}a^2$
- como a ordenada do ponto A é 3, então

$$f(a) = 3 \Leftrightarrow \frac{1}{3}a^2 = 3 \Leftrightarrow a^2 = 3 \times 3 \Leftrightarrow a^2 = 9 \Leftrightarrow a = \pm\sqrt{9} \Leftrightarrow a = \pm 3$$

- como a abcissa do ponto A é negativa, temos que $a = -3$
- como as abcissas dos pontos A e B são simétricas temos que a abcissa do ponto B é: $-a = -(-3) = 3$

Como a função g é uma função de proporcionalidade inversa, pode ser definida por uma expressão algébrica da forma $g(x) = \frac{k}{x}$.

Como o ponto B tem coordenadas $(3,3)$ e pertence ao gráfico de g , podemos determinar o valor de k :

$$g(x) = \frac{k}{x} \Leftrightarrow 3 = \frac{k}{3} \Leftrightarrow 9 = k$$

E assim, uma expressão algébrica da função g é: $g(x) = \frac{9}{x}$.

Resposta: **Opção A**



11. Observando os dois gráficos, temos que:

- o gráfico A não representa a função f porque pela observação do gráfico, a distância a que a Rita se encontrava de casa, nunca diminuiu, o que contraria a descrição de que após o concerto as amigas voltaram a casa da Mariana, pelo mesmo caminho, pelo que no final do percurso não poderiam estar no ponto mais distante da casa da Rita;
- o gráfico B também não representa a função f de acordo com a descrição do percurso, quando a Rita chegou a casa da Mariana, esperou um pouco pela amiga. Assim a distância a que estava de casa manteve-se constante durante um espaço de tempo, e voltou a manter-se constante durante o concerto, pelo que o gráfico deveria apresentar dois períodos de tempo em que a distância se mantém constante, e, o gráfico B, apresenta apenas um.

12. Identificando uma expressão algébrica para os comprimentos dos lados do retângulo, temos:

- $\overline{AE} = \overline{AB} + \overline{BE} = x + 3$
- $\overline{AG} = \overline{AD} - \overline{GD} = x - 3$

Assim, determinando uma expressão algébrica para a área do retângulo $[AEFG]$ e simplificando a expressão, temos que:

$$A_{[AEFG]} = (x + 3)(x - 3) = x^2 - 3x + 3x - 9 = x^2 - 3^2 = x^2 - 9$$

Resposta: **Opção A**

13. Pelo critério de semelhança de triângulos AA, temos que os dois triângulos são semelhantes, porque ambos têm um ângulo de vértice no ponto C em comum, e um ângulo reto. Assim, os comprimentos dos lados correspondentes dos dois triângulos são diretamente proporcionais, ou seja:

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{CE}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{DE}}$$

Desta forma, a expressão que representa \overline{AC} , em função de a , é:

$$\frac{\overline{AC}}{a} = \frac{21}{6} \Leftrightarrow \overline{AC} = \frac{21}{6} \times a \Leftrightarrow \overline{AC} = \frac{7}{2}a$$

Resposta: **Opção D**

14. Como o número desta escola é 400 e, destes, apenas 125 participaram na palestra «50 Anos de Democracia», calculando a probabilidade, com recurso à Regra de Laplace, de selecionar ao acaso um aluno desta escola e ele ter participado nesta palestra, é:

$$p = \frac{125}{400} = \frac{25}{80} = \frac{5}{16}$$

Resposta: **Opção B**



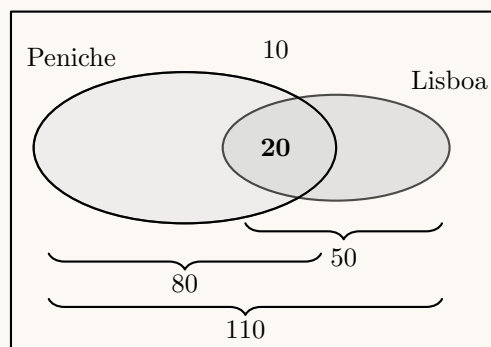
15. Organizando todas as preferências dos alunos do professor de História num diagrama de Venn, temos:

Como são 120 alunos, então:

- $120 - 10 = 110$ gostariam de visitar pelo menos um dos museus;
- $80 + 50 = 130$ é o número de preferências registradas.

Logo o número de alunos que gostaria de visitar os dois museus, é a diferença entre o número de alunos da turma e o número total de preferências manifestadas:

$$130 - 110 = 20$$



Assim, para a probabilidade solicitada temos que existem 120 casos possíveis e equiprováveis e 20 casos favoráveis, pelo que, calculando a probabilidade pela Regra de Laplace, e apresentando o resultado na forma de fração irredutível, temos:

$$p = \frac{20}{120} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$$

16.

16.1. Como a soma dos ângulos internos do triângulo $[ODE]$ é 180° , temos que:

$$D\hat{O}E + O\hat{D}E + O\hat{E}E = 180 \Leftrightarrow D\hat{O}E + 90 + 30 = 180 \Leftrightarrow D\hat{O}E = 180 - 90 - 30 \Leftrightarrow D\hat{O}E = 60^\circ$$

Como os ângulos COD e DOE são suplementares, então:

$$C\hat{O}D + D\hat{O}E = 180 \Leftrightarrow C\hat{O}D + 60 = 180 \Leftrightarrow C\hat{O}D = 180 - 60 \Leftrightarrow C\hat{O}D = 120^\circ$$

Como o arco DC é o arco relativo ao ângulo ao centro COD , tem a mesma amplitude e como o arco BD , é o arco relativo ao ângulo inscrito BAD , a amplitude do arco é o dobro da amplitude do ângulo, e assim, temos que:

$$\widehat{BC} = \widehat{BD} - \widehat{CD} = 2 \times B\hat{A}D - C\hat{O}D = 2 \times 80 - 120 = 160 - 120 = 40^\circ$$

16.2. Como o triângulo $[ODE]$ é retângulo em D , recorrendo ao Teorema de Pitágoras, para calcular o valor de \overline{DE} :

$$\overline{DE}^2 + \overline{OD}^2 = \overline{OE}^2 \Leftrightarrow \overline{DE}^2 + 6^2 = 12^2 \Leftrightarrow \overline{DE}^2 + 36 = 144 \Leftrightarrow \overline{DE}^2 = 144 - 36 \underset{\overline{DE} > 0}{\Rightarrow} \overline{DE} = \sqrt{108}$$

Assim, como $\sqrt{108} \approx 10,39$, o valor de \overline{DE} , arredondado às décimas, é 10,4.



17. Analisando cada uma das afirmações, temos:

- (A) Como em 1976, apenas 5,7% dos deputados eram mulheres, num total de 263, temos que o número de mulheres é:

$$263 \times \frac{5,7}{100} = 14,991 \approx 15$$

- (B) Em 2022, 8 partidos elegeram deputados e em 1976, apenas 5 o tinham conseguido, mas 8 é inferior a 10, que é dobro de 5.
- (C) Pela análise da figura podemos observar que o PCP elegeu 6 deputados em 2022, sendo que 3 eram homens e 3 eram mulheres, ou seja, o mesmo número de homens e de mulheres.
- (D) Em 2022, concorreram 22 partidos às eleições e em 1976, apenas 14, ou seja, um aumento de $22 - 14 = 8$ partidos. Assim o aumento percentual a , relativamente ao total de 1976, é:

$$\frac{a}{8} = \frac{100}{14} \Leftrightarrow a = \frac{100 \times 8}{14} \Rightarrow a \approx 57,1\%$$

- (E) Em 1976, 5 dos 14 partidos que concorreram às eleições elegeram deputados, ou seja menos de metade (7); o que também aconteceu em 2022, em que apenas 8 dos 22 partidos conseguiu eleger deputados, por isso menos de metade (11).

Resposta: **Opções A, C e D**

