Prova final de Matemática - 3.º ciclo **(2024, 2.ª fase)**

Proposta de resolução

1.

1.1. Como a turma tem 28 alunos e existem 2 raparigas no Grupo C, calculando a probabilidade, com recurso à Regra de Laplace, de selecionar ao acaso um aluno desta turma e esse aluno ser uma rapariga do Grupo C, é:

$$p = \frac{2}{28} = \frac{1}{14}$$

Resposta: **Opção D**

1.2. Como é escolhido um aluno do Grupo A e um aluno do Grupo D, podemos organizar todas os pares de alunos escolhidos com recurso a uma tabela:

Grupo A \ **Grupo D**	Rapariga	Rapariga	Rapaz	Rapaz
Rapariga	♀♀	♀♀	♀♂	♀♂
Rapariga	♀♀	♀♀	♀♂	♀♂
Rapaz	♂♀	♂♀	♂♂	♂♂
Rapaz	♂♀	♂♀	♂♂	♂♂
Rapaz	♂♀	♂♀	♂♂	♂♂

Assim, podemos observar que existem 20 pares diferentes que podem ser escolhidos, dos quais 6 são compostos por dois rapazes, ou seja, calculando a probabilidade pela Regra de Laplace de que os dois alunos selecionados serem rapazes, e apresentado o resultado na forma de fração, temos:

$$p = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$$

2. Como $-\frac{17}{31}$ e $\frac{9}{11}$ são quocientes de números inteiros, são números racionais, ou seja, são representados por dízimas finitas ou infinitas periódicas, e $0{,}(75) = 0{,}757575...$ é uma dízima infinita periódica de período 75.

Assim, de entre os números apresentado o único que pode ser representado por uma dízima infinita não periódica é $-2\sqrt{2}$.

Resposta: **Opção A**

3. Como $4\pi \approx 12{,}566$, logo:

   - $4\pi > 12{,}55$, ou seja, $4\pi \notin]12{,}54; 12{,}55[$
   - $4\pi > 12{,}56$, ou seja, $4\pi \notin]12{,}55; 12{,}56[$
   - $4\pi < 12{,}57$, ou seja, $4\pi \notin]12{,}57; 12{,}58[$

   Assim, de entre os intervalos apresentados, o único a que pertence o número 4π é $]12{,}56; 12{,}57[$.

   Resposta: **Opção C**

4. Como cada termo da sequência obtém-se acrescentando ao termo anterior quatro círculos e dois quadrados, ou seja, metade dos quadrados que de círculos, pelo que para obter 644 círculos, foi necessário:

   - acrescentar ao primeiro termo $644 - 12 = 632$ círculos;
   - a que correspondem metade dos quadrados, ou seja, $\frac{632}{2} = 316$ quadrados acrescentados ao primeiro termo.

   Assim o número de quadrados do termo com 644 círculos, é:

$$5 + 316 = 321$$

5. Ordenando as etapas de resolução da inequação, temos:

Inequação inicial.	$-2\left(x - \frac{7}{2}\right) - \frac{x}{5} \leq -\frac{x}{10} + 4$	$-2\left(x - \frac{7}{2}\right) - \frac{x}{5} \leq -\frac{x}{10} + 4$	1
Desembaraçar a inequação de parêntesis.	$-2x + 7 - \frac{x}{5} \leq -\frac{x}{10} + 4$	$-2x - \frac{x}{5} + \frac{x}{10} \leq 4 - 7$	**3**
Isolar os termos com incógnita num dos membros.	$-2x - \frac{x}{5} + \frac{x}{10} \leq 4 - 7$	$-\frac{21}{10}x \leq -3$	**4**
Reduzir os termos semelhantes.	$-\frac{21}{10}x \leq -3$	$-2x + 7 - \frac{x}{5} \leq -\frac{x}{10} + 4$	**2**
Multiplicar ambos os membros por $-\frac{10}{21}$, invertendo o sinal da desigualdade.	$x \geq \frac{30}{21}$	$x \geq \frac{10}{7}$	**6**
Simplificar a fração.	$x \geq \frac{10}{7}$	$x \geq \frac{30}{21}$	**5**
Apresentar o conjunto solução.	$S = \left[\frac{10}{7}, +\infty\right[$	$S = \left[\frac{10}{7}, +\infty\right[$	7

6. Resolvendo a equação, temos:

$$x^2 - 25 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 25 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{25} \Leftrightarrow x = -5 \vee x = 5$$

   C.S.=$\{-5{,}5\}$

   Resposta: **Opção A**

7. Calculando 55% de 4900 milhões de toneladas, ou seja, a redução assumida para 2030, temos:

$$4900 \times \frac{55}{100} = 2695 \text{ milhões de toneladas}$$

   Assim, o valor máximo das emissões que se pretende alcançar, é:

$$4900 - 2695 = 2205 \text{ milhões de toneladas}$$

   Pelo que, escrevendo este valor em notação científica, vem:

$$2\,205\,000\,000 = 2{,}205 \times 10^9$$

8. Podemos calcular o volume do tronco de cone, como a diferença dos volumes dos cones cujas bases têm diâmetros $[AB]$ e $[CD]$.
   Assim, calculando o volume dos dois cones, temos que:

   - a altura do cone cuja base tem diâmetro $[AB]$ é 2,4 m e como a base é um círculo cujo diâmetro mede 0,8 m, a medida do raio da base é 0,4 m, e assim vem que:

$$V_{C_{[AB]}} = \frac{A_\circ \times \text{altura}}{3} = \frac{\pi \times 0{,}4^2 \times 2{,}4}{3} \approx 0{,}402 \text{ m}^3$$

   - a altura do cone cuja base tem diâmetro $[CD]$ é $2{,}4 - 0{,}9 = 1{,}3$ m e como a base é um círculo cujo diâmetro mede 0,5 m, a medida do raio da base é 0,25 m, e assim vem que:

$$V_{C_{[CD]}} = \frac{A_\circ \times \text{altura}}{3} = \frac{\pi \times 0{,}25^2 \times 1{,}3}{3} \approx 0{,}085 \text{ m}^3$$

   E assim temos que o volume do tronco de cone, em metros cúbicos, arredondado às décimas, é:

$$V = V_{C_{[AB]}} - V_{C_{[CD]}} \approx 0{,}402 - 0{,}085 \approx 0{,}3 \text{ m}^3$$

9. Ordenando os dados da tabela podemos verificar que, para que a mediana seja 11, os valores centrais, são 9 e k, uma vez que metade dos valores são inferiores ou iguais a 9.

$$\underbrace{7 \quad 8 \quad 9 \quad 9}_{50\%} \; \underbrace{k \quad k \quad 18 \quad 18}_{50\%}$$

   Logo, como a mediana dos cartazes elaborados é 11, temos que:

$$\frac{9+k}{2} = 11 \Leftrightarrow 9 + k = 22 \Leftrightarrow k = 22 - 9 \Leftrightarrow k = 13$$

   Resposta: **Opção D**

10. Como a função f é uma função afim, e o ponto de coordenadas $(0,7)$ pertence ao seu gráfico, temos que a função pode ser representada por uma expressão algébrica da forma $f(x) = mx + 7$.

    Como o ponto B também pertence ao gráfico de f, substituindo as coordenadas na expressão anterior, podemos determinar o valor do declive da reta:

    $$9 = m(4) + 7 \Leftrightarrow 9 - 7 = 4m \Leftrightarrow 2 = 4m \Leftrightarrow \frac{2}{4} = m \Leftrightarrow \frac{1}{2} = m$$

    Desta forma, temos que uma expressão algébrica da função f, é $f(x) = \frac{1}{2}x + 7$, pelo que podemos calcular a ordenada do ponto C:

    $$y_C = f(2) = \frac{1}{2} \times 2 + 7 = 1 + 7 = 8$$

    Como a função g é uma função de proporcionalidade inversa, sabemos que a sua expressão algébrica é da forma $g(x) = \frac{k}{x}$, com $k \in \mathbb{R}$

    Como o ponto $C(2,8)$ pertence ao gráfico de g, podemos determinar o valor de k:

    $$8 = \frac{k}{2} \Leftrightarrow 8 \times 2 = k \Leftrightarrow 16 = k$$

    Pelo que a expressão algébrica da função g é $g(x) = \frac{16}{x}$.

    Resposta: **Opção C**

11. Observando a figura podemos observar que nem o ponto P_1 nem o ponto P_2 cumprem as condições definidas pela câmara municipal, porque:

    - o ponto P_1 não pertence à circunferência de centro no ponto J e raio igual a 500 metros, pelo que não está a uma distância de 500 metros do jardim municipal como era pretendido;
    - o ponto P_2 não pertence à a mediatriz do segmento de reta $[CH]$, pelo que não está à mesma distância da câmara municipal e do hospital, como era pretendido.

12. Como os triângulos $[ABC]$ e $[DEC]$ são semelhantes (pelo critério AA) e os lados $[AC]$ e $[DC]$ são correspondentes, e que também os lados $[BC]$ e $[EC]$ são correspondentes, temos que:

    $$\frac{\overline{AC}}{\overline{DC}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{EC}} \Leftrightarrow \frac{\overline{AC}}{a} = \frac{5+3}{3} \Leftrightarrow \overline{AC} = \frac{8}{3} \times a \Leftrightarrow \overline{AC} = \frac{8}{3}a$$

    Resposta: **Opção B**

13. Como o triângulo $[ABC]$ é retângulo em B e como, relativamente ao ângulo CAB, o lado $[AB]$ é o cateto adjacente e o lado $[BC]$ é o cateto oposto, usando a definição de tangente, temos:

    $$\operatorname{tg} 39^\circ = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} \Leftrightarrow \operatorname{tg} 39^\circ = \frac{\overline{BC}}{100} \Leftrightarrow 100 \times \operatorname{tg} 39^\circ = \overline{BC}$$

    Assim, recorrendo à calculadora gráfica e arredondando o valor às unidades, vem que

    $$\overline{BC} = 100 \operatorname{tg} 39^\circ \approx 81 \text{ m}$$

14.

14.1. Temos que:

- como as cordas $[AB]$ e $[CD]$ são paralelas e iguais, temos que $\overset{\frown}{BA} = \overset{\frown}{DC} = 120°$;
- como $[AC]$ é um diâmetro da circunferência, porque $[ABC]$ é um triângulo retângulo, então $\overset{\frown}{CA} = 180°$;
- e assim, temos que

$$\overset{\frown}{CB} + \overset{\frown}{BA} = \overset{\frown}{CA} \Leftrightarrow \overset{\frown}{CB} + 120 = 180 \Leftrightarrow \overset{\frown}{CB} = 180 - 120 \Leftrightarrow \overset{\frown}{CB} = 60°$$

Como o arco BC é o arco relativo ao ângulo inscrito CAB, a amplitude do ângulo é metade da amplitude do arco, ou seja:

$$C\hat{A}B = \frac{\overset{\frown}{CB}}{2} = \frac{60}{2} = 30°$$

14.2. Como $[AC]$ é um diâmetro da circunferência e O é o centro da circunferência, temos que $\overline{OA} = \overline{OC}$, pelo que:

$$\overline{AC} = \overline{OA} + \overline{OC} = 10 + 10 = 20$$

Assim, recorrendo ao Teorema de Pitágoras, para calcular o valor de $\overline{AB}$, e arredondando o resultado às centésimas, temos:

$$\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 = \overline{AC}^2 \Leftrightarrow \overline{AB}^2 + 10^2 = 20^2 \Leftrightarrow \overline{AB}^2 + 100 = 400 \Leftrightarrow \overline{AB}^2 = 400 - 100 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \overline{AB}^2 = 300 \underset{\overline{AB}>0}{\Rightarrow} \overline{AB} = \sqrt{300} \Rightarrow \overline{AB} \approx 17{,}32$$

15. Uma expressão algébrica que define a área do quadrado $[ABCD]$ é:

$$A_{[ABCD]} = (x-2)(x-2) = x^2 - 2x - 2x + 4 = x^2 - 4x + 4$$

A área do quadrado $[EFGH]$ é $A_{[EFGH]} = 10^2 = 100$

Assim, a área sombreada, A_S, é a diferença das áreas dos quadrados, ou seja:

$$A_S = A_{[ABCD]} - A_{[EFGH]} = x^2 - 4x + 4 - 100 = x^2 - 4x - 96$$

Resposta: **Opção A**

16. Observando os dados do gráfico e analisando cada uma das afirmações, temos:

- **(A)** A Áustria registou emissões de 79 842 quilotoneladas equivalentes de CO_2, que é o dobro das emissões da Eslováquia (39 921 quilotoneladas), porque $39\,921 \times 2 = 79\,842$
- **(B)** A Polónia registou emissões de 390 745 quilotoneladas equivalentes de CO_2, e 30% deste valor corresponde a $390\,745 \times \frac{30}{100} = 117\,223{,}5$ quilotoneladas, que é um valor superior às emissões registadas pela Áustria.
- **(C)** A totalidade das emissões de gases com efeito de estufa na União Europeia foi de 4 065 462 quilotoneladas. 20% deste valor corresponde a $4\,065\,462 \times \frac{20}{100} = 813\,092{,}4$, pelo que, como o valor das emissões registado na Alemanha é inferior a este valor, ou seja, inferior a 20% do total.
- **(D)** A soma dos valores registados na Polónia, Eslováquia, Espanha e Portugal, é:

$$390\,745 + 39\,921 + 314\,529 + 63\,470 = 808\,665$$

  Assim, estes países em conjunto emitiram menos quantidade de gases com efeito de estufa do que a Alemanha.
- **(E)** O valor correspondente a 15 vezes mais gases com efeito de estufa do que os emitidos por Portugal, é $15 \times 63\,470 = 952\,050$, que é um valor superior às emissões registadas na Alemanha, pelo que a Alemanha não emitiu 15 vezes mais gases com efeito de estufa do que Portugal.

Resposta: **Opções A, C e D**